FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Département de mathématiques

Année universitaire : 2021-2022

Enseignant : Dr.Melouka REMIL

Module : Analyse 4

Niveau : $2^{ème}$ année

Cour 2 : Fonction de plusieurs variable

0.1 Fonctions de plusieurs variables

On considère une partie D de $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'une fonction f de D dans $\mathbb{R}^m$.
A tout point $x = (x_1, ..., x_n) \in D$ on associe un point $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathbb{R}^m$.

On notera parfois $f(x) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$, où $f_1, ..., f_m$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}^m$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel de dimension infinie.

0.2 Limite d'une fonction

La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise naturellement la notion correspondante dans le cas des fonctions d'une seule variable. les limites a gauche et a droite perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles. En effet, dès que le domaine se situe dans un espace à deux dimensions au moins, les chemins qui mènent à un point donné peuvent suivre divers axes.

0.2.1 Rappel et définitions

Dans le cours de première année nous avons défini la limite pour une fonction d'une seul variable f définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ de la manière suivante

f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $a \in D$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Definition 0.2.1. *On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in U$ admet pour limite le nombre réel l lorsque x tend vers a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Nous pouvons généraliser ces définitions aux fonctions de $D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Definition 0.2.2. *On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ admet une limite l lorsque x tend vers a si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

On peut donner la définition équivalente suivante.

Definition 0.2.3. *On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est admet une limite l lorsque x tend vers a si, pour toute suite $(x_n) \subset U$ qui converge vers a, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = l$.*

Exemples

1. La fonction $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ admet pour $(x, y) \to (0, 0)$ la limite 0, en effet

   On a :

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|.$$

   alors $|xy| \leq \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}$. On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire

$$|f(x, y)| \leq \frac{3\|(x, y)\|_2^2 + \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x, y)\|_2} \leq 7\|(x, y)\|_2.$$

Ainsi, si (x, y) tend vers 0, on a $f(x, y)$ tend vers 0.

2. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} 3x^2z + yx\cos(\pi x - \pi z) = 3(2)^2(-1) + (1)(2)\cos(2\pi + \pi) = -14.$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(5,1)} \frac{xy}{x+y} = \frac{5}{6}.$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(2x+y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x+y}{x+y} = \frac{3}{2}.$

Un moyen pratique d'établir qu'une fonction n'a pas de limite

pour montrer qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de limite en a. il suffit de trouver deux chemins tel que les limites de f suivant les deux chemins sont différentes. Attention Si la restriction à toute droite passant par A admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe

Exemples

1. La fonction $\frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$ n'admet pas de limite au point $(0, 0)$ en effet :
   — $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = \lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2(0)^2}{x^4+3(0)^4} = \lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} 0 = 0.$

   — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{(0)^2y^2}{(0)^4+3y^4} = \lim_{(0,y)\to(0,0)} 0 = 0$

   — $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4} = \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2x^2}{x^4+3x^4} = \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^4}{4x^4} = \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
2. La fonction $\frac{x^3y}{x^6+y^2}$ n'admet pas de limite au point $(0, 0)$ en effet :
   — $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^3x}{x^6+x^2} = \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^6+x^2} = \lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^4+1} = 0$
   — $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{(x,x^3)\to(0,0)} \frac{x^3x^3}{x^6+(x^3)^2} = \lim\limits_{(x,x^3)\to(0,0)} \frac{x^6}{2x^6} = \lim\limits_{(x,x^3)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Comment établir qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ a une limite ?

1. Calculer la limite en utilisant les chemins.
2. Monter que la fonction admet la limite obtenue en utilisant l'un des méthodes suivantes :
   (a) la définition.
   (b) l'encadrement (le pincement).

