Pr. M. DJAA

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
SOUS VARIÉTÉS DE IR^n

3ème LMD Mathématiques

Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017

Table des matières

Introduction

Je mets entre les mains de nos étudiants de mathématique 3ème année LMD ce document de géométrie différentielle tout en éspérant qu'il sera pour eux un aide et un outil de base.

Notre objectif est de faire comprendre aux étudiants de 3ème année LMD les concepts de la géométrie differentielle et le calcul différentiel sur les sous variétés réelles par des méthodes simples et logiques.

Pr Mustapha Djaa
Professeur de mathématiques
Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane.
Mai 2017

A tout chercheur de la vérité.

Chapitre 1

Espace Vectoriel Normé

1.1 Définition et propriétés d'une norme

Définition 1.1.1. *Soit E un esapce vectoriel sur le $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application*

$$\begin{array}{rcl} N : E & \to & \mathbb{R}+ \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

où $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1.1.1. *Si N est une norme sur un espace vecoriel E, alors pour tout $x, y \in E$ on a*

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x+y) \tag{1.1}$$

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \tag{1.2}$$

Preuve *on a :*

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x+y-y) \\ &\leq N(x+y)+N(-y) \\ &\leq N(x+y)+N(y) \end{aligned}$$

d'où

$$N(x)-N(y) \leq N(x+y) \tag{1.3}$$

de la même façon on obtient

$$N(y)-N(x) \leq N(x+y) \tag{1.4}$$

des équations (1.3) et (1.4), on obtient

$$-N(x+y) \leq N(x)-N(y) \leq N(x+y)$$

donc

$$|N(y)-N(x)| \leq N(x+y)$$

La formule (1.2) est obtenue en remplaçant dans l'équation (1.1) la variable y par $-y$. ■

Exemples 1.1.1. *:*

1

$$\begin{aligned} N: &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x=(x_1,....,x_n) &\mapsto N(x)=\sup_{i=1}^{n}|x_i| \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} N: &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x=(x_1,....,x_n) &\mapsto N(x)=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} N:\mathcal{C}_{[a,b]} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &= N(f)=\int_a^b |f(t)|dt \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}_{[a,b]}=\{f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}\,;continue\}$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$

Remarque 1.1.1. *La démonstration du troisième exemple nécessite le lemme suivant*

Lemme 1.1.1. *Si $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}_+$ est une fonction continue, alors :*

$$\int_a^b f(t)dt=0 \Rightarrow f\equiv 0.$$

Preuve Démontronstration par la négation.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle. Il existe alors $x \in]a,b[$ tel que $f(x) > 0$.

En vertu de la continuité de la fonction f, pour $0 < \varepsilon < f(x)$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\begin{array}{rcl}]x-\eta, x+\eta[& \subset &]a,b[, \\ \forall y \in]x-\eta, x+\eta[& : & f(y) > \varepsilon \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b f(t)dt & = & \int_a^{x-\eta} f(t)dt + \int_{a-\eta}^{a+\eta} f(t)dt + \int_{a+\eta}^{b} f(t)dt \\ & \geq & \int_{a-\eta}^{a+\eta} f(t)dt \\ & \geq & \int_{a-\eta}^{a+\eta} \varepsilon dt \\ & \geq & 2\varepsilon\eta \\ & > & 0. \end{array}$$

■

Exemple 1.1.1. *Soit $p \in [1, +\infty[$, on pose*

$$\begin{array}{rcl} N_p : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & N_p(x) = \Big[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

N est une norme sur $\mathbb{R}^n$. La démonstration repose sur les lemmes suivants :

Lemme 1.1.2 (Inégalité de Holder)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty[$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$), alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq N_p(x)N_q(y)$$

Lemme 1.1.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors pour $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Preuve Du Lemme 1.2.1

Soit $k \in]0,1]$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} f_k : [1,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ t & \mapsto & f_k(t) = k(t-1) - t^k + 1 \end{array}$$

La fonction dérivée de f_k est donnée par

$$f'_k = k - kt^{k-1} = k(1 - \frac{1}{t^{1-k}})$$

on déduit que f_k est une fonction croissante sur $[1,+\infty[$. Pour $a' \geq b' > 0$ et $k = \frac{1}{p}$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} f_{\frac{1}{p}}(\frac{a'}{b'}) & = & \frac{1}{p}(\frac{a'}{b'} - 1) - (\frac{a'}{b'})^{\frac{1}{p}} + 1 \\ & \geq & f_{\frac{1}{p}}(1) \\ & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{a'}{p} + b'(1 - \frac{1}{p}) & \geq & (a')^{\frac{1}{p}}(b')^{(1-\frac{1}{p})} \\ \frac{a'}{p} + \frac{b'}{q} & \geq & (a')^{\frac{1}{p}}(b')^{\frac{1}{q}} \end{array}$$

En posant $a' = a^p$ et $b' = b^q$, on obtient :

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

■

Preuve Du Lemme 1.1.2

Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ non nuls. Du Lemme 1.2.1 on a

$$\frac{|x_i|}{N_p(x)} \frac{|y_i|}{N_q(y)} \leq \frac{|x_i|^p}{pN_p(x)^p} + \frac{|y_i|^q}{qN_q(y)^q}$$

par sommation sur l'indice i, on trouve

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{N_p(x)} \frac{|y_i|}{N_q(y)} & \leq & \frac{1}{pN_p(x)^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{qN_q(y)^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \\ & \leq & \frac{N_p(x)^p}{pN_p(x)^p} + \frac{N_q(y)^q}{qN_q(y)^q} \\ & \leq & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ & \leq & 1 \end{array}$$

d'où l'inégalité de Holder

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq N_p(x).N_q(y)$$

■

Proposition 1.1.2. *Inégalité de Minkowsky.*

Pour rout $x, y \in \mathbb{R}^n$, ona :

$$N_p(x+y) \leq N_p(x) + N_p(y)$$

Preuve De La Proposition 1.1.2

$$\begin{aligned}
N_p^p(x+y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i||z^i|
\end{aligned}$$

où $z = (|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots.., |x_n + y_n|^{p-1})$.

En utilisant l'inégalité de Holder, on obtient

$$\begin{aligned}
N_p^p(x+y) &\leq N_p(x).N_q(z) + N_p(y).N_q(z) \\
&\leq \Big[N_p(x) + N_p(y)\Big].N_q(z) \\
&\leq \Big[N_p(x) + N_p(y)\Big].\Big[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \Big[N_p(x) + N_p(y)\Big].\Big[\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p}\Big]^{\frac{1}{q}} \quad ; \quad \Big((p-1)q = p\Big) \\
&\leq \Big[N_p(x) + N_p(y)\Big].\Big[N_p^p(x+y)\Big]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

d'oū

$$\begin{aligned}
N_p^{p-\frac{p}{q}}(x+y) &\leq N_p(x) + N_p(y). \\
N_p(x+y) &\leq N_p(x) + N_p(y) \quad ; \quad \Big(p - \frac{p}{q} = 1\Big)
\end{aligned}$$

■

De l'inégalité de Minkowsky on déduit la proposition suivante

Proposition 1.1.3. *Soit $p \in [1, +\infty[$, alors*

$$\begin{aligned}
N_p : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}_+ \\
x = (x_1, \ldots., x_n) &\mapsto N_p(x) = \Big[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.2. *Deux normes* N_1 *et* N_2 *sur un espace vectoriel* E*, sont dite équivalentes s'il existe deux réels positifs* $m, M > 0$ *tels que pour tout* $x \in E$*, on a*

$$m.N_1(x) \leq N_2(x) \leq M.N_1(x)$$

Exemple 1.1.2. *Sur* $\mathbb{R}^n$ *on considère les normes :*

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ N_2(x) &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \end{aligned}$$

Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*, on a :*

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n. \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

d'où

$$N_2(x) \leq N_1(x) \leq n.N_2(x)$$

N_2 *et* N_1 *sont équivalentes (ici* $m = 1$ *et* $M = n$*).*

Exemple 1.1.3. *Sur* $\mathcal{C}_{[0,1]} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}; \quad continue\}$*, on considère les normes*

$$\begin{aligned} N_1(f) = \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(t)|dt \\ N_\infty(f) = \|f\|_\infty &= \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} N_1(f) = &= \int_0^1 |f(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 N_\infty(f)|dt \\ &\leq N_\infty(f). \end{aligned}$$

Soit la suite de fonction definie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in [0, 1 - \frac{1}{n}], \\ n(x - 1 + \frac{1}{n}) & si \quad x \in]1 - \frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}*$*. On a*

1. $f_n \in \mathcal{C}_{[0,1]}$

2. *f_n est une fonction croissante*
3. $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = 1$
4.

$$\begin{aligned}\|f_n\|_1 &= \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} n(x-1+\frac{1}{n})dx \\ &= \Big[\frac{n}{2}(x-1+\frac{1}{n})^2\Big]_{1-\frac{1}{n}}^{1} \\ &= \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

pour $M>0$ il existe $n>M$ et on a :

$$M.N_1(f_n) = \frac{M}{2n} < \frac{1}{2} < N_\infty(f_n)$$

ce qui montre que N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

1.2 Application Continue

Définition 1.2.1. *Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés. Une application $f : (E_1, N_1) \to (E_2, N_2)$ est dite continue en $x_0 \in E_1$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0; \quad (x \in E_1) \quad N_1(x - x_0) < \eta \quad \Rightarrow \quad N_2(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon$$

Si f est continue en tout point $x \in E$, on dit alors que f est continue sur E.

Définition 1.2.2. *Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés. Une application $f : (E_1, N_1) \to (E_2, N_2)$ est dite uniformément continue sur E_1 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0; \quad (x, y \in E_1) \quad N_1(x - y) < \eta \quad \Rightarrow \quad N_2(f(x) - f(y)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.2.1. *Toute application uniformément continue est une application continue. La réciproque n'est pas toujours vraie.*

Exemple 1.2.1. *Soient* $E_1 = \mathbb{R}^2$, $N_1((x,y)) = |x| + |y|$, $E_2 = \mathbb{R}$, $N_2(x) = |x|$ *et*

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}^2, N_1) & \to & (\mathbb{R}, N_2) \\ (x,y) & \mapsto & f((x,y)) = x + y \end{array}$$

si $\varepsilon > 0$ *on prend* $\eta = \varepsilon$, *alors pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\begin{array}{rcl} N_1((x,y) - (x_0,y_0)) < \eta & \Rightarrow & N_2(f((x,y)) - f((x_0,y_0))) = |x - x_0 + y - y_0| \\ & \Rightarrow & N_2(f((x,y)) - f((x_0,y_0))) \leq |x - x_0| + |y - y_0| \\ & \Rightarrow & N_2(f((x,y)) - f((x_0,y_0))) \leq N_1((x,y) - (x_0,y_0)) \\ & \Rightarrow & N_2(f((x,y)) - f((x_0,y_0))) < \varepsilon. \end{array}$$

Exemple 1.2.2. *Soient* $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $N_1(x) = N_2(x) = |x|$.

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}, N_1) & \to & (\mathbb{R}, N_2) \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

est une fonction continue non uniformément continue, en effet

$$\begin{array}{rcl} N_2(f(x) - f(y)) & = & |f(x) - f(y)| \\ & = & |x^2 - y^2| \\ & = & |x + y||x - y| \\ & = & |x + y| N_1(x - y) \end{array}$$

Comme

$$\lim_{x,y \to +\infty} |x + y| = +\infty$$

on déduit que f *n'est pas uniformément continue.*

Soit E un espace vectoriel de dimension fini n. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, on pose

$$N_\infty(x) = \max_{i=1}^{n} |x_i| \tag{1.5}$$

où $x = \Sigma_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.

Lemme 1.2.1. *Si* N *est une norme sur* E *alors il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$ *on a*

$$N(x) \leq M.N_\infty(x).$$

Preuve On a :

$$\begin{aligned} N(x) &= N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \\ &\leq \max_{i=1}^{n} |x_i| \sum_{i=1}^{n} N(e_i) \\ &\leq M. \max_{i=1}^{n} |x_i| \\ &\leq M.N_\infty(x) \end{aligned}$$

où $M = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$. ■

Proposition 1.2.1. *Soient E un espace vectoriel de dimension fini n et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Si N est une norme sur E alors*

$$\begin{aligned} N : (E, N_\infty) &\to (\mathbb{R}, |.|) \\ x &\mapsto N(x) \end{aligned}$$

est une application continue.

Preuve De la Proposition 1.1.1 et du Lemme 1.2.1, on obtient

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq M.N_\infty(x-y)$$

d'où N est uniformément continue donc continue.

■

Proposition 1.2.2. *Soient E un espace vectoriel de dimension fini n et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Si N est une norme sur E alors*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) &\to (E, N) \\ x = (x_1, ...x_n) &\mapsto \overline{x} = f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{aligned}$$

est une application continue.

Preuve

$$\begin{aligned} N(f(x) - f(y)) &= N(\overline{x} - \overline{y}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| N(e_i) \\ &\leq \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \sum_{i=1}^{n} N(e_i) \\ &\leq M.\|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

où $M = \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$. Ainsi f est application uniformément continue donc continue.

■

Théorème 1.2.1. *Soient E un espace vectoriel de dimension fini n et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Preuve Soient N une norme sur E et $S = \{x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad \|x\|_\infty = 1\}$ la boule compacte de $\mathbb{R}^n$. De la Proposition 1.2.2 on déduit que

$$\overline{S} = f(S) = \Big\{x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \in E; \quad N_\infty(x) = 1\Big\}$$

est compacte dans E (voir le cours de topologie : espace metrique et continuité). Utilisant la continuité de l'application N (Proposition 1.2.2), N admet un maximum et un minimum sur $\overline{S}$ i.e.

$$\exists a, b \in \overline{S}; \quad N(a) = \inf_{x \in \overline{S}} N(x) > 0, \quad et \quad N(b) = \sup_{x \in \overline{S}} N(x) > 0$$

$$\forall x \in \overline{S} : \quad N(a) \leq N(x) \leq N(b)$$

Soient $m = N(a)$, $M = N(b)$ et $z \in E^*$, on a :

$$\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{z}{N_\infty(z)} \in \overline{S} \\ N(a) &\leq& N(x) \leq N(b) \\ m &\leq& N(\dfrac{z}{N_\infty(z)}) \leq M \\ m &\leq& \dfrac{N(z)}{N_\infty(z)} \leq M \\ m.N_\infty(z) &\leq& N(z) \leq M.N_\infty(z) \end{array}$$

Ce qui montre que N et N_∞ sont équivalentes sur E.

■

1.3 Application Linéaire Continue

Proposition 1.3.1. *Soient (E, N_E) , (F, N_F) deux espaces vecoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire, alors f est continue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0; \quad \exists \eta > 0 \quad telque N_E(x - y) < \eta \quad \Rightarrow \quad N_F(f(x - y)) < \varepsilon$$

Preuve La preuve découle immédiatement de la linéairité de f et la définition de continuité des applications.

$$N_F(f(x) - f(y)) = N_F(f(x - y))$$

■

Théorème 1.3.1 (Caractérisation d'une application linéaire continue). *Soient* (E, N_E) , (F, N_F) *deux espaces vecoriels normés et* $f : E \to F$ *une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est continue sur* E
2. f *est continue en* $0 \in E$
3. f *est bornée sur la boule unité* $B_{(0,1)} = \{x \in E; \quad N_E(x) \leq 1\}$
4. f *est bornée sur la sphère unité* $S_{(0,1)} = \{x \in E; \quad N_E(x) = 1\}$
5. $(\exists M > 0); \quad (\forall x \in E) : \quad N_F(f(x)) \leq M.N_E(x)$

Preuve On démontre le cycle fermé $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ est obtenue par définition de la continuité.

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$

On suppose que f est continue en $0 \in E$. Soit $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(N_E(x - 0) = N_E(x) < \eta) \quad \Rightarrow \quad (N_F(f(x) - f(0)) = N_F(f(x)) < \varepsilon)$$

Si $z \in B_{(0,1)}$, on pose $x = \frac{\eta z}{2}$ alors $N_E(x) = N_E(\frac{\eta z}{2}) \leq \frac{\eta}{2} < \eta$ et on a

$$N_F(f(z)) = N_F(f(\frac{2x}{\eta})) = \frac{2}{\eta} N_F(f(x)) < \frac{2\varepsilon}{\eta}$$

donc f est bornée sur $B_{(0,1)}$

$\underline{(3) \Rightarrow (4)}$

Puisque $S_{(0,1)} \subseteq B_{(0,1)}$ et f bornée sur $B_{(0,1)}$ on déduit que f bornée sur $S_{(0,1)}$

$\underline{(4) \Rightarrow (5)}$

Si f est bornée sur $S_{(0,1)}$ alors il existe $M > 0$ tel que $N_F(f(x)) < M$ pour tout $x \in S_{(0,1)}$. Soit $x \in E^*$ on a $\frac{x}{N_E(x)} \in S_{(0,1)}$ et

$$N_F(f(x)) = N_F(f(\frac{N_E(x)}{N_E(x)} x)) = N_E(x) N_F(f(\frac{x}{N_E(x)})) \leq M.N_E(x) \tag{1.6}$$

$\underline{(5) \Rightarrow (1)}$

De la formule (1.6) on obtient

$$N_F(f(x) - f(y)) = N_F(f(x - y)) \leq M.N_E(x - y)$$

Ce qui montre que f est une application uniformément continue, donc continue.

$\blacksquare$

Théorème 1.3.2. *Soient (E, N_E) , (F, N_F) deux espaces vecoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. Si E est de dimension finie alors f est continue.*

Preuve Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, pour $x = \Sigma_i x_i e_i \in E$ on pose

$$N_\infty(x) = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

D'après le Théorème Th1.1.0, il existe $m, M > 0$ tel que $m.N_E(x) \leq N_\infty(x) \leq M.N_E(x)$. On a

$$\begin{aligned} N_F(f(x)) &= \Sigma_i x_i N_F(f(e_i)) \\ &\leq \Big[\Sigma_i N_F(f(e_i))\Big] N_\infty(x) \\ &\leq \Big[\Sigma_i N_F(f(e_i))\Big].M.N_E(x) \\ &\leq M'.N_E(x) \end{aligned}$$

où $M' = M\Sigma_i N_F(f(e_i))$. D'après le Théorème 1.3.1 on déduit que f est continue. $\blacksquare$

Théorème 1.3.3 (Caractérisation d'une application multilinéaire continue)**.** *Soient $(E, N_1), ..., (E, N_p)$, (F, N_F) des espaces vecoriels normés et $f : E = E_1 \times ..... \times E_p \to F$ une application multilinéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E*
2. *f est continue en $0 \in E$*
3. *f est bornée sur la boule unité $B_{(0,1)} = \{x \in E; \quad N_E(x) \leq 1\}$*
4. *f est bornée sur la sphère unité $S_{(0,1)} = \{x \in E; \quad N_E(x) = 1\}$*
5. *$(\exists M > 0); \quad (\forall x = (x_1, ..., x_p) \in E) : \quad N_F(f(x)) \leq M.N_1(x_1)N_2(x_2)....N_p(x_p)$*

où

$$N_E(x) = \sup_{1\leq i\leq n} N_i(x_i)$$

Preuve .