Exemple 0.2.4. $f(x,y)=\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$

Pour montrer que la limite de f au point $(0,0)$ égal 0 , on applique la définition.
Soit $\varepsilon>0$ étant donné, on veut trouver $\delta>0$ tel que si $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$, alors $|f(x,y)-0|<\varepsilon$.
Soit $\delta<\sqrt{\varepsilon/5}$ et si $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, alors $x^2<\delta^2$.
Soit $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$. on Considère $|f(x,y)-0|$:

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|=\left|x^2\cdot\frac{5y^2}{x^2+y^2}\right|<\delta^2\cdot 5<\frac{\varepsilon}{5}\cdot 5=\varepsilon.$$

Donc si $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ alors $/f(x,y)-0|<\varepsilon$, c.q.f.d.
D'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

0.2.2 Coordonnées polaires

On considère des fonctions $f:U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, dans la pratique pour calculer la limite au point (a,b) en passant aux coordonnées polaires en faisant le changement de variables donnée par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta,\\ y=b+r\sin\theta.\end{cases}$$

avec $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ et $\theta\in[0,2\pi[$. On a le résultat suivant

$$f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)=g(r).h(t).$$

Alors si $g(r)\longrightarrow 0$ lorsque $r\longrightarrow 0$ (et $h(\theta)$ est borné), alors $f(x,y)\longrightarrow 0$ lorsque $(x,y)\longrightarrow(0,0)$.

Exemple 0.2.5.

1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r\cos^2\theta}{\sin\theta}.$$

quand $r\to 0$ on a $\frac{r\cos^2\theta}{\sin\theta}=r\times\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ et $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$. n'est pas bornée alors la limite n'existe pas.

2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0^+}\frac{\big(r\cos\theta(r)\big)\cdot\big(r\sin\theta(r)\big)^2}{\big(r\cos\theta(r)\big)^2+\big(r\sin\theta(r)\big)^2}$$

$$= \lim_{r \to 0^+} \frac{r^3 \cos\theta(r) \sin^2\theta(r)}{r^2} = \lim_{r \to 0^+} r \cos\theta(r) \sin^2\theta(r) = 0$$

0.3 Continuité

0.3.1 Rappel et définitions

Si $f : D \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une seul variable, on dit que f est continue en un point $a \in D$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Definition 0.3.1. *Continuité*

On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est continue en a si $a \in U$ et si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definition 0.3.2.

On dit que f est continue sur un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ si f est continue en tout point de U.

Exemple 0.3.3.

La fonction définie par $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En effet, pour tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} 1 - x^2 - y^2 = 1 - a^2 - b^2 = f(a, b).$$

Exemple 0.3.4.

la fonction $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par $\frac{xy}{x^2+y^2}$ n'est pas continue au point $(0,0)$, en effet :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x)\to(0)}\frac{0}{y^2}=0.$$

On peut donner la définition équivalente suivante.

Definition 0.3.5.

On dit que $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ est continue en a si $a\in U$ et si, pour toute suite $(x_n)\subset U$ qui converge vers a, on a $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$.

Théorème 0.3.6.

Une fonction $f=(f_1,...,f_m):U\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ est continue en $a\in U$, si et seulement si, chaque fonction $f_i:U\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est continue en $a\in U$.

Démonstration.

Soit (x_n) une suite qui converge vers a. Alors la suite $f(x_n)$ converge vers $f(a)$ si, et seulement si, pour tout entier $i\in\{l,...,m\}$, la suite $f_i(x_n)$ converge vers $f_i(a)$, la i^{me} coordonnée de $f(a)$. □

Remarque 0.3.7.

L'étude de la continuité (resp. le calcul d'une limite) pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ consiste à étudier la continuité (resp. à calculer la limite) de m fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 0.3.8.

la fonction $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par $(x+y,2x-y^2,3y)$ est continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, en effet les fonctions $f_1(x,y)=x+y, f_2(x,y)=2x-y^2, f_3(x,y)=3y$ sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

0.3.2 Opérations élémentaires

Théorème 0.3.9. *(Opérations élémentaires)*

Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ et $\lambda : U \to \mathbb{R}$ des fonctions continue en $a \in U$. Alors,

1. *$f + g$ est continue en a.*
2. *λf est continue en a.*
3. *de même fg et f/g (avec $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de a) sont continues en a.*

Démonstration.

Soit (x_n) une suite qui converge vers a. On a $f(x_n) \to_{n\to\infty} f(a)$, $g(x_n) \to_{n\to\infty} g(a)$, et $\lambda(x_n) \to_{n\to\infty} \lambda(a)$, par continuité de f, g et λ.