<u>(4) $\Rightarrow$ (5)</u>

On suppose que f est bornée sur $S_{(0,1)}$ i.e.

$$(\exists M > 0); \quad (\forall x \in S_{(0,1)},\, N_E(x) = 1) \Rightarrow N_F(f(x)) \leq M.$$

Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in E$, s'il existe $i \in 1, ..., p$ tel que $x_i = 0$ alors (5) est trivialement verifiée. On suppose que $x_i \neq 0$ $(i = 1, ..., p)$, alors $z = (\frac{x_1}{N_1(x_1)}, ..., \frac{x_p}{N_p(x_p)}) \in S_{(0,1)}$ et on a

$$\begin{aligned} M &\geq N_F(f(z)) \\ &\geq N_F(f((\frac{x_1}{N_1(x_1)}, ..., \frac{x_p}{N_p(x_p)}))) \\ &\geq \frac{1}{N_1(x_1)....N_p(x_p)} N_F(f(x)) \end{aligned}$$

d'où

$$N_F(f(x)) \leq M.N_1(x_1)....N_p(x_p)$$

$\underline{(5) \Rightarrow (1)}$

On le démontre pour $n = 2$. Soit $(x, y), (h, k) \in E = E_1 \times E_2$, on a

$$f((x + h, y + k)) = f((x, y)) + f((x, k)) + f((h, y)) + f((h, k))$$

$$\begin{aligned} N_F(f((x + h, y + k)) - f((x, y))) &= N_F(f((x, k)) + f((h, y)) + f((h, k))) \\ &\leq M\Big(N_1(x)N_2(k) + N_1(h)N_2(y) + N_1(h)N_2(k)\Big). \end{aligned}$$

Si $N_1(h) < 1$ et $N_2(k) < 1$ alors $N_E((h, k)) < 1$ et

$$N_F(f((x + h, y + k)) - f((x, y))) \leq M(N_1(x) + N_2(y) + 1)N_E((h, k)).$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta < \min(1, \frac{\varepsilon}{M(N_1(x)+N_2(y)+1)})$ tel que

$$N_E((h, k)) < \eta \quad \Rightarrow \quad N_F(f((x + h, y + k)) - f((x, y))) < \varepsilon.$$

d'où la continuité de f en (x, y). ■

Exemples 1.3.1. *:*

1. $f : x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \to f(x) = x_1 x_2 ... x_n \in \mathbb{R}$
2. *Soient* $f : (E_1, N_1) \to \mathbb{R}$ *et* $g : (E_2, N_2) \to \mathbb{R}$ *deux applications linéaires continuent, alors* $h = f \otimes g : (x, y) \in E_1 \times E_2 \to h((x, y)) = f(x)g(y) \in \mathbb{R}$ *est une application bilinéaire continue.*
3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f((x, y)) = axy \in \mathbb{R}$

1.4 Espace des applications linéaires

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vecoriels normés sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F; \texttt{linéaire continue}\}$$

alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{N_E(x)\leq 1} N_F(f(x))$$

D'après la continuité de f on déduit que

$$N_F(f(x)) \leq \|f\| N_E(x), \qquad \forall x \in E_1$$

Si $\|f\| = 0$ et $x \in E^*$, alors

$$N_F(f(\frac{x}{N_E(x)})) \leq \|f\| = 0$$

on déduit que $f(x) = 0$ et parsuite $f = 0$.

Proposition 1.4.1. *Soient (E_1, N_1), (E_1, N_1) et (F, N_F) des espaces vecoriels normés sur $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ et $g \in \mathcal{L}(E_2, F)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et on a*

$$\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$$

Preuve En effet d'apès la continuité de g et f, si $x \in E_1$ alors

$$N_F(g \circ f(x)) \leq \|g\| N_2(f(x)) \leq \|g\|\|f\| N_1(x)$$

■

1.5 Espace de Banach

Définition 1.5.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_n \subset E$ est dite convergente vers $x \in E$ si*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \|x_n - x\| = 0$$

i.e.

$$(\forall \varepsilon > 0), \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \quad (\forall n \geq n_0), \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Définition 1.5.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_n \subset E$ est dite de Cauchy si*

$$(\forall \varepsilon > 0), \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \quad (\forall p, q \geq n_0), \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Proposition 1.5.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. Alors toute suite $(x_n)_n \subset E$ convergente vers $x \in E$ est une suite de Cauchy (la réciproque n'est pas toujours vraie).*

Preuve Soit $\varepsilon > 0)$, $\quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : \quad (\forall n \geq n_0), \quad \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'où

$$(p, q \geq n_0) \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \|x_p - x\| + \|x_q - x\| < \varepsilon$$

■

Contre-Exemple 1.5.1. $(\mathbb{Q}, |.|)$ *est un espace normé sur* $\mathbb{Q}$*, il existe une suite* $(x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ *qui converge vers* $\sqrt{2}$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors* $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy dans* $(\mathbb{Q}, |.|)$ *non convergente dans* $(\mathbb{Q}, |.|)$*.*

Définition 1.5.3. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *complet (i.e toute suite de Cauchy dans* $(E, \|.\|)$ *est convergente dans* $(E, \|.\|)$*).*

Chapitre 2

Applications differentiables

Dans la suite, les espaces vectoriels normés sont considérés de Banach.

2.1 Différentiabilité

Définition 2.1.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $U \subseteq E$ *un ouvert de* E. *Une application* $f : U \to F$ *est dite différentiable en* $a \in U$, *si il existe une application linéaire* $L : E \to F$ *telle que*

$$\lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} = 0$$

ou

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

On note

$$D_x f = L : E \to F$$

Proposition 2.1.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $U \subseteq E$ *un ouvert de* E. *Si* $f : U \to F$ *est une application différentiable en* $a \in U$, *alors* f *est continue en* a.

Preuve De la définition de la limite

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

pour $1 > \varepsilon > 0$ il existe $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{\|L\|+1}$ tel que

$$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F < \varepsilon \|h\|_E,$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \|f(a+h) - f(a)\|_F & < & \|L(h)\|_F + \varepsilon\|h\|_E \\ & < & \|L\|\|h\|_E + \varepsilon\|h\|_E \\ & < & (\|L\| + \varepsilon)\|h\|_E \\ & < & (\|L\| + 1)\|h\|_E \\ & < & \varepsilon. \end{array}$$

■

Exemple 2.1.1.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x, x^2) \end{array}$$

Si $N_1(x) = |x|$ désigne la norme sur $\mathbb{R}$, $N_2((x,y)) = max(|x|, |y|)$ désigne la norme sur $\mathbb{R}$ et g l'application linéaire continue définie par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ h & \mapsto & (h, 2x.h) \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{|h|\to 0} \dfrac{N_2(f(x+h) - f(x) - g(h))}{|h|} & = & lim_{|h|\to 0} \dfrac{N_2((x+h, (x+h)^2) - (x, x^2) - (h, 2x.h))}{|h|} \\ & = & lim_{|h|\to 0} \dfrac{N_2((0, h^2))}{|h|} \\ & = & lim_{|h|\to 0} |h| \\ & = & 0. \end{array}$$

Exemple 2.1.2. *Si $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en $a \in U$, alors f est differentiable en a et on a :*

$$\begin{array}{rcl} D_a f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & D_a(h) = f'(a).h \end{array}$$

Définition 2.1.2. *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est dite différentiable sur U si et seulement si elle differentiable en tout point $x \in U$.*

On note

$$\begin{array}{rcl} Df : U & \to & \mathcal{L}(E, F) \\ x & \mapsto & Df(x) = D_x f \end{array}$$

Définition 2.1.3. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $U \subseteq E$ *un ouvert de* E. *Une application* $f : U \to F$ *est dite continuement différentiable ou de classe* C^1 *sur* U *si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. f *est differentiable sur* E.
2. $Df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ *est continue sur* U.

Exemple 2.1.3.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f((x, y)) = (x - y, y^2) \end{array}$$

De la définition 2.1.1, on déduit que f *est differentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a :*

$$\begin{array}{rcl} D_{(x,y)}f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (h, k) & \mapsto & D_{(x,y)}f((h, k)) = (h - k, 2yk) \end{array}$$

est une application linéaire de matrice associée $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$

Si $\|(x, y)\| = max(|x|, |y|)$ *désigne la norme sur* $\mathbb{R}^2$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} \|D_{(x,y)}f - D_{(a,b)}f\| & = & \sup\limits_{|h|,|k|\leq 1} \|D_{(x,y)}f(h, k) - D_{(a,b)}f(h, k)\| \\ & = & \sup\limits_{|h|,|k|\leq 1} \|(h - k, 2yk) - (h - k, 2bk)\| \\ & = & \sup\limits_{|h|,|k|\leq 1} \|(0, 2(y - b)k)\| \\ & = & \sup\limits_{|k|\leq 1} 2|y - b||k| \\ & = & 2|y - b| \\ & \leq & 2\|(x, y) - (a, b)\| \end{array}$$

d'où Df *est une application uniformément continue, donc* f *est de classe* C^1.

Théorème 2.1.1. *Soient* $(E, \|.\|_1)$, $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $\|.\|_2$ *une norme sur* E. *Si* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalente alors toute application differentiable de* $f : (E, \|.\|_1) \to (F, \|.\|_F)$ *est une application differentiable de* $f : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_F)$ *et inversement*

Preuve Soient $0 < m < M$ tels que $m\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq M\|.\|_1$, on a

$$\frac{\|f(x + h) - f(x) - D_x(h)\|_F}{M\|h\|_1} \leq \frac{\|f(x + h) - f(x) - D_x(h)\|_F}{\|h\|_2} \leq \frac{\|f(x + h) - f(x) - D_x(h)\|_F}{m\|h\|_1}$$

■

Théorème 2.1.2. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_1)$ *deux espaces de Banach et* $\|.\|_2$ *une norme sur* F. *Si* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalente alors toute application differentiable de* $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_1)$ *est une application differentiable de* $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_2)$ *et inversement*

Preuve Soient $0 < m < M$ tels que $m\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq M\|.\|_1$, on a

$$\frac{m\|f(x+h) - f(x) - D_x(h)\|_1}{\|h\|_E} \leq \frac{\|f(x+h) - f(x) - D_x(h)\|_2}{\|h\|_E} \leq \frac{M\|f(x+h) - f(x) - D_x(h)\|_1}{\|h\|_E}$$

■

Théorème 2.1.3. *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$, $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Banach, $U \subseteq E$ (rep $V \subseteq F$) ouvert de E (rep F). Si $f : U \subseteq E \to V \subseteq F$ et $g : V \subseteq F \to G$ sont differentiable en $a \in U$ et $b = f(a) \in V$ respectivement, alors $g \circ f$ est une application differentiable en a et*

$$D_a g \circ f = D_b g \circ D_a f$$

Preuve Soit

$$A(x) = \|g \circ f(x) - g \circ f(a) - D_b g \circ D_a f(x-a)\|_G.$$

On a

$$\begin{aligned} A(x) &\leq \|g(f(x)) - g(f(a)) - D_b g(f(x) - b)\|_G + \|D_b g(f(x) - b) - D_b g(D_a f(x-a))\|_G \\ &\leq \|g(f(x)) - g(f(a)) - D_b g(f(x) - b)\|_G + \|D_b g\|\|f(x) - b - D_a f(x-a)\|_G \end{aligned}$$

De la differentiabilité de f en a, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \frac{\|f(x) - f(a)\|_F}{\|x - a\|_E} < \|D_a f\| + \varepsilon$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{A(x)}{\|x-a\|_E} &\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(a)) - D_b g(f(x) - b)\|_G}{\|x-a\|_E} + \frac{\|D_b g\|\|f(x) - b - D_a f(x-a)\|_G}{\|x-a\|_E} \\ &\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(a)) - D_b g(f(x) - b)\|_G}{\|f(x) - f(b)\|_F}\frac{\|f(x) - f(b)\|_F}{\|x-a\|_E} \\ &\quad + \frac{\|D_b g\|\|f(x) - b - D_a f(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} \\ &\leq (\|D_a f\| + \varepsilon)\frac{\|g(f(x)) - g(f(a)) - D_b g(f(x) - b)\|_G}{\|f(x) - f(b)\|_F} \\ &\quad + \|D_b g\|\frac{\|f(x) - b - D_a f(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} \end{aligned}$$

De la continuité de l'application f en a (i.e. $(\|x-a\|_E \to 0) \Rightarrow (\|f(x) - b\|_F \to 0)$), on déduit

$$\lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{A(x)}{\|x-a\|_E} = 0.$$

■

Propriétés 2.1.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach,* $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *et* $g : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *deux applications differentiables en* $x \in E$*, alors*

1. $f + g$ *est une application differentiable en* x *et on a :* $D_x(f + g) = D_x f + D_x g$.
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors* λf *est une application differentiable en* x *et on a :* $D_x \lambda f = \lambda D_x f$.

Exemples 2.1.1. *:*

1) Si $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est une application linéaire continue, alors* f *est differentiable telle que* $D_x f = f$.

2) Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach et* $f : (E \times F, \|.\|) \to (G, \|.\|_G)$ *une application bilinéaire continue, alors* f *est differentiable et sa differentielle est donnée par*

$$\begin{array}{rcl} L : Df_{(a,b)} : E \times F & \to & G \\ (h,k) & \mapsto & Df_{(a,b)}((h,k)) = L((h,k)) = f((h,b)) + f((a,k)) \end{array}$$

où $\|(h,k)\| = \sup(\|h\|_E, \|k\|_F)$. *En effet* L *est une application linéaire continue*

$$\begin{array}{rcl} L((h,k) + \lambda(h',k')) & = & L((h + \lambda h', k + \lambda k')) \\ & = & f((h + \lambda h', b)) + f((a, k + \lambda k')) \\ & = & f((h,b)) + \lambda f((h',b)) + f((a,k)) + \lambda f((a,k')) \\ & = & \lambda L((h,k)) + \lambda L((h',k')). \end{array}$$

la continuité de L *est une consequence de la continuité d* f, *de plus*

$$\begin{array}{rcl} \|f((a+h, b+k)) - f(a,b) - L(h,k)\|_G & = & \|f((h,k))\|_G \\ & \le & \|f\| \|h\|_E \|k\|_F \\ & \le & \|f\| \|(h,k)\|^2 \end{array}$$

d'où

$$\lim_{\|(h,k)\| \to 0} \frac{\|f((a+h, b+k)) - f(a,b) - L(h,k)\|_G}{\|(h,k)\|} = 0$$

3) Soient $(E_1, \|.\|_1)$,...,$(E_n, \|.\|_n)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach et* $f : E_1 \times ... \times E_n \to F)$ *une application n-linéaire continue, alors* f *est differentiable et sa differentielle est donnée par*

$$D_{(a_1,....a_n)} f((h_1, ...h_n)) = \sum_{i=1}^{n} f((a_1, .., h_i, ..a_n)$$

4) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *désigne l'espace des matrices carrées d'ordre* n.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) E_1 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \to & X^m \end{array}$$

$$D_X f((H)) = \sum_{i=1}^{m} X^{i-1} A X^{m-i}$$

(Remarque : le produit des matrices n'est pas commutatif).

5) Soit $(E, < . >)$ un espace de Hilbert sur un corps K, alors

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E & \to & K \\ (x, y) & \mapsto & < x, y > \end{array}$$

est une application differentiable telle que

$$D_{(x,y)} f((h, k)) =< x, k > + < h, y >$$

2.2 Différentielle partielle

Soient $(E_1, \|.\|_1)$,...,$(E_n, \|.\|_n)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach, on désigne $E = E_1 \times ... \times E_n$ l'esapce de Banach produit muni de la norme

$$\|(x_1, ..., x_n\|_E = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i$$

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, on note P_i la ième projection et u_i la ième injection définies par :

$$\begin{array}{rcl} P_i : E & \to & E_i \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} u_i : E_i & \to & E \\ y & \mapsto & (0, ..., y, ..., 0) \end{array}$$

Propriétés 2.2.1. *:*

1. $(\forall 1 \leq i \leq n) \quad P_i \circ u_i = Id_{E_i}$
2. $P_i \circ u_j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & si\, i \neq j \\ Id_{E_i} & si\, i = j \end{cases}$
3. $\sum_{i=1}^{n} u_i \circ P_i = Id_E$
4. P_i *est une application linéaire continue donc différentiable.*
5. u_i *est une application linéaire continue donc différentiable.*

Théorème 2.2.1. *Soient* $(E_1, \|.\|_1)$,...,$(E_n, \|.\|_n)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach. Alors* $f : U \subseteq F \to E_1 \times .... \times E_n$ *est différentiable si et seulement si pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$, $P_i \circ f : U \to E_i$ *est différentiable.*

Si on note $f_i = P_i \circ f$*, alors*

$$D_x f = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ D_x f_i$$

où $x \in U$.

Preuve Si f est différentiable, alors d'après le théorème de la composition des applications Théorème **??** on déduit que $P_i \circ f$ est une application différentiable.

Inversement, si $P_i \circ f$ $(1 \leq i \leq n$ est une application différentiable, d'après les propriétés 2.2.1 on déduit que $f = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ P_i \circ f = Id_E \circ f$ est une application différentiable.
■

Exemple 2.2.1.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (x^3, e^x, \sin(x)) \end{array}$$

On a

$$f_1 = P_1 \circ f(x) = x^3, \quad f_2 = P_2 \circ f(x) = e^x, \quad f_3 = P_3 \circ f(x) = \sin(x)$$

sont des fonctions différentiable, donc f *est une application différentiable et*

$$D_x f(h) = \sum_{i=1}^{3} u_i \circ D_x f_i(h) = (3x^2.h, e^x.h, cos(x).h)$$

Définition 2.2.1. *Soient* $(E_1, \|.\|_1)$,...,$(E_n, \|.\|_n)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach,* U *un ouvert de* $E = E_1 \times .... \times E_n$. *On dit qu'une application* $f : U \to F$ *admet une différentielle partielle par rapport à ième variable* x_i *en* $a = (a_1, ..., a_1)$*, si l'application*

$$\begin{array}{rcl} g_i : P_i(U) \subset E_i & \to & F \\ x_i & \mapsto & f((a_1, ...a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)) \end{array}$$

est différentiable en a_i $(1 \leq i \leq n)$*. On note alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{a_i} g_i$$

Proposition 2.2.1. *Soient* $(E_1, \|.\|_1)$,...,$(E_n, \|.\|_n)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach,* U *un ouvert de* $E = E_1 \times .... \times E_n$. *Si* $f : U \to F$ *est une application différentiable* $a = (a_1, ..., a_1)$ *alors pour tout* $i = 1, ..., n$, f *admet une différentielle partielle par rapport à la ième variable* x_i *et on a*

$$D_a f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ P_i$$

où P_i *désigne la ième projection.*

Preuve Soit $i \in \{1, ..., n\}$, on pose

$$\begin{array}{rcl} L_i : P_i(U) \subset E_i & \to & F \\ x_i & \mapsto & (a_1, ...a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \end{array}$$

L_i est une application différentiable telle que $D_{a_i} L_i = u_i$. On a

$$\begin{array}{rcl} g_i & = & f \circ L_i \\ D_{a_i} g_i & = & D_a f \circ D_{a_i} L_i \\ & = & D_a f \circ u_i \\ D_{a_i} g_i \circ P_i & = & D_a f \circ u_i \circ P_i \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ P_i & = & \sum_{i=1}^{n} D_{a_i} g_i \circ P_i \\ & = & \sum_{i=1}^{n} D_a f \circ u_i \circ P_i \\ & = & D_a f \circ \sum_{i=1}^{n} u_i \circ P_i \\ & = & D_a f \circ Id_E \\ & = & D_a f \end{array}$$

■

Exemples 2.2.1. *:*
Ex1)

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x^2 + \sin(2\pi y). \end{array}$$

Au point $a = (1, 1)$, on a

$$\begin{array}{rcl} g_1 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x, 1) = 2x^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g_2 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(1, y) = 2 + \sin(2\pi y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D_1 g_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & 4h. \end{array}$$

$$D_1 g_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & 2\pi k \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(a)(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(k) & = & 4h + 2(1+\pi)k \\ & = & (4, 2\pi)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ & = & D_a f(h,k) \end{array}$$

Ex2)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,s,t) & \mapsto & (2x^2 + e^t + s, sx + ty). \end{array}$$

Au point $a = (1, 1, 0, 1)$*, on a*

$$g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y,0,1) = (2x^2 + e, y). \end{array}$$

$$g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (s,t) & \mapsto & f(1,1,s,t) = (2 + e^t + s, s + t) \end{array}$$

on note $X = (x, y)$ *et* $y = (s, t)$

$$D_1 g_1 = \frac{\partial f}{\partial X}(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (h,k) & \mapsto & (4h, k). \end{array}$$

$$D_1 g_2 = \frac{\partial f}{\partial Y}(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (h',k') & \mapsto & (h' + e.k', h' + k') \end{array}$$

$$D_a f(h,k,h',k') = (4h + h' + e.k', k + h' + k') = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & e \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \\ h' \\ k' \end{pmatrix}$$

d'où

$$D_a f(h,k,h',k') = \frac{\partial f}{\partial X}(a)(h,k) + \frac{\partial f}{\partial Y}(a)(h',k')$$

Ex3) Soient E_1, E_2, F, G des espaces de Banach, $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue, $L_1 : G \to E_1$ et $L_2 : G \to E_2$ deux application linéaires continues. alors

$$\begin{array}{rcl} g : G & \to & F \\ x & \mapsto & f(L_1(x), L_2(x)) \end{array}$$

est une application différentiable et on a :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(h) & = & f(h,b) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(k) & = & f(a,k) \\ DzL_1 & = & L_1 \\ DzL & = & L_2 \end{array}$$

où $a = L_1(z)$ et $b = L_2(z)$. Par suite

$$\begin{array}{rcl} D_z g(h) & = & D(a,b)f(L_1(h), L_2) \\ & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(L_1(h)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(L_2(h)) \\ & = & f(L_1(h), b) + f(a, L_2(h)) \end{array}$$

Proposition 2.2.2. *Soient $E_1.....E_n$, $F_1......F_m$, G des espaces de Banach, $f : U \subseteq E_1 \times ... \times E_n \to V \subseteq F_1 \times ... \times F_m$ et $g : V \subseteq F_1 \times ... \times F_m \to G$ des applications différentiables en $a \in U$ et $b = f(a) \in V$ respectivement. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a*

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \tag{2.1}$$

où $f_j = P_j \circ f$.

Preuve En utilisant la formule de la différentielle composée, les paropriétés 2.2.1, le

Théorème 2.2.1 et la Proposition 2.2.1, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h\circ f}{\partial x_i}(a) &= D_a(h\circ f\circ L_i)\\
&= D_{f(a)}h\circ D_a f\circ u_i)\\
&= \sum_{1\le k\le m}\frac{\partial h}{\partial y_k}(f(a))\circ P_k\circ D_a f\circ u_i)\\
&= \sum_{1\le k\le m}\frac{\partial h}{\partial y_k}\circ P_k\circ \sum_{1\le s\le m} u_s\circ D_a f_s\circ u_i)\\
&= \sum_{1\le k\le m}\frac{\partial h}{\partial y_k}(f(a))\circ P_k\circ \Big[\sum_{1\le s\le m} u_s\circ D_a f_s\Big]\circ u_i)\\
&= \sum_{1\le k\le m}\frac{\partial h}{\partial y_k}(f(a))\circ P_k\circ \Big[\sum_{1\le s\le m} u_s\circ \Big(\sum_{1\le j\le n}\frac{\partial f_s}{\partial x_j}(a)\circ\circ P_j\Big)\Big]\circ u_i)\\
&= \sum_{k,s,j}\frac{\partial h}{\partial y_k}(f(a))\circ P_k\circ u_s\circ\frac{\partial f_s}{\partial x_j}(a)\circ P_j\circ u_i)\\
&= \sum_{k}\frac{\partial h}{\partial y_k}(f(a))\circ\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)
\end{aligned}$$

puisque $P_j\circ u_i=\delta_i^j$. ■

2.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.3.1. *Soient $(F,\|.\|_F)$ un espace de Banach, $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to F$ et $g:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux applications continiues. Si f et g admettent des dérivées à droite telles que*

$$\|f'_d(x)\|_F\le g'_d(x)\qquad (\forall x\in]a,b[)$$

Alors

$$\|f(b)-f(a)\|_F\le g(b)-g(a)$$

Preuve Soit $\varepsilon>0$, on pose

$$\begin{aligned}
A &= \{x\in[a,b];\quad \|f(x)-f(a)\|_F\le g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon\}\\
B &= \{y\in A;\quad [a,y]\subseteq A\}
\end{aligned}$$

On a $a\in A$ et $a\in B$, donc $A\ne\varnothing$ et $B\ne\varnothing$. De la continuité de la fonction $\|f(x)-f(a)\|_F-(g(x)-g(a))-\varepsilon(x-a)$, on déduit que A est un ensemble fermé et B n'est pas réduit à $\{a\}$. Si on note par $c = supB$, alors $c \in A$ (puisque A est fermé compact) et que c est une limite d'une suite croissante d'élément de B, i.e.

$$\exists (y_n)_n \uparrow \subset B; \quad c = \lim_n y_n$$

donc

$$[a, c[= \cup_n [a, y_n] \subseteq A$$

d'où $[a, c] \subseteq A$ et $c \in B$. Si $x \in A$ alors de la dérivabilité à droite de f et g il existe $\eta > 0$ tels que pour tout $h \in]0, \eta[$ on a

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\|f(x+h) - f(x\|_F}{h} & \leq & \|f'_d\|_F + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ g'_d & \leq & \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} + \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

d'où

$$\|f(x+h) - f(x\|_F \leq g(x+h) - g(x) + \varepsilon h + \varepsilon$$

donc $x + h \in A$ ($\forall\, 0 < h < \eta$). Comme $c \in A$ et $c = sup(B)$, on déduit que $c = b \in A$. Ainsi

$$\|f(b) - f(a\|_F \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a) + \varepsilon; \qquad \forall \varepsilon > 0$$

d'où

$$\|f(b) - f(a\|_F \leq g(b) - g(a)$$

■

Théorème 2.3.2. *Soit $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ admet une dérivée à droite en tout point de $]a, b[$, alors g est une fonction croissante sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout $x \in]a, b[$ on a $g'_d(x) \geq 0$.*

Preuve Si g est une fonction croissante alors

$$g'_d(x) = \lim_{0<h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \geq 0$$

Inversement, si $x, y \in [a, b]$ tel que $x < y$ on pose

$$\begin{array}{rcl} g : [x, y] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) \\ f : [x, y] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = 0 \end{array}$$

Du Théorème 2.3.1, on déduit que $0 \leq g(y) - g(x)$.

■

Corollaire 2.3.1. *Soient $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach et $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to F$ une application continue sur $[a, b]$ admet une dérivée à droite en tout point de $]a, b[$. Soik $K \in]0, +\infty[$ tel que*

$$\forall\, x \in]a, b[: \qquad \|f'_d(x)\|_F \leq K$$

alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq K(b - a)$$

Preuve Il suffit d'appliquer le Théorème 2.3.1 à la fonction $g : x \in [a, b] \to g(x) = Kx \in \mathbb{R}$.

■

Définition 2.3.1. *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach et U un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est dite K-lipschitzienne ($K > 0$), si pour tout $x, y \in U$ on a*

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq K\|y - x\|_E.$$

Théorème 2.3.3. *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach et U un ouvert convexe de E. Si $f : U \to F$ est une application différentiable et $K \in]0, +\infty[$ tels que*

$$\forall\, x \in U : \qquad \|D_x f\| \leq K$$

alors f est une application K-lipschitzienne

$$\forall\, x, y \in U : \qquad \|f(y) - f(x)\|_F \leq K\|y - x\|_E$$

Preuve Soient

$$\begin{array}{rcl} g : [0, 1] & \to & U \\ t & \mapsto & g(x) = t(y - x) + x \\ h : [0, 1] & \to & F \\ x & \mapsto & h(x) = f(t(y - x) + x) \end{array}$$

D'après la convexité de U, la fonction g est bien définie dérivable sur $[0, 1]$ tel que $g'(t) = y - x$. Comme $h = f \circ g$ alors

$$\begin{array}{rcl} \|h'(t)\|_F & = & \|D_{g(t)} f \circ g'(t)\|_F \\ & \leq & \|D_{g(t)} f\| \|g'(t)\|_E \\ & \leq & \|D_{g(t)} f\|.\|y - x\|_E \\ & \leq & K\|y - x\|_E. \end{array}$$

Par application du Théorème 2.3.1 aux applications h et g, on obtient

$$\|f(y) - f(x)\|_F = \|h(1) - h(0)\|_F \leq K\|y - x\|_E$$

Remarque : On peut appliquer le Corollaire 2.3.1 à l'application h et la constante $K' = K\|y - x\|_E$. ■

Théorème 2.3.4. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach et* U *un ouvert connexe de* E. *Si* $f : U \to F$ *est une application différentiable telle que*

$$\forall\, x \in U : \qquad \|D_x f\| = 0$$

alors f *est une application constante sur* U.

Preuve Soit $x_0 \in U$, on pose

$$A = \{x \in U; \quad f(x) = f(x_0)\}$$

De la continuité de l'application f on déduit que A est un ensemble fermé. Soient $y \in U$ et $r > 0$ tels que $y \in B(y, r) \subset U$ où $B(y, r)$ désigne la boule ouverte dans E de centre y et de rayon r. par application du Théorème 2.3.3 à l'application $f : B(y, r) \to F$ et une constante $\varepsilon > 0$ $\Big(\forall x \in B(y, r), \quad \|D_x f\| \leq \varepsilon\Big)$, on obtient

$$\forall x \in B(0, r) : \qquad \|f(y) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ d'où $B(y, r) \subset A$, ce qui montre que A est aussi ouvert, de la connexité de U, on déduit que $A = U$. ■

2.4 Applications du Théorème des Accroieesement finis

Théorème 2.4.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *des espaces de Banach et* U *un ouvert convexe de* E. *Si* $\{f_n : U \to F\}_n$ *est une suite d'applications différentiables telles que :*

1. $\exists a \in U : \quad (f_n(a))_n$ *est une suite de cauchy dans* F.
2. *La suite* $Df_n : U \to \mathcal{L}(E, F)$ *converge uniformément vers une application* $g : U \to \mathcal{L}(E, F)$.

Alors

1. *la suite* $\{f_n\}_n$ *converge uniformément vers* f *sur chaque partie bornée de* U.
2. f *est une application différentiable telle que* $Df = g$.

Preuve De la convergence uniforme de $\{Df_n\}_n$ vers g, on déduit que $\{Df_n\}_n$ est une suite uniformément de Cauchy :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in U, \forall n \geq N, \|D_x f_n - g(x)\| < \varepsilon \tag{2.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in U, \forall p, q \geq N, \|D_x(f_p - f_q)\| = \|D_x f_p - D_x f_q\| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Par application du théorème des accroissements finis Théorème 2.3.3 à l'application $(f_p - f_q)$ et la constante ε, on obtient :

1. $\|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)\|_F < \varepsilon \|x - y\|_E, \qquad (\forall x, y \in U), (\forall p, q \geq N).$

2. $\|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(a)\|_F < \varepsilon \|x - a\|_E, \qquad (\forall x \in U), (\forall p, q \geq N).$

3. $\|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \|f_p(a) - f_q(a)\|_F + \varepsilon \|x - a\|_E, \qquad (\forall x \in U), (\forall p, q \geq N).$

4. $\{f_n\}_n$ est une suite de uniformément de Cauchy sur U.

5. $\{f_n(x)\}_n$ est une suite de Cauchy dans F , $\qquad (\forall x \in U)$.

6. Comme F est de banach alors la suite $\{f_n(x)\}_n$ converge vers $y_x \in F$ $(y_x = \lim_n f_n(x))$.

Si on définit l' application f par

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) = y_x = \lim_n f_n(x) \end{array}$$

Alors la suite $\{f_n\}_n$ converge uniformément vers f sur toute partie bornée de U, en effet de la propriété (2) on obtient :

$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F < \|f_p(a) - f_q(a)\|_F + \varepsilon \|x - a\|_E, \qquad (\forall x \in U), (\forall p, q \geq N)$$

.
En faisant tendre $q \to +\infty$ on a

$$\|f_p(x) - f(x)\|_F < \|f_p(a) - f(a)\|_F + \varepsilon \|x - a\|_E, \qquad (\forall x \in U), (\forall p \geq N)$$

.
Pour $\varepsilon' > 0$, soient $N' > N$ tel que $\|f_p(a) - f(a)\|_F < \frac{\varepsilon}{2}$ et $M > 0$ tel que $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon'}{2M}$, alors $(\forall x \in U \cap B(a, M))$, $(\forall p \geq N)$ on a

$$\begin{array}{rcl} \|f_p(x) - f(x)\|_F & < & \|f_p(a) - f(a)\|_F + \varepsilon \|x - a\|_E \\ & < & \varepsilon'. \end{array}$$

Pour la différentiabilité de f, si on note

$$A(h) = \|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\|_F$$

alors

$$\begin{aligned} A(h) \quad \leq \quad & \|\Big[f(x+h) - f(x)\Big] - \Big[f_n(x+h) - f_n(x)\Big]\|_F \\ & + \|f_n(x+h) - f_n(x) - D_x f_n(h)\|_F + \|D_x f_n(h) - g(x)(h)\|_F \end{aligned} \tag{2.4}$$

De la propriété (1), on a

$$\|(f_p - f_q)(x+h) - (f_p - f_q)(x)\|_F < \varepsilon\|h\|_E, \qquad (\forall p, q \geq N)$$

en faisant tendre $q \to +\infty$, on obtient :

$$\|(f_p - f)(x+h) - (f_p - f)(x)\|_F < \varepsilon\|h\|_E, \qquad (\forall p \geq N) \tag{2.5}$$

En substituant les formules (2.2) (2.3) et (2.5) dans (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} A(h) \quad & \leq \quad \varepsilon\|h\|_E + \|f_n(x+h) - f_n(x) - D_x f_n(h)\|_F + \|D_x f_n - g(x)\|\|h\|_E \\ & \leq \quad \varepsilon\|h\|_E + \|f_n(x+h) - f_n(x) - D_x f_n(h)\|_F + \varepsilon\|h\|_E \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(h)}{\|h\|_E} \leq 2\varepsilon + \lim_{h\to 0} \frac{\|f_n(x+h) - f_n(x) - D_x f_n(h)\|_F}{\|h\|_E}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\|_F}{\|h\|_E} \leq 2\varepsilon$$

cette inégalité est vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, par suite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

■

Théorème 2.4.2. *Soient $(E_1, \|.\|_1)$,.....,$(E_n, \|.\|_n)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces de Banach . Si $f : U \to F$ est une application définie sur un ouvert $U \subset E_1 \times ... \times E_n$, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f est une application de classe C^1 sur U*
2. *f admet des dérivées partielles continues i.e.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : U \quad & \to \quad \mathcal{L}(E_i, F) \\ x \quad & \mapsto \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{aligned}$$

est continue $\forall i = 1, ..n$.