1. La suite $(f(x_n) + g(x_n))$ converge donc vers $f(a) + g(a)$.
2. La suite $(\lambda(x_n)f(x_n)$ converge donc vers $\lambda(a)f(a)$.
3. La suite $((f(x_n)|g(x_n)))$ converge donc vers $(f(a)|g(a))$.

□

Théorème 0.3.10. *(Fonctions composée)*

Soient $U \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathbb{R}^n$. Si $f : U \to V$ est continue en a et si $g : V \to \mathbb{R}^m$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue en a.

Démonstration.

Soit (x_n) une suite qui converge vers a. Alors, la suite $(y_n = f(x_n)$ converge vers $f(a)$ par continuité de f. La suite $(g(y_n) = g \circ f(x_n))$ converge donc vers $g \circ f(a)$. □

Remarque 0.3.11.

1. *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues sont continues.*
2. *Une fonction polynomiale est continue partout. Une fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.*

Exemple 0.3.12.

1. *La fonction définie par* $f(x,y) = 2x^2y^5 + 3xy^3 + 8xy^2 + 3y + 4$ *est une fonction polynomiale de deux variables, cette fonction est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *La fonction définie par* $g(x,y) = \frac{1}{y-x^2}$ *est une fonction rationnelle et continue partout sauf le long de la courbe* $y = x^2$*, où son dénominateur est égal à zéro.*

Théorème 0.3.13.

Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *est continue sur* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

La i^{me} coordonnée de $L(x_1, ..., x_n)$ est une combinaison linéaire des x_i :

$$L_i(x_i, ..., x_n) = A_1x_1 + ... + A_nx_n.$$

On a donc :

$$\|L_i(x) - L_i(y)\| \leq |A_1(x_1 - y_1)| + ... + |A_n(x_n - y_n)| \leq (|A_1| + ... + |A_n|)||x - y||.$$

$\square$

0.3.3 Théorème des bornes

Nous allons maintenant généraliser au cas des fonctions réelles de plusieurs variables réelles le théorème des bornes des fonctions réelles d'une variable réelle.

Rappelons qu'un compact $K \in \mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé et borné, et de plus de toute suite $(x_n) \in K$, on peut extraire une sous-suite $((x_n)_k)$ qui converge vers une limite $a \in K$.

Théorème 0.3.14.

Soit $K \in \mathbb{R}^n$ *un compact et* $f : K \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors,* f *est bornée et atteint ses bornes :*

- *il existe un point* $a \in K$ *tel que* $f(a) \geq f(x)$ *pour tout* $x \in K$,
- *il existe un point* $b \in K$ *tel que* $f(b) \leq f(x)$ *pour tout* $x \in K$.

Démonstration.

Posons $M = \sup\limits_{x \in K} f(x)$. A priori, $M \in \mathbb{R}$. Par propriété de la borne supérieure, pour tout $x \in K$, on a $f(x) \leq M$ et il existe une suite de points $(x_n \in K)$ tels que $f(x_n) \to M$. Comme K est compact, on peut en extraire une sous-suite (x_n) qui converge vers une limite $a \in K$. Par continuité de f en a, on a $f((x_n)_k) \to_{k\to\infty} f(a)$. Donc $M = f(a) < \infty$ et pour tout $f(x) \leq f(a)$. On montre de manière similaire que f est minorée sur K et qu'il existe un point $b \in K$ tel que $f(b) \leq f(x)$ pour tout $x \in K$. $\square$

Exemple 0.3.15.

Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, *considérons, la fonction* $f : (x, y) \in X \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$, f *et continue sur* X *qui est fermé et borné alors* f *atteint ses bornes.*

> **Definition 0.3.16** (prolongement par continuité)**.**
>
> *Soit* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Soit* a *un point adhérent à* U *n'appartenant pas à* U. *Si* f *a une limite* l *lorsque* $x \to a$ *on peut étendre le domaine de définition de* f *à* $U \cup \{a\}$ *en posant* $f(a) = l$. *On dit que l'on a prolongé* f *par continuité au point* a.

Exemple 0.3.17.

la fonction $f(x, y) = \frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$ *est prolongeable par continuité au point* $(0, 0)$, *en efft :*
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$, *on a alors le prolongement par continuité de* f *est donné par*

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$