Preuve Soient $E = E_1 \times ..... \times E_n$, $a = (a_1, ..., a_n) \in U$, on note

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_E & = & \sup\limits_{1 \le i \le n} \|x_i\|_i \\ L_i : P_i(U) \subset E_i & \to & F \\ x_i & \mapsto & (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, .., x_n) \\ u_i : P_i(U) \subset E_i & \to & F \\ x_i & \mapsto & (0, ..., 0, x_i, 0, .., 0) \end{array}$$

où P_i désigne la ième projection. Si f est différentiable alors $f \circ L_i$ est différentiable et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{a_i}(f \circ L_i) = D_a f \circ u_i$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U & \to & \mathcal{L}(E, F) \\ x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_x f \circ u_i \end{array}$$

ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est une application continue telle que

$$\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\| = \|D_{x+h} f \circ u_i - D_x f \circ u_i\| \le \|D_{x+h} f - D_x f\| \|u_i\|.$$

Inversement, soit $a \in U$. De la continuité de l'application $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to F$ on a

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0) : \quad (\|x - a\|_E < \eta) \Rightarrow \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\| < \varepsilon$$

Soient $x \in B(a, \eta) \subset U$ et $i \in \{1, ..., n\}$, on pose

$$\begin{array}{rcl} g_i : P_i(B(a, \eta) \subset E_i & \to & F \\ t & \mapsto & f((a_1, ..., a_{i-1}, t, x_{i+1}, .., x_n)) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)(t - a_i) \end{array}$$

alors g_i est une application différentiable telle que

$$D_t g_i = \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_{i-1}, t, x_{i+1}, .., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\| < \varepsilon$$

Par application du théorème des accroissements finis (Théorème 2.3.3), on obtient

$$\begin{array}{rcl} \|g_i(x_i) - g_i(a_i)\|_F\| & \le & \|f((a_1, ..., a_{i-1}, x_i, x_{i+1}, .., x_n)) - f((a_1, ..., a_{i-1}, a_i, x_{i+1}, .., x_n)) \\ & & -\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\|_F \\ & \le & \varepsilon \|x_i - a_i\|_i \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(a)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)\|_F &= \|\sum_{i=1}^{n}[g_i(x_i)-g_i(a_i)]\|_F\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\|g_i(x_i)-g_i(a_i)\|_F\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\varepsilon\|x_i-a_i\|_i\\ &\le n\varepsilon\|x_i-a_i\|_E\end{aligned}$$

ce qui montre que f est différentiable de différentielle continue

$$\begin{aligned}Df : U\subset E : &\to F\\ x &\mapsto D_x f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\circ P_i\end{aligned}$$

■

2.5 Théorème d'Inversion Locale

Définition 2.5.1. *Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces de Banach, $U\subset E$ et $V\subset F$ deux ouverts de E et F respectivement. Une application $f:U\to V$ est dite difféomorphisme de classe C_1 si et seulement si f verifie les conditions suivantes*

1. *f est bijective.*
2. *f et f^{-1} sont différentiablement continues (de classe c^1).*

Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces de Banach. On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme

$$\|h\|=\sup_{\|x\|_E\le 1}\|h(x)\|_F$$

et $Isom(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

Lemme 2.5.1. *Si $u\in\mathcal{L}(E,E)$ tel que $\|u\|<1$, alors $(Id-u)\in Isom(E,E)$*

Preuve Puisque $\|u\|<1$, alors la série d'applications $\sum_n u^n$ est normalement convergente et on a

$$(Id-u)\sum_{i=0}^{n}u^i=\Big(\sum_{i=0}^{n}u^i\Big)(Id-u)=Id-u^{n+1}$$

comme

$$\lim_{n\to+\infty} u^{n+1} = 0$$

on déduit que

$$(Id-u)\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\Big)(Id-u) = Id$$

d'où $(Id-u) \in Isom(E,E)$ et $(Id-u)^{-1} = \sum_n u^n$. ∎

Lemme 2.5.2. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. Alors* $Isom(E,F)$ *est un ensemble ouvert de* $\mathcal{L}(E,F)$

Preuve Soient $u \in Isom(E,F)$ et $h \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|h\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$, on a

$$(u-h) = u(Id - u^{-1}h)$$

comme $\|u^{-1}h\| \leq \|u^{-1}\|\|h\| < 1$, d'après le Lemme 2.5.2 on obtient :

1. $(Id - u^{-1}h) \in Isom(E,F)$
2. $(u-h) = u(Id - u^{-1}h) \in Isom(E,F)$
3. $B(u,r) \subset Isom(E,F)$ où $r < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$

et par suite ∎

Lemme 2.5.3. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. Alors*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : Isom(E,F) & \to & Isom(F,E) \\ u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$$

est une application continue.

Preuve Soient $u \in Isom(E,F)$ et $h \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|h\| < \frac{1}{\|u_0\|}$, on a

$$\begin{aligned} (u-h)^{-1} - u^{-1} &= (Id - u^{-1}h)^{-1}u^{-1} - u^{-1} \\ &= [(Id - u^{-1}h)^{-1} - Id]u^{-1} \\ &= \Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(u^{-1}h)^n - Id\Big]u^{-1} \\ &= \Big[\sum_{n=1}^{+\infty}(u^{-1}h)^n\Big]u^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(u-h)^{-1}-u^{-1}\| &= \|(Id-u^{-1}h)^{-1}u^{-1}-u^{-1}\| \\
&= \|\sum_{n=1}^{+\infty}(u^{-1}h)^n u^{-1}\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\|u^{-1}h\|^n\|u^{-1}\| \\
&\leq \|u^{-1}\|\frac{\|u^{-1}h\|}{1-\|u^{-1}h\|}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{\|h\|\to 0}\|(u-h)^{-1}-u^{-1}\| &= \lim_{\|h\|\to 0}\|(Id-u^{-1}h)^{-1}u^{-1}-u^{-1}\| \\
&\leq \lim_{\|h\|\to 0} \leq \|u^{-1}\|\frac{\|u^{-1}h\|}{1-\|u^{-1}h\|}=0
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.5.1. [***Inversion Locale*** *(1ère version)*]

Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces de Banach, $U\subset E$ et $V\subset F$ deux ouverts de E et F respectivement. Si $f:U\to V$ est un homéomorphisme, alors f est un difféomorphisme de classe C^1 si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *f est différentiablement continue (i.e. de classe C^1)*
2. *$\forall x\in U\ :D_xf\in Isom(E,F)$.*

Preuve Si f est un difféomorphisme de classe C^1, alors $f^{-1}\circ f=Id_E$ et $f\circ f^{-1}=Id_F$. Soient $x\in U$ et $y=f(x)\in V$, on a :

$$D_x(f^{-1}\circ f)=D_yf^{-1}\circ D_xf=Id_E \quad et \quad D_y(f\circ f^{-1})=D_xf\circ D_yf^{-1}=Id_F$$

d'où $D_xf\in Isom(E,F)$.

Inversement, soit $a\in U$, on a $D_af\in Isom(E,F)$ et

$$\lim_{\|x-a\|_E\to 0}\frac{\|f(x)-f(a)-D_af(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E}=0$$

si on note par $b=f(a)$, $y=f(x)$,$\varphi=\Big(D_af\Big)^{-1}\in Isom(F,E)$ et

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(a)-D_af(x-a)}{\|x-a\|_E}$$

De la linéarité de φ on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(x)\|x-a\|_E &= \varphi \circ f(x) - \varphi \circ f(a) - (x-a) \\
&= \varphi(y) - \varphi(b) - (f^{-1}(y) - f^{-1}(b)) \\
&= -[f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - \varphi(y-b)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - \varphi(y-b)\|_E}{\|y-b\|_F} &= \|\varphi \circ \psi(x)\|_E \frac{\|x-a\|_E}{\|y-b\|_F} \\
&= \|\varphi \circ \psi(x)\|_E \frac{\|x-a\|_E}{\|f(x)-f(a)\|_F}
\end{aligned}$$

Comme f est différentiable et $\lim_{x\to a} \psi(x) = 0$, alors $\frac{\|f(x)-f(a)\|_F}{\|x-a\|_E}$ est bornée et

$$\lim_{y\to b} \frac{\|f^{-1}(y) - f^{-1}(b) - \varphi(y-b)\|_E}{\|y-b\|_F} = \lim_{x\to a} \|\varphi \circ \psi(x)\|_E \frac{\|x-a\|_E}{\|f(x)-f(a)\|_F} = 0$$

d'où f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et $D_b f^{-1} = \Big(D_a f\Big)^{-1}$.

Reste à montrer que $Df^{-1} : V \to \mathcal{L}(F,E)$ est une application continue. D'après le Lemme 2.5.3 l'application

$$\begin{aligned}
\Psi : Isom(E,F) &\to Isom(F,E) \\
u &\mapsto u^{-1}
\end{aligned}$$

est continue. Si $y \in V$ alors

$$\begin{aligned}
D_y f^{-1} &= \Big(D_{f^{-1}(y)} f\Big)^{-1} \\
&= \Big(Df \circ f^{-1}(y)\Big)^{-1} \\
&= \Psi \circ Df \circ f^{-1}(y)
\end{aligned}$$

d'où

$$Df^{-1} = \Psi \circ Df \circ f^{-1}$$

est une composée d'applications continues.

■

Théorème 2.5.2. [***Théorème du Point Fixe***] *soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach. Si $f : E \to E$ est une application K-Lipshitzienne $(0 < K < 1)$ (voir Définition Def2.2.1), alors il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve :

1) *Existence* :

Soit $x_0 \in E$, on définit une suite $(x_n)_n$ par

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0); \quad n \geq 1$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \|x_{n+1} - x_n\|_E & = & \|f(x_n - f(x_{n-1})\|_E \\ & \leq & K\|x_n - x_{n-1}\|_E \\ & \leq & K^n\|x_1 - x_0\|_E \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \|x_{n+p} - x_n\|_E & = & \|\displaystyle\sum_{i=1}^{p}(x_{n+i} - x_{n+i-1})\|_E \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\|(x_{n+i} - x_{n+i-1})\|_E \\ & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} K^{n+i-1}\|x_1 - x_0\|_E \\ & \leq & K^n\dfrac{1-K^p}{1-K}\|x_1 - x_0\|_E \\ & \leq & \dfrac{K^n}{1-K}\|x_1 - x_0\|_E \end{array}$$

Ce qui montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E. Comme E est un espace complet alors il existe $x \in E$ tel que

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

De la continuité de f on déduit

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \\ & = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \\ & = & x \end{array}$$

1) *Unicité* :

Soient $x, y \in E$ tels que $x = f(x)$ et $y = f(y)$, on a

$$\|y - x\|_E = \|f(y) - f(x)\|_E \leq K\|y - x\|_E$$

comme $k < 1$ alors $\|y - x\|_E = 0$ et donc $y = x$.

■

Théorème 2.5.3. [***Inversion Locale*** *(2ème version)*]

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach, $U \subset E$ un ouvert de E et $f : U \to F$ est une application de classe C^1. Si $a \in U$ tel que $D_a f \in Isom(E, F)$, alors il existe un ouvert $V \subset U$ voisinage de a et un ouvert $W \subset F$ tels que la réstriction $f : V \to W$ est un difféomorphisme de classe C^1.

Pour Démontrer le Théorème 2.5.3, on a besoin des lemmes suivants

Lemme 2.5.4. *Si on note par*

$$\begin{aligned} \psi : U &\to E \\ x &\mapsto x - \Big(D_a f\Big)^{-1} \circ f(x) \end{aligned}$$

alors ψ est une application de classe C^1 telle que pour tout $0 < K < 1$ il existe $r > 0$, ψ est K-Lipschitzienne sur la boule ouverte $B(a, r)$

Preuve

$$\begin{aligned} D\psi : U &\to \mathcal{L}(E, F) \\ x &\mapsto Id - \Big(D_a f\Big)^{-1} \circ D_x f \end{aligned}$$

et $D\psi(a) = D_a\psi = 0$. De la continuité de l'application $D\psi$, si $0 < K < 1$ alors il existe $r > 0$ tel que :

$$\|D_x\psi\| \leq K, \qquad \forall x \in B(a, r) \subset U$$

Par application du théorème des acroissements finis (Théorème 2.3.3) on déduit que ψ est une application K-Lipschitzienne sur la boule ouverte $B(a, r)$

$$(\forall x, y \in B(a, r) : \quad \|\psi(y) - \psi(x)\|_E \leq K\|y - x\|_E$$

■

Lemme 2.5.5. *Si on définit l'application Φ par*

$$\begin{aligned} \Phi : U &\to E \\ x &\mapsto \Big(D_a f\Big)^{-1} \circ f(x) \end{aligned}$$

alors Φ est une application différentiable injective sur $B(a, r)$,

Preuve en effet :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(y)-\Phi(x)\|_E &= \|(\Phi(y)-y)-(\Phi(x)-x)+(y-x)\|_E \\
&\geq \|y-x\|_E - \|(\Phi(y)-y)-(\Phi(x)-x)\|_E \\
&\geq \|y-x\|_E - \|\psi(y)-\psi(x)\|_E \\
&\geq \|y-x\|_E - K\|y-x\|_E \\
&\geq (1-K)\|y-x\|_E
\end{aligned}$$

d'où $(\Phi(y)=\Phi(x)) \Rightarrow (y=x)$. ■

Lemme 2.5.6. *Soit $b=\Phi(a)$. Si $y\in B(b,(1-K)r)$ alors il existe un unique élèment $x\in B(a,r)$ tel que $y=\Phi(x)$.*

Preuve L'unicité se déduit directement de l'injection de Φ.

L'existence est une solution de l'équation

$$y=\Phi(x)=-\psi(x)+x \tag{2.6}$$

Si on note

$$\begin{aligned}
g_y:\overline{B}(a,r) &\to \overline{B}(a,r) \\
x &\mapsto y+\psi(x)
\end{aligned}$$

alors g est une application bien définie, en effet

$$\begin{aligned}
\|g_y(x)-a\|_E &= \|y+\psi(x)-a\|_E \\
&= \|y+\psi(x)-b+b-a\|_E \\
&\geq \|y-b\|_E + \|\psi(x)-(a-\Phi(a))\|_E \\
&\geq \|y-b\|_E + \|\psi(x)-\psi(a)\|_E \\
&\geq \|y-b\|_E + K\|x-a\|_E \\
&\geq (1-K)r+Kr \\
&\geq r \\
&\geq (1-K)\|y-x\|_E
\end{aligned}$$

d'où

$$(\forall x\in\overline{B}(a,r)) \Rightarrow (g_y(x)\in\overline{B}(a,r))$$

D'autre part, si $x,x'\in\overline{B}(a,r)$ alors

$$\begin{aligned}\|g_y(x) - g_y(x')\|_E &= \|\psi(x) - \psi(x')\|_E \\ &\leq K\|x - x'\|_E\end{aligned}$$

donc g_y est une application K-Lipschitzienne, comme $\overline{B}(a,r)$ est un ensemble férmé de E donc $(\overline{B}(a,r), \|.\|_E$ est un espace complet. En vertu du théorème du point fixe, il existe un unique élèment $x \in \overline{B}(a,r)$ tel que

$$g_y(x) = x = y + \psi(x) \tag{2.7}$$

■

Lemme 2.5.7. *Si on note $V = \Phi^{-1}(B(b,(1-K)r)$ alors V est un ouvert de $B(a,r)$ et la restriction de l'application $\Phi : V \to (B(b,(1-K)r)$ est un homéomorphisme.*

Preuve Soit g l'application définie par

$$\begin{aligned} g : B(b,(1-K)r) &\to B(a,r) \\ y &\mapsto g(y) = x \end{aligned}$$

où x est solution de l'équation $g_y(x) = x$.

De la formule (2.7) on déduit que

$$(x = g(y)) \Leftrightarrow y = \Phi(x)$$

d'où $V = g(B(b,(1-K)r)) = \Phi^{-1}(B(b,(1-K)r))$ est un ouvert de $B(a,r)$. Comme g est injective (unicité de la solution) alors $g : B(b,(1-K)r) \to V$ est une application bijective telle que $g^{-1} = \Phi$.

Si $y, y' \in B(b,(1-K)r)$ et $x, x' \in V$ tels que $x = g(y)$ et $x' = g(y')$ alors

$$\begin{aligned}\|g(y) - g(y')\|_E &= \|x - x'\|_E \\ &= \|y + \psi(x) - y' - \psi(x')\|_E \\ &\leq \|y - y'\|_E + \|\psi(x) - \psi(x')\|_E \\ &\leq \|y - y'\|_E + K\|x - x'\|_E \\ \|g(y) - g(y')\|_E - K\|x - x'\|_E &\leq \|y - y'\|_E \\ (1-k)\|g(y) - g(y')\|_E &\leq \|y - y'\|_E \\ \|g(y) - g(y')\|_E &\leq \frac{1}{1-k}\|y - y'\|_E\end{aligned}$$

d'où g est une application $\frac{1}{1-k}$-Lipschitzienne, donc continue et on a

$$\Phi = g^{-1} : V \to B(b, (1-K)r)$$

est un homéomorphisme. ∎

Preuve Du théorème d'inversion locale (Théorème 2.5.3).

D'après le Lemme 2.5.7, l'application

$$\Phi = g^{-1} : V \to B(b, (1-K)r)$$

est un homéomorphisme différentiable de classe C^1 tel que

$$\begin{aligned} D\Phi = \left(D_a f\right)^{-1} \circ Df : V &\to B(b, (1-K)r) \\ x &\mapsto D_x\Phi = \left(D_a f\right)^{-1} \circ D_x f \end{aligned}$$

est une application continue, comme $D_a\Phi = \left(D_a f\right)^{-1} \circ D_a f = Id_E \in Isom(E,E)$ et $Isom(E,E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,E)$ alors il existe un ouvert $\widetilde{V}$ voisinage de a tels que $a \in \widetilde{V} \subset V$ et $D\Phi(\widetilde{V}) \subset Isom(E,E)$ (i.e. $\forall x \in \widetilde{V}\ D_x\Phi \in Isom(E,E)$).

D'après le Théorème 2.5.1, on déduit que $\Phi : \widetilde{V} \to \Phi(\widetilde{V})$ est un difféomorphisme de classe C^1.

Si on note $W = D_a f \circ \Phi(\widetilde{V})$, alors W est un ouvert de F et l'application

$$f = D_a f \circ \Phi : \widetilde{V} \to W$$

est un difféomorphisme de classe C^1. ∎

Corollaire 2.5.1. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach, $U \subset E$ un ouvert de E. Si $f : U \to F$ est une application injective de classe C^1 tel que*

$$\forall x \in U : \quad D_x f \in Isom(E,F)$$

Alors $f(U)$ est un ouvert de F et $f : U \to f(U)$ est un difféomorphisme de classe C^1.

Remarque 2.5.1. *Si $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces de Banach de dimensions finis et $f : U \to F$ est une application de classe C^1 telle que f est un difféomorphisme local en $x \in U$ (i.e. $D_x f \in Isom(E,F)$) alors $dim(E) = dim(F)$.*

Corollaire 2.5.2. [*Cas de dimensions finis*[*Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach de dimensions finis. Si $f : U \to F$ est une application de classe C^1, alors f est un difféморphisme locale en x si et seulement si*

$$det(M_x(f)) \neq 0$$

où $M_x(f)$ désigne une matrice associée à $D_x f$.

2.6 Téorème de Fonction implicite

Théorème 2.6.1. ***[Fonction implicite]***

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Banach et U un ouvert de $E \times F$. Soient $(a,b) \in U$ et $f : U \to G$ une application de classe C^1 telle que $f((a,b)) = 0$. Si $\frac{\partial f}{\partial y}((a,b)) : F \to G$ est un isomorphisme linéaire (i.e $\frac{\partial f}{\partial y}((a,b)) \in Isom(F,G)$), alors il existe $V \subseteq U$ ouvert de $E \times F$ voisinage de (a,b), $W \subseteq E$ ouvert voisinage de a et $g : W \to F$ une application de classe C^1 tels que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$(x,y) \in V$ et $f((x,y)) = 0$*
2. *$x \in W$ et $y = g(x)$*

i.e.

$$\Big((x,y) \in V,\ f((x,y)) = 0\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in W,\ y = g(x)\Big)$$

Preuve Si on pose

$$\begin{array}{rcl} \psi : U & \to= & E \times G \\ (x,y) & \mapsto & \psi((x,y)) = (x, f((x,y))) \end{array}$$

alors ψ est une application de classe C^1 telle que $\psi((a,b)) = (a,0)$ et

$$D_{(a,b)}\psi = \begin{pmatrix} Id_E & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}((a,b)) & \frac{\partial f}{\partial y}((a,b)) \end{pmatrix} \in Isom(E \times F, E \times G$$

est un isomorphisme linéaire d'inverse

$$\Big(D_{(a,b)}\psi\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} Id_E & 0 \\ -\Big(\frac{\partial f}{\partial y}((a,b))\Big)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}((a,b)) & \Big(\frac{\partial f}{\partial y}((a,b))\Big)^{-1} \end{pmatrix}$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe $V \subset E \times F$ voisinage de (a,b), $W_1 \subset E$ voisinage de a et $W_2 \subset G$ voisinage de 0 tels que

$$\begin{array}{rcl} \psi : V \subset E \times F & \to & W_1 \times W_2 \subset E \times G \\ (x,y) & \mapsto & (x, f(x,y)) \end{array}$$

est un difféomorphisme de classe C^1. Si

$$\begin{array}{rcl} \psi^{-1} : W_1 \times W_2 & \to & V \\ (x,z) & \mapsto & \psi^{-1}((x,z)) = (\psi_1((x,z)), \psi_2((x,z))) = (x, \psi_2((x,z))) \end{array}$$

désigne l'application inverse de ψ, alors

$$\begin{array}{rcl} g : W_1 & \to & F \\ x & \mapsto & g(x) = \psi_2((x,0)) \end{array}$$

est une application de classe C^1. Si $(x,y) \in V$ tel que $f((x,y)) = 0$, alors $x = \psi_1((x,y)) \in W_1$ et on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \psi_2((x,0)) \\ &= \psi_2((x, f((x,y))) \\ &= \psi_2(\psi((x,y))) \\ &= P_2 \circ \psi^{-1} \circ \psi((x,y)) \\ &= P_2((x,y)) \\ &= y \end{aligned}$$

où $P_2 : (x,y) \in E \times F \to P_2((x,y)) = y \in F$, désigne la deuxième projection.

Inversement, si $x \in W_1$ et $y = g(x)$, alors

$$(x,y) = (x, g(x)) = (x, \psi_2((x,0)) = \psi^{-1}((x,0)) \in V$$

et on a

$$\begin{aligned} (x, f((x,y)) &= (x, f(\psi^{-1}(x,0))) \\ &= (x, f(x, \psi_2(x,0))) \\ &= \psi((x, \psi_2(x,0))) \\ &= \psi \circ \psi^{-1}((x,0)) \\ &= (x,0) \end{aligned}$$

d'où $f((x,y)) = 0$.

Remarque 2.6.1. ***(Unicité de la solution)***

Si W_1 est un ouvert connexe et $h : W_1 \to F$ une application continue telle que

$$\begin{cases} h(a) = b & \\ (x, h(x)) \in U & , \quad \forall x \in W_1 \\ f(x, h(x)) = 0 & , \quad \forall x \in W_1 \end{cases}$$

alors $h = g$. En effet, si on désigne par

$$A = \{x \in\in W_1; \quad h(x) = g(x)\}$$

alors A est un ensemble férmé et on a

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow h(x) = g(x) \\ &\Rightarrow (x, h(x)) = (x, g(x)) \in V \end{aligned}$$

comme V est un ouvert il existe deux ouverts $V_1 \subset E$ et $V_2 \subset F$ tels que $(x, h(x)) \in V_1 \times V_2 \subset V$. De la continuité de l'application h, on déduit l'existance d'ouvert $\overline{W_1} \subset W_1 \cap V_1$ voisinage de x tel que :

1. $h(\overline{W_1}) \subset V_2$

2. $z \in \overline{W_1}, \quad (z, h(z)) \in V_1 \times V_2 \subset V$

donc pour tout $z \in \overline{W_1}$ *on a :*

- $f(z, h(z)) = 0$
- $\psi(z, h(z)) = (z, f(z, h(z))) = (z, 0) = (z, f((z, g(z)) = \psi(z, g(z))$

Comme ψ *et bijective on déduit que*

$$h(z) = g(z), \quad \forall z \in \overline{W_1}$$

donc $\overline{W_1} \subset A$*, ce qui montre que* A *est un ouvert. De la conéxité de* A *on conclu que* $h = g$*.*

$\blacksquare$

Chapitre 3

Théorème du Rang

Définition 3.0.1. [***Rang d'une Application***] *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $f : U \subset E \to F$ *une application de classe* C^1. *Si* $Im(D_x f) = \{D_x f(h); \quad h \in E\}$ *est un espace vectoriel de dimension fini, on dit alors que* f *est de rang fini en* x *et on note*

$$rang_x(f) = dim(Im(D_x f))$$

Remarque 3.0.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $f : U \subset E \to F$ *une application de classe* C^1. *Si* E *est de dimension fini, alors*

$$dim(E) = dim(Ker(D_x f)) + dim(Im(D_x f))$$

d'où

$$rang_x(f) = dim(Im(D_x f)) = dim(E) - dim(Ker(D_x f))$$

Remarque 3.0.2. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach de dimensions finis et* $f : U \subset E \to F$ *une application de classe* C^1. *Si* f *est de rang* p *en* $x \in U$, *alors il existe* $\{e_1, ..., e_n\}$ *une base de* E *et* $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_m\}$ *une base de* F *telles que* $\{D_x f(e_1), ..., D_x f(e_p)\}$ *est une base de* $Im(D_x f)$ *et* $\{e_{p+1}, ..., e_n\}$ *est une base* $Ker(D_x f)$. *Relativement à ces deux base la matrice* $M_x(f)$ *associée à* $D_x f$ *est donée par*

$$M_x(f) = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & 0.. & 0 \\ \vdots & ... & .\vdots & 0.. & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0.. & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0.. & 0 \\ \vdots & ... & \vdots & 0.. & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0.. & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{bmatrix} 1 & ... & 0 \\ \vdots & ... & .\vdots \\ 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

est une sous matrice carrée d'ordre p. On déduit que le rang de f en x est l'ordre (rang) de la plus grande sous matrice inversible de $M_x(f)$.

Définition 3.0.2. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^1. On dit que f est une immersion en $x \in U$ si $D_x f : E \to F$ est une application injective (i.e $Ker(D_x f) = \{0\}$).*

f est dite immersion sur U si elle est immersion en tout point $x \in U$.

Définition 3.0.3. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^1. On dit que f est une submersion en $x \in U$ si $D_x f : E \to F$ est une application surjective (i.e $Im(D_x f) = F$).*

f est dite submersion sur U si elle est submersion en tout point $x \in U$.

Remarque 3.0.3. *Si E et F sont de dimensions finis alors d'après la remarque 3.0.1, on a*

1. *f est une immersion en x si et seulement si $rang_x(f) = dim(E)$*
2. *f est une submersion en x si et seulement si $rang_x(f) = dim(F)$*

Remarques 3.0.1. [***Cas Réel.***]

Soient $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et

$$\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) \end{array}$$

alors

1. *f est une immersion en x si et seulement si $rang_x(f) = n$*
2. *f est une submersion en x si et seulement si $rang_x(f) = m$*
3. *f est de rang p en x si et seulement si il existe $\{i_1, ..., i_p\} \subseteq \{1, .., n\}$ et $\{j_1, ..., j_p\} \subseteq \{1, .., m\}$ tels que :*

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_p}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

et, $\forall i = 1, .., n$, $\forall j = 1, .., m$

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_p}} & \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_p}} & \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_p}} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple 3.0.1. *Si* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable, alors*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & f(x) = (x, g(x)) \end{array}$$

est une immersion sur $\mathbb{R}$ *(*$D_x f = (1, g'(x)) \neq (0,0)$*).*

Exemple 3.0.2.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & f(x) = (\cos(x), \sin(x)) \end{array}$$

est une immersion sur $\mathbb{R}$ *(*$D_x f = (-\sin(x), \cos(x)) \neq (0,0)$*).*

Exemple 3.0.3. *Si* $n \leq m$ *alors*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \end{array}$$

est une immersion sur $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 3.0.4.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = -1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{array}$$

est une submersion sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$*.*

Exemple 3.0.5. *Si* $m \leq n$ *alors*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_m, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = (x_1, ..., x_m) \end{array}$$

est une submersion sur $\mathbb{R}^n$*.*

3.1 Théorème de Caractérisation d'une Submersion.

Théorème 3.1.1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (de classe C^1, $m \leq n$) une submersion en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors il existe un ouvert $V \subset U$ ouvert vosinage de x_0, W un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g : V \to W$ un difféomorphisme tels que :*

$$\begin{array}{rcl} f \circ g^{-1} : W & \to & \mathbb{R}^m \\ y = (y_1, ..., y_m, ..., y_n) & \mapsto & (y_1, ..., y_m) \end{array}$$

est une projection canonique, i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} f : V & \to & \mathbb{R}^m \\ g : \Big\downarrow & \nearrow & \\ W & & \end{array}$$

est commutatif.

Preuve On a

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & (f_1(x), ..., f_m(x)) \end{array}$$

est une submersion en x_0 (i.e. $rang_{x_0} f = m$).

A des permutations près (voir Remarques 3.0.1) on peut supposer que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}_{(x_0)} \neq 0.$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} h : U & \to & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, ..., x_m, ..., x_n) & \mapsto & (f_1(x), ..., f_m(x), x_{m+1}, ..., x_n) \end{array}$$

alors

$$D_{x_0} h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(x_0)} .$$

$$det(D_{x_0}h) = det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}_{(x_0)} \neq 0.$$

Du théorème d'inversion locale (Théorème 2.5.3), on déduit l'existence d'un ouvert $V \subset U$ vosinage de x_0 et un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ voisivage de $h(x_0)$ tels que $h : V \to W$ est un difféomorphisme. Si $x \in V$ et $y \in W$ tel que $y = h(x)$ alors

$$y = (y_1, ..., y_m, ..., y_n) \quad = \quad h(x) = (f_1(x), ..., f_m(x), x_{m+1}, ..., x_n)$$

d'où

$$y_i = f_i(x); \quad \forall\, i = 1, ..., m.$$

Si on pose $g = h : V \to W$ alors

$$f \circ g^{-1}(y) = f(g^{-1}(y)) = f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) = (y_1, ..., y_m)$$

est une projection canonique sur $\mathbb{R}^m$. ∎

Remarque 3.1.1. *Toute submersion est localement surjective.*

Applications :

Exemple 3.1.1. *Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x, y) = xe^y \in \mathbb{R}$. Définir un difféomorphisme $g : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to W \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $f \circ g^{-1}$ est une projection canonique sur $\mathbb{R}$.*

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D_{(x,y)}f = (e^y, xe^y)($$

est une application linéaire de rang 1 ($e^y \neq 0; \quad \forall y \in \mathbb{R}$). On définit une extension de f sur $\mathbb{R}$ par l'application :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (f(x, y), y) = (xe^y, y) \end{array}$$

alors

$$D_{(x,y)}g = \begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y)}g) = e^y \neq 0$$

de plus g est injective, d'après le théorème d'inversion locale (Corollaire 2.5.1) on déduit que g est un difféomorphisme globale et on a

$$\begin{array}{rcl} g^{-1} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xe^{-y}, y) \end{array}$$

d'où $f \circ g^{-1}((x,y)) = f((xe^{-y}, y)) = x$, $f \circ g^{-1}$ est une projection sur $\mathbb{R}$.

Remarque : *Le choix de l'application g n'est pas unique, en général on choisis $g = (f, h)$ tel que*

$$det \begin{vmatrix} e^y & xe^y \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = e^y \frac{\partial h}{\partial y} - xe^y \frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$$

Il suffit donc de choisir h tel que $\frac{\partial h}{\partial y} \neq x \frac{\partial h}{\partial x}$.

Exemple 3.1.2. *Même question pour l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, z\sin(y)) \end{array}$$

On a

$$D_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z\cos(y) & \sin(y) \end{pmatrix}$$

On distingue les cas suivants :

1. *Si $z = 0$ et $y = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, alors $rang_{(x,y,z)}f = 1$ donc f n'est pas une submersion.*
2. *Si $y \neq k\pi$, alors*

$$det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin(y) \end{vmatrix} = \sin(y) \neq 0$$

On définit une extension de f par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y, z\sin(y)) \end{array}$$

et on a

$$D_{(x,y,z)}g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & z\cos(y) & \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y,z)}g) = -\sin(y) \neq 0$$

donc g est un difféomorphisme locale tel que localement on a $g^{-1}(x,y,z) = (x, y, \frac{z}{sin(y)}$ et $f \circ g^{-1}(x,y,z) = (x,z)$.

3. *Si $z \neq 0$ et $y \neq \frac{2k+1}{2}\pi$ alors*

$$det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z\cos(y) \end{vmatrix} = z\cos(y) \neq 0$$

On définit une extension de f par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, z\sin(y), z) \end{array}$$

et on a

$$D_{(x,y,z)}g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z\cos(y) & \sin(y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y,z)}g) = z\cos(y) \neq 0$$

donc g est un difféomorphisme locale tel que localement au voisinage de (x,y,z), on a $g^{-1}(x,y,z) = (x, \arcsin(\frac{y}{z}), z$ et $f \circ g^{-1}(x,y,z) = (x,y)$.

remarque : *le choix du voisinage de (x,y,z) est conditionner par le domaine de définition de la fonction $\arcsin(\frac{y}{z})$.*

3.2 Théorème de Caractérisation d'une Immersion.

Théorème 3.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ (de classe C^1, $n \leq m$) une immersion en $x_0 \in U$, alors il existe un ouvert $V \subset U$ ouvert vosinage de x_0, W' un ouvert de $\mathbb{R}^m$ voisinage de $f(x_0)$, W un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g : W \to W'$ un difféomorphisme tels que :*

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : V & \to & W \subset \mathbb{R}^m \\ y = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & (x_1, ..., x_n, 0..., 0) \end{array}$$

est une injection canonique, i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \to & W' \\ & \searrow & \downarrow g \\ & & W \end{array}$$

est commutatif.

Preuve On a

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & (f_1(x), ...f_n(x), ..., f_m(x)) \end{array}$$

est une immersion en x_0 (i.e. $rang_{x_0} f = n$).

A des permutations près (voir Remarques 3.0.1) on peut supposer que

$$det \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right|_{(x_0)} \neq 0.$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} h : U \times \mathbb{R}^{m-n} & \to & \mathbb{R}^m \\ \overline{x} = (x_1, ..., x_n, ..., x_m) & \mapsto & (f_1(x), ..., f_n(x), f_{n+1}(x) + x_{n+1}, ..., f_m(x) + x_m) \end{array}$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$.

Alors $\overline{x}_0 = (x_0, 0)$, $\quad h(\overline{x}_0) = h((x_0, 0)) = f(x_0)$ et on a

$$D_{(x_0,0)} h = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]_{(x_0,0)} .$$

$$det(D_{(x_0,0)}h) = det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}_{x_0} \neq 0.$$

Du théorème d'inversion locale (Théorème 2.5.3), on déduit l'existence d'un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ vosinage de $\overline{x}_0$ et un ouvert $W' \subset \mathbb{R}^m$ voisivage de $h(\overline{x}_0)$ tels que $h : W \to W'$ est un difféomorphisme. Si on note $g = h^{-1} : W' \to W$, alors

$$g^{-1}((x,0)) = h((x,0)) = (f_1(x), ..., f_m(x), f_{n+1}(x), ..., f_m(x)) = f(x)$$

d'où

$$g \circ f(x) = (x,0) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0), \quad \forall x \in V = f^{-1}(W')$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W' \\ & \searrow & h \Big\uparrow \Big\downarrow g \\ & & W \end{array}$$

∎

Remarque 3.2.1. *Toute immersion est localement injective.*

Applications :

Exemple 3.2.1. *Soit $f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (x, e^x) \in \mathbb{R}^2$. Définir un difféomorphisme $g : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to W \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $g \circ f$ est une injection canonique sur $\mathbb{R}^2$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$D_x f = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}$$

est une application linéaire de rang 1, donc f est une immersion sur $\mathbb{R}$. On définit une extension de f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, e^x + y) \end{array}$$

alors

$$D_{(x,y)}h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(D_{(x,y)}h) = 1 \neq 0$$

de plus g est injective, d'après le théorème d'inversion locale (Corollaire 2.5.1) on déduit que h est un difféomorphisme globale et on a

$$\begin{array}{rcl} h^{-1} : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y - e^x) \end{array}$$

Si on pose $g = h^{-1}$ alors $g \circ f(x) = g(x, e^x) = (x, 0)$, $f \circ g^{-1}$ est une injection dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque : *La fonction g n'est pas unique, on peut choisir une fonction h sous la forme*

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (f_1(x), f_2(x) + y.k(x)) = (x, e^x + y.k(x)) \end{array}$$

tel que $k(x) \neq 0$. Dans ce cas on a :

$$det(D_{(x,y)}H = det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ e^x + y.k'(x) & k(x) \end{vmatrix} = k(x) \neq 0.$$

$$h(x,0) = g^{-1}(x,0) = (x, e^x) = (f_1(x), f_2(x)) = f(x)$$

d'où $g \circ f(x) = (x, 0)$.

3.3 Théorème du Rang Constant

Théorème 3.3.1. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable de classe C^1 et $p \leq \min(n,m)$. Si f est de rang p constant sur U (i.e. $\forall x \in U, \quad rang_x(f) = p$), alors pour tout $x_0 \in U$ Ils existent un ouvert $V \subset U$ voisinage de x_0, un ouvert W voisinage de $f(x_0)$, un difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(V) & \xrightarrow[\psi \circ f \circ \varphi^{-1}]{} & \psi(W) \end{array}$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}((y_1, ...y_p, y_{p+1}...., y_m)) = (y_1, ...y_p, 0...., 0)$$

Preuve On a $x = (x_1, ...x_p, x_{p+1}...., x_n)$, $\quad (f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), f_{p+1(x)}, ..., f_m(x))$ et

$$D_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x .$$

Comme $rang_x f = p$, à des permutations près (voir Remarques 3.0.1) on peut supposer que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(x_0)} \neq 0.$$

$\forall i = 1, ..., n$ et $\forall j = 1, ..., m$, on a

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_p} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \end{vmatrix}_{(x_0)} = 0.$$

En utilisant la continuité de l'application multilinéaire det (déterminant), on déduit l'existence d'un ouvert $\overline{V} \subset U$ voisinage de x_0 tel que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(x)} \neq 0. \qquad (\forall x \in \overline{V})$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \overline{V} & \to & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, ..., x_p, ..., x_n) & \mapsto & \varphi(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), x_{p+1}, ..., x_n) \end{array}$$

alors φ est une application différentiable de classe C^1, tel que :

$$D_x\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & . & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & . & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_x .$$

$$det(D_{x_0}\varphi) = det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{x_0} \neq 0.$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $\widetilde{V} \subset \overline{V}$ voisinage de x_0 tel que $\varphi : \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(\widetilde{V}) \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de classe C^1.

On remarque que si $y = (y_1, ..., y_p, ..., y_n) = \varphi(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), x_{p+1}, ..., x_n)$ alors

$$y_i = f_i(x), \qquad (\forall i = 1, ..., p).$$

Si on désigne par $h = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\widetilde{V}) \to \mathbb{R}^m$, alors pour $y = (y_1, ..., y_p, ..., y_n)$ on a

$$\begin{array}{rcl} h(y) & = & (h_1(y), ..., h_p(y), h_{p+1}(y), ..., h_m(y)) \\ & = & f \circ \varphi^{-1}(y) \\ & = & f(x) \\ & = & (f_1(x), ..., f_p(x), f_{p+1}(x), ..., f_m(x)) \\ & = & (y_1, ..., y_p, h_{p+1}(y), ..., h_m(y)) \end{array}$$

$$D_y h = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial hp+1}{\partial y_p} & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_{p+1}} & \dots & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_p} & \frac{\partial h_m}{\partial y_{p+1}} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_n} \end{bmatrix}_y .$$

Comme f est une application de rang p et φ est un difféomorphisme, on déduit que h est une application de rang p, par suite

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_{p+1}}(y) & \dots & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_n}(y) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_{p+1}}(y) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_n}(y) \end{bmatrix} = 0, \qquad (\forall y \in \varphi(\widetilde{V})).$$

(est une matrice nulle d'ordre $(m-p, n-p)$).

Ce qui montre que $h_{p+1}, ..., h_m$, sont des fonctions indépendantes des variables $(y_{p+1}, ..., y_n)$.

$$h_j(y) = h_j((y_1, ..., y_p)), \qquad p+1 \leq j \leq m.$$

Soient $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert voisinage de $f(x_0)$ tel que $x_0 \in f^{-1}(W) \subset \widetilde{V}$ et ψ une application définie par

$$\begin{array}{rcl} \psi : W & \to & \mathbb{R}^m \\ z = (z_1, ..., z_m) & \mapsto & ((z_1, ..., z_p, z_{p+1} - h_{p+1}(z), ..., z_m - h_m(z)). \end{array}$$

alors

$$D_y \psi = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_1} & \dots & -\frac{\partial hp+1}{\partial y_p} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & -\frac{\partial h_m}{\partial y_p} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_z .$$

donc ψ est un difféomorphisme locale, de plus ψ est injective, en effet, si $\psi(z) = \psi(z')$ alors

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & z'_1 \\ \vdots & & \\ z_p & = & z'_p \\ & & \\ z_{p+1} - h_{p+1}(z) & = & z'_{p+1} - h_{p+1}(z') = z'_{p+1} - h_{p+1}(z) \\ \vdots & & \\ z_m - h_m(z) & = & z'_m - h_m(z') = z'_m - h_m(z) \end{array}$$

d'où $z = z'$. Comme ψ est un difféomorphisme locale et une application injective sur W, alors d'après le théorème d'inversion locale (Coroolaire 2.5.1) ψ est un difféomorphisme sur W.

Si on note par $V = f^{-1}(W)$ alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi\circ f\circ\varphi^{-1} & \end{array}$$

et on a

$$\begin{array}{rcl} \psi\circ f\circ\varphi^{-1}((y_1,...y_p,y_{p+1}....,y_n)) & = & \psi((y_1,...y_p,h_{p+1}(y),....,h_m(y))) \\ & = & (y_1,...y_p,h_{p+1}(y)-h_{p+1}(y),....,h_m(y)-h_m(y)) \\ & = & (y_1,...y_p,0....,0). \end{array}$$

■

Remarque 3.3.1. *Si f est une submersion (resp. immersion), on retrouve le théorème de caractérisation d'une submersion (Théorème 3.1.1) (resp immersion (Théorème 3.2.1)).*

Chapitre 4

Sous Variétés de $\mathbb{R}^n$

.

4.1 Plongement

Définition 4.1.1. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1. f est dite plongement si*

1. *f est une immersion sur U.*
2. *f est injective.*

Remarque 4.1.1. *Si f est un plongement, alors d'après le théorème du rang constant, il existent un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$, un difféomorphisme $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que :*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$$

Définition 4.1.2. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1. f est dite plongement régulier si*

1. *f est une immersion sur U.*
2. *f est injective.*
3. *$f : U \to f(U)$ est un homéomorphisme.*

où $f(U)$ est muni de la topologie $\mathcal{T}(f(U))$ induite par celle de $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{T}(f(U)) = \{\theta \cap f(U); \quad \theta \texttt{ ouvert de } \mathbb{R}^m\}$$

Exemple 4.1.1.

$$\begin{array}{rcl} f:]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t),\sin(t)) \end{array}$$

f est un plongement régulier.

Exemple 4.1.2.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t),\sin(t)) \end{array}$$

f est une immersion non injective.

Exemple 4.1.3. *Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \quad x^2+y^2<1\}$*

$$\begin{array}{rcl} f:D & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{array}$$

f est un est un plongement régulier sur $S^2_+=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2+z^2=1; \quad z>0\}$.

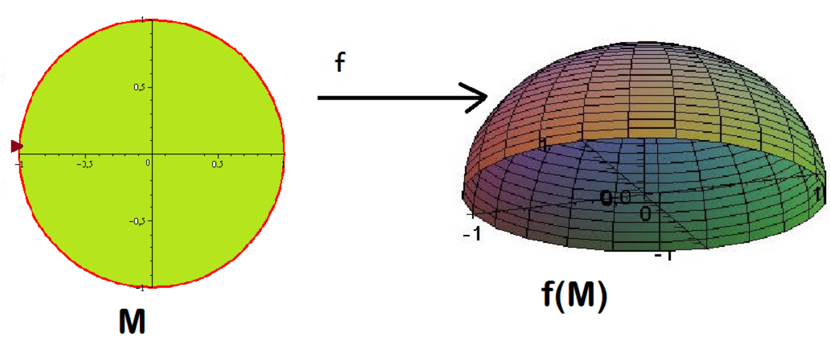

Figure 4.1 – Plongement régulier

Exemple 4.1.4. *Considérons géométriquement les courbes suivantes :*
a)

$$\begin{array}{rcl} f:]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & ((2cos(s)-1)sin(s),(2cos(s)-1)cos(s)) \end{array}$$

f est une immersion non injective $f(\frac{\pi}{3})=f(\frac{-\pi}{3})=(0,0)$.

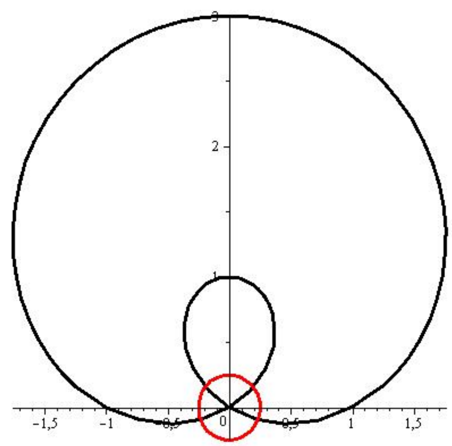

FIGURE 4.2 – Immersion non injective

b)

$$\begin{array}{rcl} f :]-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}[& \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & (10sin(3s)cos(s), 5sin(3s)sin(s)) \end{array}$$

f est un plongement non régulier (f n'est pas ouverte au voisinage de $f(0) = (0,0)$).

Remarque : *$f(]-\varepsilon, +\varepsilon[$ n'est pas un ouvert de $f(]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[)$ pour la topologie induite.*

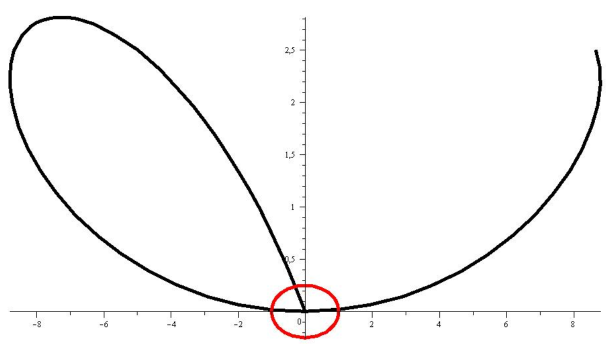

FIGURE 4.3 – Plongement non régulier

c)

$$\begin{array}{rcl} f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}[& \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & (sin(2s)cos(s), cos^2(s)) \end{array}$$

f est un plongement régulier.

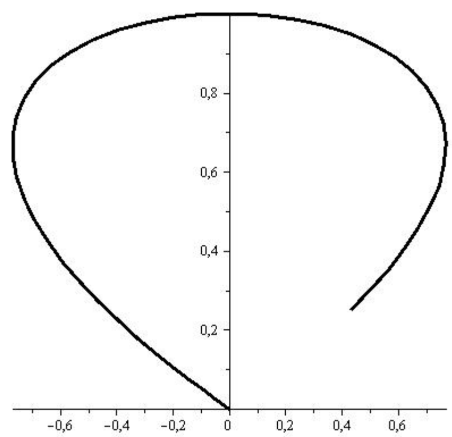

FIGURE 4.4 – Plongement régulier

4.2 Sous Variété

Définition 4.2.1. *Soient $M \subseteq \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}$ $(p \leq n)$. On dit que M est une sous variété de dimension p si pour tout $x_0 \in M$, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert voisinage de x_0, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & V \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \tag{4.1}$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big) \tag{4.2}$$

Remarque 4.2.1. *Dans la formule (4.2) on peut considérer une permutation des fonctions φ_i :*

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_{i_1}(x) = ... = \varphi_{i_{n-p}}(x) = 0\Big) \tag{4.3}$$

Exemple 4.2.1. *:*

$M = \mathbb{R}^p \equiv \mathbb{R}^p \times \{0\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p (ici $\varphi = Id$).

Exemple 4.2.2. *:*
$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z > 0\}$ est une sous variété de dimension 2. En effet, soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2+y^2 < 1\}$, $U = D \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : U & \rightarrow & U \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,y,z-\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{array}$$

On a $M \subset U$ et

$$D_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc f est un difféomorphisme de U, tels que

$$f(M) = D \times \{0\} \equiv D, \quad i.e. \quad ((x,y,z) \in M) \Leftrightarrow (f_3(x,y,z) = z - \sqrt{1-x^2-y^2} = 0).$$

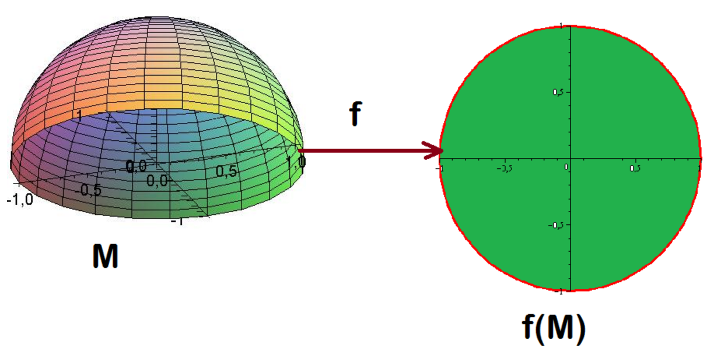

FIGURE 4.5 – Sous Variété

Exemple 4.2.3. *$M = \{(sin(2s)cos(s), cos^2(s)) \in \mathbb{R}^2; \quad s \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}[\}$ (voir figure 4.4). M est une sous variété de dimension 1.*

Exemple 4.2.4. $M = \{((2cos(s)-1)sin(s), (2cos(s)-1)cos(s)); \quad s \in]-\pi,\pi[\} \subset \mathbb{R}^2$ *(voir figure 4.2). M n'est pas une sous variété, au voisinage de* $(0,0)$ *pour tout difféomorphisme locale* $\varphi : U \to V$ *on a* $\varphi^{-1}(V\cap\mathbb{R}) \neq M\cap U$

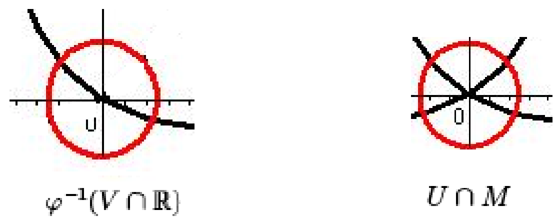

FIGURE 4.6 – M n'est pas une sous variété

Exemple 4.2.5. *:*

$M = \{(10sin(3s)cos(s), 5sin(3s)sin(s)); \quad s \in]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}[\} \subset \mathbb{R}^2$ *(voir figure 4.2). M n'est pas une sous variété, au voisinage de* $(0,0)$; $(s=0)$. *Pour tout difféomorphisme locale* $\varphi : U \to V$ *on a* $\varphi^{-1}(V\cap\mathbb{R}) \neq M\cap U$

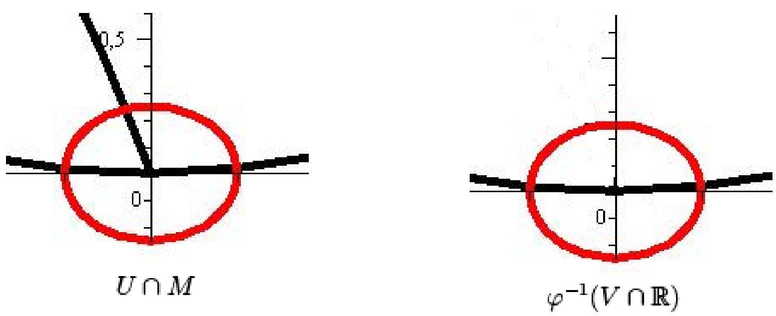

FIGURE 4.7 – M n'est pas une sous variété

Exemple 4.2.6. *Soit* $f : I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1. *La courbe*

$$M = \{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2; \quad x\in I\}$$

est une sous variété de dimension 1. *En effet, si on pose*

$$\begin{array}{rcl}\varphi : I\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y-f(x))\end{array}$$

alors φ est une application injective de classe C^1 telle que

$$D_{(x,y)}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f'(x) & 1 \end{pmatrix}$$

donc φ est un difféomorphisme de $U = I \times \mathbb{R}$ sur $\varphi(U)$ et on a :

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow \varphi_2((x, y)) = y - f(x) = 0$$

Exemple 4.2.7. *Dans le cas général, si $f : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction de classe C^1, alors la partie*

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{p+q}; \quad x \in V\}$$

est une sous variété de dimension p. En effet, si on pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V \times \mathbb{R}^q & \to & \mathbb{R}^{p+q} \\ (x, y) & \mapsto & (x, y - f(x)) \end{array}$$

alors φ est une application injective de classe C^1 telle que

$$D_{(x,y)}\varphi = \begin{pmatrix} Id_p & 0 \\ -D_x f & Id_q \end{pmatrix}$$

donc φ est un difféomorphisme de $U = V \times \mathbb{R}$ sur $\varphi(U)$ et on a :

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow (\varphi_{p+1}((x, y)), ..., \varphi_{p+q}((x, y))) = y - f(x) = 0$$

4.3 Equation Paramétrique d'une Sous Variété

Théorème 4.3.1. *Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p ($p \leq n$). Alors localement M est définie par un plongement régulier, i.e. pour tout $x_0 \in M$ il existe un ouvert $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ voisinage de 0, $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de x_0 et un plongement régulier $\psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(\widetilde{U}) = M \cap U$.*

Preuve D'après la définition 4.2.1, il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & V \\ y & \mapsto & (\varphi_1(y), ..., \varphi_n(y)) \end{array}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$:

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cong V \cap \mathbb{R}^p$$

Si on pose $\widetilde{U} = V \cap \mathbb{R}^p$,

$$\begin{array}{rcl} i : \widetilde{U} & \to & V \\ z = (z_1, ..., z_p) & \mapsto & i(z) = (z, 0, .., 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \psi = \varphi^{-1} \circ i : \widetilde{U} & \to & U \\ z = (z_1, ..., z_p) & \mapsto & \varphi^{-1}((z, 0, .., 0)). \end{array}$$

Alors ψ est une application de classe C^1, injective et ouverte sur M. Comme φ^{-1} est un difféomorphisme, alors

$$D_z\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\varphi^{-1})_1}{\partial_{z_1}} & \dots & \frac{\partial(\varphi^{-1})_1}{\partial_{z_p}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial(\varphi^{-1})_p}{\partial_{z_1}} & \dots & \frac{\partial(\varphi^{-1})_p}{\partial_{z_p}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial(\varphi^{-1})_n}{\partial_{z_1}} & \dots & \frac{\partial(\varphi^{-1})_n}{\partial_{z_p}} \end{bmatrix}_{(z,0)}$$

est une matrice de rang p (les colones sont linéarement indépendants). Donc ψ est une immersion par suite un plongement régulier et on a

$$\psi(\widetilde{U}) = \varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap M = U \cap M.$$

■

Remarque 4.3.1. *:*

1. *ψ est une composition d'une bijection φ^{-1} et une injection i, donc ψ est injective.*
2. *= Puis que $\psi(\widetilde{U}) = U \cap M$, alors ψ est une application ouverte sur M munie de la topologie induite.*

Théorème 4.3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1. Si f est un plongement régulier alors $M = f(U)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension n ($n \leq m$).*

$M = f(U)$ est dite sous variété définie par le parramétrage f .

Preuve f est une immersion, donc f est de rang constant égale à n sur U. D'après le théorème du rang constant (Théorème 3.3.1), pour $x_0 \in U$ ils existent un ouvert $V \subset U$ voisinage de x_0, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de $f(x_0)$, un difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi\circ f\circ\varphi^{-1} & \end{array}$$

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}((y_1,...y_p,y_{p+1}....,y_m)) = (y_1,...y_p,0....,0)$$

Comme f est un plongement régulier, alors $f(V) = f(U)\cap W$, $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme et

$$\begin{aligned}
(z\in f(V)) &\Leftrightarrow (\exists ! x\in V: \quad z = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \Big((\exists ! x\in V), (\exists ! y\in\varphi(V)): \quad x = \varphi^{-1}(y),\, z = f(x)\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((\exists ! y\in\varphi(V)),\, z = f(\varphi^{-1}(y))\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((\exists ! y\in\varphi(V)),\, \psi(z) = \psi(f(\varphi^{-1}(y)))\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((\exists ! y\in\varphi(V)),\, \psi(z) = \psi\circ f\circ\varphi^{-1}(y))\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big((\exists ! y\in\varphi(V)),\, \psi(z) = (y_1,....,y_n,0,...,0))\Big) \\
&\Leftrightarrow \Big(\psi_{n+1}(z) = ... = \psi_m(z) = 0.\Big)
\end{aligned}$$

■

Du Théorème 4.3.1 et le Théorème 4.3.2, on déduit le théorème suivant.

Théorème 4.3.3. *$M\subset\mathbb{R}^n$ une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p ($p\leq n$), si et seulement M est localement définie par un plongement régulier ouvert sur M muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.*

i.e. pour tout $x\in M$ il existe un ouvert $\widetilde{U}\subset\mathbb{R}^p$ voisinage de 0 et un plongement régulier $\psi:\widetilde{U}\to\mathbb{R}^n$ tel que $\psi(0) = x$, $\psi:\widetilde{U}\to M$ est une application ouverte pour la topologie induite sur M par celle de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas il existe , $U\subset\mathbb{R}^n$ voisinage de x tel que $\psi(\widetilde{U}) = U\cap M$. On dit alors que la sous variété M est définie localelement au voisinage de x par le paramétrage ψ.

Exemple 4.3.1. *Une droite dans le plan est une sous variété de dimension 1 définie par une immersion. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2_*$ et f une application définie par*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\to (at+c, bt+d) \end{aligned}$$

On a $D_{(x,y)}f = (a,b)^t \neq (0,0)^t$ *donc* f *est une immersion (plongement régulier) et* $M = f(\{\mathbb{R}\}) = \{t(a,b)+(c,d) \in \mathbb{R}^2; \quad t \in \mathbb{R}\}$ *est une sous variété de dimension* 1.

Dans le cas général on considère l'equation parametrique d'une droite M *dans l'espace affine* $\mathbb{R}^n$ *définie par le plongement régulier*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & ta+b \end{array}$$

où $a \in \mathbb{R}^n_*$, $b \in \mathbb{R}^n$ *et* $M = \{ta+b\,; \quad t \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 4.3.2. *Soit* $S^1 = \{((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\,; \quad t \in \mathbb{R}\}$ *le cercle de rayon* 1 *et de centre* $(0,0)$ *dans le plan affine* $\mathbb{R}^2$. *Alors* S^1 *est une sous variété de dimension* 1 *définie par le paramétrage*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & \Big((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\Big) \end{array}$$

Remarque : f est une immersion non injective (non un plongement) ce qui montre que la condition "plongement régulier" dans le Théorème 4.3.2 n'est pas nécessaire.

Exemple 4.3.3. *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval ouvert et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivablement continue. Alors* $M = \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\}$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^2$ *de dimension 2. En effet, si on note par*

$$\begin{array}{rcl} g:I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (t, f(t)) \end{array}$$

alors g *est une immersion injective, de plus si* K *et* J *sont des intervals ouverts tels que* $K \subset I$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} (K \times J) \cap M & = & (K \times J) \cap g(I) \\ & = & (K \times J) \cap \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\} \\ & = & \{(t, f(t))\,; \quad t \in K,\ f(t) \in J\} \\ & = & (K \times J) \cap g(K) \end{array}$$

ce qui montre que g *est une application ouverte sur* $g(I)$ *muni de sa topologie induite. Du Théorème 4.3.2 on déduit que* $M = g(I)$ *est une sous variété de dimension* 1.

Remarque : *Dans cet exemple on peut remplacer la fonction* $f : I \to \mathbb{R}^2$ *par la fonction* $f : I \to \mathbb{R}^n$.

Exemple 4.3.4. *(Equation paramétrique d'un plan dans l'espace)*

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ *tel que le système* $\{a, b\}$ *est linéairement indépendant. Alors* $M = \{sa + tb + d \in \mathbb{R}^n\,; \quad s, t \in \mathbb{R}\}$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* 2*. En effet il suffit de considérer le plongement régulier*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^n \\ (s,t) & \to & as + bt + d \end{array}$$

Exemple 4.3.5. *Soient* $I \subset \mathbb{R}^p$ *un ouvert connexe et* $f : I \to \mathbb{R}^m$ *une application de classe* C^1*. Alors* $M = \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\}$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^{p+m}$ *de dimension* p*. En effet, si on note par*

$$\begin{array}{rcl} g : I \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^{p+m} \\ t & \to & (t, f(t)) \end{array}$$

alors g *est une immersion injective, de plus si* $K \subset \mathbb{R}^p$ *et* $J \subset \mathbb{R}^m$ *sont des ouverts tels que* $K \subset I$*, alors*

$$\begin{array}{rcl} (K \times J) \cap M & = & (K \times J) \cap g(I) \\ & = & (K \times J) \cap \{(t, f(t))\,; \quad t \in I\} \\ & = & \{(t, f(t))\,; \quad t \in K,\ f(t) \in J\} \\ & = & (K \times J) \cap g(K) \end{array}$$

ce qui montre que g *est une application ouverte sur* $g(I)$ *muni de sa topologie induite. Du Théorème 4.3.2 on déduit que* $M = g(I)$ *est une sous variété de dimension* 1*.*

4.4 Sous Variété à Bord

Définition 4.4.1. *Soient* $M \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $p \in \mathbb{N}$ $(p \leq n)$ *et Soit* $H_+^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p,\ x_p \geq 0\}$*. On dit que* M *est une sous variété à bord de dimension* p *si pour tout* $x_0 \in M$*, il existe* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *voisinage de* x_0*,* V *un ouvert voisinage de* 0 *dans de* $\mathbb{R}^n$ *et un difféomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & V \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$ *et*

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (H_+^p \times \{0\}) \tag{4.4}$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_p(x) \geq 0,\ \varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big)$$

Le bord de la sous variété M est le sous ensemble ∂M tel que

$$\varphi(U \cap \partial M) = V \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\})$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap \partial M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_p(x) = \varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big)$$

L'Intérieur de la sous variété M est l'ensemble $Int(M) = M - \partial M$.

Remarques 4.4.1. *On a :*

1) $M = \cup_\varphi(\varphi^{-1}(V \cap (H_+^p \times \{0\}))$.

2) $\partial M = \cup_\varphi(\varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}))$.

3) ∂M est une sous variété de dimension $p-1$.

4) L'intérieur $Int(M)$ ne signifie pas l'intérieur topologique (si $p < n$, alors $M^0 = \varnothing$).

5) Si $p = n$ alors $Int(M)$ est un ouvert topologique et ∂M est un fermé topologique.

Du Théorème 4.3.3, on la définition équivalente suivante :

Définition 4.4.2. *Soit $H_+^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p,\ x_p \geq 0\}$. Un ensemble $M \subseteq \mathbb{R}$ est dit sous variété variété à bord de dimension p si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $\widetilde{U} \subset H_+^p$ voisinage de 0 et un plongement régulier $\psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(0) = x$, $\psi : \widetilde{U} \to M$ est une application ouverte pour la topologie induite sur M par celle de $\mathbb{R}^n$.*

Dans ce cas il existe , $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de x tel que $\psi(\widetilde{U}) = U \cap M$. On dit que ψ est une parametrisation locale de la sous variété à bord M.

Le bord de la sous variété M est l'ensemble :

$$\partial M = \{\psi((x_1, ..., x_{p-1}, 0),\ \psi\ \texttt{est une paramétrisation locale}\}.$$

L'intérieur de la sous-variété M est définit par

$$Int(M) = M - \partial M.$$

Exemple 4.4.1. $H_+^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p,\ x_p \geq 0\}$ *est une sous variété à bord de dimension* p.

1) En utilisant la Définition 4.4.1 alors $p = n$, $U = V = \mathbb{R}^p$ *et* $\varphi = Id_{\mathbb{R}^p}$.

2) En utilisant la Définition 4.4.2, alors la paramétrisation n'est autre que l'injection canonique à un difféomorphisme près

$$\begin{array}{rcl} \psi : H_+^p & \to & \mathbb{R}^p \\ (x_1, ..., x_p) & \mapsto & (x_1, ..., x_p) \end{array}$$

et on a

$$\partial H_+^p = \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}.$$

Exemple 4.4.2. *La boule fermé* $B = \{(x_0, ..., x_p) \in \mathbb{R}^{p+1},\ \Sigma_i x_i^2 \leq 1\}$ *est une sous variété de dimension* $p+1$ *et de bord* $\partial B = S^p = \{(x_0, ..., x_p) \in \mathbb{R}^{p+1},\ \Sigma_i x_i^2 = 1\}$.

Si $x_p \geq 0$, *on prend*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_+ : \mathbb{R}^{p+1} & \to & H_+^{p+1} \\ (x_0, ..., x_p) & \mapsto & \left(x_0, ..., -x_p + \sqrt{1 - \Sigma_{i=0}^{p-1} x_i^2}\right). \end{array}$$

Si $x_p \leq 0$, *on prend*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_- : \mathbb{R}^{p+1} & \to & H_+^{p+1} \\ (x_0, ..., x_p) & \mapsto & \left(x_0, ..., x_p - \sqrt{1 - \Sigma_{i=0}^{p-1} x_i^2}\right). \end{array}$$

On a

$$B = \varphi_+^{-1}(H_+^{p+1}) \cup \varphi_-^{-1}(H_+^{p+1})$$

$$\partial B = \varphi_+^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cup \varphi_-^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Exemple 4.4.3. *La demi sphère* $S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$ *est une sous-variété à bord de dimension 2 de bord*

$$\partial S^2_+ = S^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=1\}.$$

Soient :

1) $U_y^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+z^2<1,\ y>0\}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^+ : U_y^+ & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \Big(x,z,y-\sqrt{1-x^2-z^2}\Big). \end{array}$$

φ_y^+ *est un difféomorphisme de* U_y^+ *sur* $V = \varphi(U_y^+)$.

$$(\varphi_y^+)^{-1}(V \cap H^2_+ \times \{0\}) = U_y^+ \cap S^2_+$$

$$(\varphi_y^+)^{-1}(V \cap \mathbb{R} \times \{(0,0)\} = U_y^+ \cap S^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=1,\ y>0\}$$

2) $U_y^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+z^2<1,\ y<0\}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^- : U_y^- & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \Big(x,z,y+\sqrt{1-x^2-z^2}\Big). \end{array}$$

φ_y^- *est un difféomorphisme de* U_y^- *sur* $V = \varphi(U_y^-)$.

$$(\varphi_y^-)^{-1}(V \cap H^2_+ \times \{0\}) = U_y^- \cap S^2_+$$

$$(\varphi_y^-)^{-1}(V \cap \mathbb{R} \times \{(0,0)\} = U_y^- \cap S^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=1,\ y<0\}$$

3) On construit de la même manière les couples (U_x^+, φ_x^+) *et* (U_x^-, φ_x^-).

Exemple 4.4.4. *Le cylindre*

$$C = S^1 \times [0,1] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2=1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

est une sous-variété à bord de dimension 2 et de bord

$$\partial C = S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\}$$

4.5 Equation Cartésienne d'une Sous Variété

Théorème 4.5.1. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p ($p \leq n$), alors pour tout $x_0 \in M$, il existent un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de x_0 et une submersion $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$.*

On dit alors que M est une sous variété définie localement par l'équation $f = 0$.

Preuve D'après la définition d'une sous variété (Définition 4.2.1), il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & V \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

i.e.

$$\Big(x \in U \cap M\Big) \Leftrightarrow \quad \Big(\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0\Big) \tag{4.5}$$

Si on note par f l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & \mathbb{R}^{n-p} \\ x & \mapsto & (\varphi_{p+1}(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$$

alors

$$D_x\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x$$

est une matrice inversible, donc toutes les lignes sont linéairement indépendants, par suite la matrice

$$D_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_x$$

est de rang $n-p$. Donc f est une submersion, d'apès l'éqution (4.5) on déduit que $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$.

■

Théorème 4.5.2. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion ($m \leq n$) tel que $0 \in f(U)$. Alors $M = f^{-1}(\{0\})$ est une sou variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p = n - m$.*

Remarque 4.5.1. *En général si $z \in f(U)$ alors $f^{-1}(\{z\})$ est une sou variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p = n - m$.*

Preuve f est une submersion, donc f est de rang constant égale à m sur U. D'après le théorème du rang constant (Théorème 3.3.1), pour $x_0 \in M \subseteq U$ ils existent un ouvert $V \subset U$ voisinage de x_0, un ouvert $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de $f(x_0)(= 0)$, un difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ tels que $\psi(0) = 0$ et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} & \end{array}$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}((y_1, ...y_m, y_{m+1} ...., y_n)) = (y_1, ...y_m)$$

Soient $x \in V \cap M$ et $y \in \varphi(V)$ tel que

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &= (y1, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n) \\ &= (\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), ...\varphi_n(x)) \end{aligned}$$

Comme $f(x) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(y) &= (y1, ..., y_m) \\ &= (\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)) \\ &= \psi \circ f(x) \\ &= \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

d'où

$$(x \in V \cap M) \Leftrightarrow \varphi_1(x) = ... = \varphi_m(x) = 0.$$

■

Remarque 4.5.2. *La démonstration du Théorème 4.5.2 découle aussi directement du théorème des fonctions implicites. En effet, f est de rang m à des permutation près on peut supposer*

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

où $p = n - m$. Donc

$$\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^p \\ x = (y, z) & \mapsto & f(y, z) \end{array}$$

est une application de classe C^1 tel que $\frac{\partial f}{\partial z} \in Isom(\mathbb{R}^p)$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existent $V \subset U \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ voisinage de $x_0 = (y_0, z_{0)}$, $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de y_0 et $g : W \to \mathbb{R}^p$, tels que

$$[(y, z) \in V,\ f(y, z) = 0] \Leftrightarrow [y \in W,\ z = g(y)]$$

i.e.

$$[(y, z) \in V \cap M] \Leftrightarrow [y \in W,\ z = g(y)]$$

Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : W \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \\ x = (y, z) & \mapsto & (y, z - g(y)) \end{array}$$

on a :

$$D_x\varphi = \begin{pmatrix} Id_m & 0 \\ D_y g & Id_p \end{pmatrix}$$

Donc φ est un difféomorphisme tel que :

$$[x = (y, z) \in V \cap M] \Leftrightarrow [\varphi_2(x) = z - g(y) = 0].$$

Exemple 4.5.1. *Une droite dans le plan est une sous variété de dimension 1 définie par une submersion. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2_*$ et f une application définie par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & ax + by + c \end{array}$$

On a $D_{(x,y)}f = (a,b) \neq (0,0)$ *donc* f *est une submersion et*

$$M = f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad ax + by + c = 0\}$$

est une sous variété de dimension 1.

Exemple 4.5.2. *Le plan affine de* $\mathbb{R}^3$ *est une sous variété de dimension* 2 *définie par la submersion*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & ax + by + cz + d \end{array}$$

où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Exemple 4.5.3. *La sphère est une sous variété de dimension* 2 *définie par la submersion*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3_* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array}$$

On a $D_{(x,y)}f = (2x,2y,2z) \neq (0,0,0)$ *donc* f *est une submersion et* $S^2 = f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *est une sous variété de dimension* 2.

4.6 Espace tangent à une sous variété

Lemme 4.6.1. *Si* $x \in \mathbb{R}^n$ *alors l'ensemble* $\{x\} \times \mathbb{R}^n = \{(x,u), \quad u \in \mathbb{R}^n\}$ *muni des lois suivantes :*

$$(x,u) + (x,v) = (x, u+v); \quad \lambda(x,u) = (x, \lambda u)$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ *isomorphe à* $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rcl} L : (\mathbb{R}^n, +, .) & \to & (\{x\} \times \mathbb{R}^n, +, .) \\ u & \mapsto & (x,u) \end{array}$$

est un isomorphisme linéaire. En note alors

$$\mathbb{R}^n \equiv \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

Définition 4.6.1. *Soient M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $x_0 \in M$. Un vecteur $(x_0, u) \in \{x_0\} \times \mathbb{R}^n$ (ou tout simplement $u \in \mathbb{R}^n$) est dit tangent à la sous variété M en x_0 si et seulement si, il existe un interval I voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ et une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tels que :*

$$x_0 = \gamma(0) \quad et \quad u = \gamma'(0)$$

Lemme 4.6.2. *L'ensemble des vecteurs tangent à une sous variété $M \subset \mathbb{R}^n$ en un point $x_0 \in M$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs tangent à M en x_0 définis par les courbes $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$. D'après la définition d'une sous variété (Définition 4.2.1), il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, V un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$(x \in U \cap M) \Leftrightarrow (\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0)$$

1) Soit $I \subset I_1 \cap I_2$ un intreval voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(\gamma_1(t)) + \varphi(\gamma_2(t)) \in V; \quad \forall t \in I$$

Si on note par γ la courbe sur M définie par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\varphi(\gamma_1(t)) + \varphi(\gamma_2(t))\Big) \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma(0) & = & \varphi^{-1}(0) = x_0 \\ \gamma'(0) & = & D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(\gamma_1'(0)) + D_{x_0}\varphi(\gamma_2'(0))\Big) \\ & = & D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(u) + D_{x_0}\varphi(v)\Big) \\ & = & D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(u+v)\Big) \\ & = & u + v. \end{array}$$

De plus pour tout $t \in I$ on a :

$$\varphi_{p+1}(\gamma_1(t)) + \varphi_{p+1}(\gamma_2(t)) = ... = \varphi_n(\gamma_1(t)) + \varphi_n(\gamma_2(t)) = 0$$

donc

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\varphi(\gamma_1(t)) + \varphi(\gamma_2(t))\Big) \in M; \qquad \forall t \in I$$

2) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $I \subset I_1 \cap I_2$ un intreval voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda\varphi(\gamma_1(t)) \in V; \quad \forall t \in I$$

Si on note par γ la courbe sur M définie par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : I & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\lambda\varphi(\gamma_1(t))\Big) \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma(0) & = & \varphi^{-1}(0) = x_0 \\ \gamma'(0) & = & D_0\varphi^{-1}\Big(\lambda D_{x_0}(\varphi(\gamma_1'(0)))\Big) \\ & = & D_0\varphi^{-1}\Big(\lambda D_{x_0}\varphi(u))\Big) \\ & = & \lambda D_0\varphi^{-1}\Big(D_{x_0}\varphi(u)\Big) \\ & = & \lambda u. \end{array}$$

De plus pour tout $t \in I$ on a :

$$\lambda\varphi_{p+1}(\gamma_1(t)) = ... = \lambda\varphi_n(\gamma_1(t)) = 0$$

donc

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\Big(\lambda\varphi(\gamma_1(t))\Big) \in M; \qquad \forall t \in I$$

■

Notation 4.6.1. *On note par $T_{x_0}M$ l'esapce vectoriel des vecteurs tangent à la sous variété M en x_0,*

$$T_{x_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n,\ \exists\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to \mathbb{R}^n\ C^1 :\ \gamma(]-\varepsilon, +\varepsilon[) \subset M,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma'(0) = v\}$$

Remarque 4.6.1. *Si $v \in T_{x_0}M$ alors il existent une infinité de courbes γ dans M tels que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. En effet, si γ est une courbe qui represente v et $f :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to]-\varepsilon, +\varepsilon[$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ alors $\gamma \circ f :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 qui verifie :*

1) $\gamma \circ f(]-\varepsilon, +\varepsilon[) \subset M$.

2) $\gamma \circ f(0) = \gamma(0) = x_0$.

3) $(\gamma \circ f)'(0) = f'(0)\gamma'(f(0)) = \gamma'(0) = v$.

Lemme 4.6.3. *Soit*

$$\mathcal{K}_{x_0} = \{\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\to \mathbb{R}^n \; C^1 : \; \gamma(]-\varepsilon, +\varepsilon[) \subset M \text{ et } \gamma(0) = x_0\}$$

Si on désigne par " $\sim$ " la relation définie sur $\mathcal{K}_{x_0}$ par

$$(\gamma_1 \sim \gamma_2) \Leftrightarrow (\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0))$$

alors $\sim$ est une relation d'équivalence et on a

$$(\mathcal{K}_{x_0})/_{\sim} \equiv T_{x_0}M.$$

Preuve La preuve du lemme est immédiate. ■

Lemme 4.6.4. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de dimension p, alors $T_{x_0}M$ est un espace vectoriel de dimension p.*

Preuve soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x_0, V un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme tels que $\varphi(x_0) = 0$ et

$$(x \in U \cap M) \Leftrightarrow (\varphi_{p+1}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0).$$

1) Si $u \in T_{x_0}M$, alors il existe I un intervale ouvert voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n : C^1$ une courbe dans M tels que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = u$. On a

$$\forall t \in I; \quad \varphi_{p+1}(\gamma(t)) = ... = \varphi_n(\gamma(t)) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} D_{x_0}\varphi_{p+1}(\gamma'(0)) = ... = D_{x_0}\varphi_n(\gamma'(0)) &= 0 \\ D_{x_0}\varphi_{p+1}(u) = ... = D_{x_0}\varphi_n(u) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &D_{x_0}\varphi(u) \in \mathbb{R}^p \times \{0\} \\ &D_{x_0}\varphi(T_{x_0}M) \subseteq \mathbb{R}^p \times \{0\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

2) Soient $v \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ on a $tv \in V$. Si on pose

$$\gamma : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\to \varphi^{-1}(tv) \in M$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \varphi^{-1}(0) = x_0 \\ \gamma'(0) &= D_0\varphi^{-1}(v) \in T_{x_0}M \end{aligned}$$

d'où

$$D_0\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \subseteq T_{x_0}M. \tag{4.7}$$

Des formules (4.6) et (4.7) on déduit que $T_{x_0}M = D_0\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

■

Définition 4.6.2. *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous variété de dimension p. L'ensemble*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

est dit fibré tangent à M ou espace tangent à M.

Remarques 4.6.1. *:*

1) le fibré tangent à une sous variété M en général n'est pas un espace vectoriel.

2)Si $x \neq y$ alors $T_x M \cap T_y M = \emptyset$.

4.7 Espace Tangent à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Puisque U est un voisinage de x alors

$$(\exists \varepsilon > 0) : \quad (\forall |t| < \varepsilon), \quad tv + x \in U$$

Si on pose

$$\begin{aligned} \gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[&\rightarrow U \\ t &\mapsto vt + x \end{aligned}$$

alors

$$\gamma(0) = x \quad et \quad \gamma'(0) = v.$$

d'où

$$T_x U = \mathbb{R}^n \equiv \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

$$TU = \bigcup_{x \in U} T_x U \equiv U \times \mathbb{R}^n$$

4.8 Espace tangent à une sous variété définie par une immersion

Proposition 4.8.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une immersion de classe C^1. Si $M = f(U)$ est une sous variété de dimension p, alors*

$$\begin{aligned} T_{f(x)}M &= D_xf(\mathbb{R}^p) \\ TM &= Df(\mathbb{R}^p) = \bigcup_{x\in U} D_xf(\mathbb{R}^p) \end{aligned}$$

Preuve Soient $x \in U$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $|t| < \varepsilon$ on a $tu + x \in U$. Si on note par $\gamma : t \in \mathbb{R} \to \gamma(t) = f(tu + x)$ alors γ est une courbe dans $M = f(U)$ et on a

$$\gamma'(0) = D_xf(u) \in T_{f(x)}M$$

Comme D_xf est une application linéaire injective et $dim(T_{f(x)}M) = dim(M) = p$ on déduit que $T_{f(x)}M = D_xf(\mathbb{R}^p)$. ∎

Exemple 4.8.1. *Le plan affine dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est définie par le plongement régulier suivant :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto su + tv + w \end{aligned}$$

où $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tel que u et v sont linéairement indépendant. L'espace tangent à $M = f(\mathbb{R}^2)$ en un point $z = su + tv + w$ est donné par :

$$T_zM = D_{(s,t)}f(\mathbb{R}^2) = \{hu + kv; \quad h, k \in \mathbb{R}\} \equiv \{z\} \times \{hu + kv; \quad h, k \in \mathbb{R}\}$$

d'où

$$TM = \bigcup_{z\in M} \{z\} \times \{hu + kv; \quad h, k \in \mathbb{R}\} = M \times \{hu + kv; \quad h, k \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 4.8.2. ***Exp-2*** *soit le cercle définie par l'immersion suivante*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

On a $M = f(\mathbb{R}) = S^1$ et

$$\begin{aligned} T_{f(t)}M &= D_tf(\mathbb{R}) \\ &= \Big\{\lambda(-\sin(t), \cos(t)); \quad \lambda \in \mathbb{R}\Big\} \\ &\equiv \Big\{(-\sin(t), \cos(t))\Big\} \times \mathbb{R} \\ TM &\equiv S^1 \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple 4.8.3. *soient la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et f l'application de classe C^1 définie par*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \mapsto & (\cos(t)\cos(s), \cos(t)\sin(s), \sin(t)) \end{array}$$

On a :

1) $M = f(\mathbb{R}^2) = S^2$ est une sous variété de dimension 2.

2) $D_{(s,t)}f = \begin{pmatrix} -\cos(t)\sin(s) & -\sin(t)\cos(s) \\ \cos(t)\cos(s) & -\sin(t)\sin(s) \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$, f est une immersion si et seulement si $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

3) Si on note $\quad e_1 = (0, 0, 1)$, $e_{-1} = (0, 0, -1)$, $u = \begin{pmatrix} -\cos(t)\sin(s) \\ \cos(t)\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} -\sin(t)\cos(s) \\ -\sin(t)\sin(s) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$,

$A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; \, t = (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$, alors f est une immersion sur $\mathbb{R}^2 - A$ et on a :

a) $S^2 - \{e_1, e_{-1}\} = f(\mathbb{R}^2 - A)$

b) $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 - A$:

$$\begin{array}{rcl} T_{f((s,t))} & = & D_{(s,t)}f(\mathbb{R}^2) \\ & = & \{\lambda u + \beta v; \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}\} \\ & \equiv & \{f((s,t))\} \times \mathbb{R}^2 \end{array}$$

c) $TS^2 \equiv ((S^2 - \{e_1, e_{-1}\}) \times \mathbb{R}^2) \cup T_{e_1}S^2 \cup T_{e_{-1}}S^2$.

On verra plus tards que

$$\begin{array}{rcl} TS^2 & \not\cong & S^2 \times \mathbb{R}^2) \\ TS^2 & \equiv & ((S^2 - \{e_1\}) \times \mathbb{R}^2) \cup T_{e_1}S^2. \end{array}$$

Exemple 4.8.4. *(Inverse de la projection stéréographique).*

Soient les application f et g définies par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \mapsto & (\dfrac{2s}{s^2+t^2+1}, \dfrac{2t}{s^2+t^2+1}, \dfrac{s^2+t^2-1}{s^2+t^2+1}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) \end{aligned}$$

On a :

1. *f et g sont des application de classe C^1.*
2. *$f(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{N\}$ (où $N = e_1 = (0,0,1)$).*
3. *$f : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\}$ est une application bijective d'inverse g.*
4. *$D_{(s,t)}f = \frac{2}{(s^2+t^2+1)^2} \begin{pmatrix} -s^2+t^2+1 & -2st \\ -2st & s^2-t^2+1 \\ 2s & 2t \end{pmatrix}$*
5. *$D_{(s,t)}f$ est de rang 2.*
6. *Les vecteurs $u = \begin{pmatrix} -s^2+t^2+1 \\ -2st \\ 2s \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2st \\ s^2-t^2+1 \\ 2t \end{pmatrix}$ sont linéairement in dépendants.*
7. *De (1), (3) et (5) on déduit que f est un plongement régulier et $M = f(\mathbb{R}^2) = S^2 - \{N\}$ est une sous variété de dimension 2.*
8. *$T_{f((s,t))}M = Im(D_{(s,t)}f) = \{\lambda u + \beta v;\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv \{f((s,t))\} \times \mathbb{R}^2$.*
9. *$TM = \bigcup_{s,t \in \mathbb{R}^2} \{f((s,t))\} \times \mathbb{R}^2 = (S^2 - \{N\}) \times \mathbb{R}^2$.*

Remarque 4.8.1. *L'application*

$$\begin{aligned} g : S^2 - \{N\} &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) \end{aligned}$$

est dite projection stéréographique.

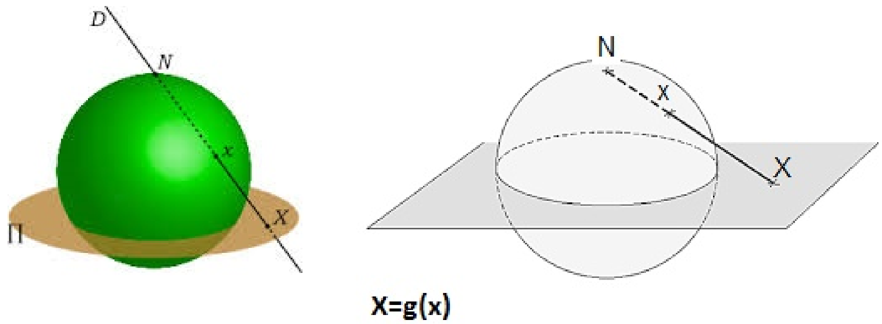

FIGURE 4.8 – Projection Stéréographique de S^2

4.9 Espace tangent à une sous variété définie par une submersion

Proposition 4.9.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion de classe C^1. Si $z \in f(U)$ alors l'espace tangent à la sous variété $M = f^{-1}(\{z\})$ est donné par*

$$\begin{aligned} T_xM &= \ker(D_xf) \\ TM &= \ker(Df) = \bigcup_{x\in M} \ker(D_xf) \end{aligned}$$

Preuve Si $u \in T_xM$, alors il existe une courbe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = u$. On a

$$\begin{aligned} f \circ \gamma(t) &= z; \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\\ (f \circ \gamma)'(t) &= 0 \\ D_xf(\gamma'(0)) &= 0 \\ D_xf(u) &= 0 \end{aligned}$$

d'où $T_xM \subset \ker D_xf$. Comme D_xf est une application surjective, alors $\dim(\ker D_xf) = n - m = \dim(T_xM)$ et par suite $\ker D_xf = T_xM$.

■

Exemples 4.9.1. *:*

Exp-1 ***:*** *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\ x = (x_0, x_1, ..., x_n) &\mapsto 1 - \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

f est une submersion sur $\mathbb{R}_*^{n+1}$, donc la sphère $S^n = f^{-1}(\{0\})$ est une sous variété de dimension n telle que

$$\begin{aligned} T_xS^n &= \ker D_xf \\ &= \{h = (h_0, h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; < x, h >= \sum_{i=0}^{n} x_ih_i = 0\} \end{aligned}$$

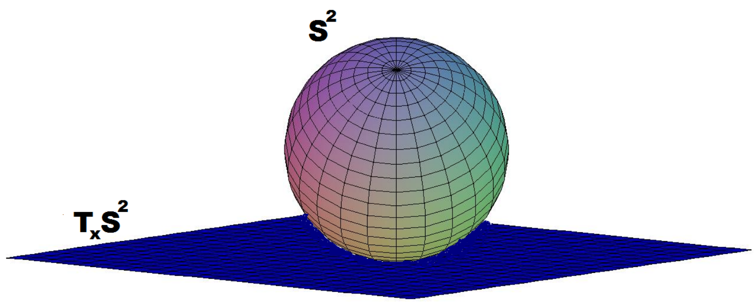

FIGURE 4.9 – Espace Tangent à S^2

4.10 Champs de Vecteurs

Définition 4.10.1. ***(Champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.)***

Un champ de vecteurs sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ est une application

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow TU = U \times \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto X_x = (x, F(x)) \end{aligned}$$

où F est une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs X est dit de classe C^k si et seulement si F de classe C^k.

L'ensemble des champs de vecteurs sur U est noté par $\Gamma(TU)$.

Lemme 4.10.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$, alors*

$$\begin{array}{rcl} L^x_v : \mathcal{C}^k(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & L^x_v(f) = D_x f(v) \end{array}$$

est une application linéaire qui vérifie l'identité de Leibnitz

$$L^x_v(fg) = g(x)L^x_v(f) + f(x)L^x_v(g)$$

Preuve La preuve est une conséquence directe des propriétés de la différentielle.
∎

Remarques 4.10.1. *On a :*

1) Si $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $L^x_{e_i} = (\frac{\partial}{\partial x_i})_{|x}$.

2) Si $v = (v^1, ..., v^n)$ alors $L^x_v = \Sigma_i v^i (\frac{\partial}{\partial x_i})_{|x}$.

3) Si $v = (v^1, ..., v^n)$ alors $L^x_v(f) = \Sigma_i v^i (\frac{\partial f}{\partial x_i})(x)$.

4) D'après la formule de Leibnitz, si $f = Const$ alors $L^x_v(f) = 0$.

Lemme 4.10.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$. Si*

$$\begin{array}{rcl} L^x : \mathcal{C}^k(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & L^x(f) \end{array}$$

est une application linéaire qui vérifie l'identité de Leibnitz

$$L^x(fg) = g(x)L^x(f) + f(x)L^x(g)$$

alors, il existe un et un seul vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $L^x = L^x_v$.

Preuve Soient $z \in U$, $P_i : x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \to x_i \in \mathbb{R}$ la *ième* projection et $v = (v^1, ..., v^n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$v^i = L^z(P_i) = L^z(x_i) \tag{4.8}$$

alors $L^z = L^z_v$. En effet :

Si $f \in \mathcal{C}^k(U)$ alors au voisinage de z, le développement limité à l'ordre 2 de f s'écrit :

$$f(x) = f(z) + \sum_i (x_i - z_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) + \sum_{ij}(x_i - z_i)(x_j - z_j)\theta_{ij}(x - z)$$

D'après la formule de Leibnitz, on a

1) $L^z(Const) = L^z(Const) = 0$.

2) $L^z\Big((x_i - z_i)(x_j - z_j)\theta_{ij}(x - z)\Big) = L_v^z\Big((x_i - z_i)(x_j - z_j)\theta_{ij}(x - z)\Big) = 0$.

3) $L^z\Big((x_i - z_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\Big) = L^z(x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) = v^i\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) = L_v^z\Big((x_i - z_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\Big)$.

d'où

$$L^z = L_v^z$$

Remarque : L'unicité du vecteur v, découle immédiatement de la formule (4.8).

■

D'après la Définition 4.10.1, les Lemmes 4.10.1 et 4.10.2, on obtient la proposition suivante

Proposition 4.10.1. *Tout champ de vecteur $X \in \Gamma(TU)$ est représenté par une application linéaire unique $L_X : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ vérifiant la formule de Leibnitz :*

$$L_X(fg) = gL_X(f) + fL_X(g)$$

L_X est définie par :

$$\begin{array}{rcl} L_X : \mathcal{C}^\infty(U) & \to & \mathcal{C}^\infty(U) \\ f & \mapsto & L_X(f) = X(f) = Df(X). \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} Df(X) : U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Df(X)(x) = D_xf(X_x). \end{array}$$

Remarque 4.10.1. *D'après la Définition 4.10.1, la Remarque 4.10.1 et la Proposition 4.10.1, L_X est un opérateur linéaire définie sur $\mathcal{C}^\infty(U)$ tel que*

$$L_X(f) = X(f) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{4.9}$$

$$L_X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.10}$$

où $X^i = P_i \circ F = F^i$.

Définition 4.10.2. ***(Champs de vecteurs sur une sous-variété.)***

Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. Un champ de vecteurs sur M est une application

$$\begin{array}{rcl} X : M & \to & TM \\ x & \mapsto & X_x = (x, F(x)) \in T_xM \end{array}$$

où $F : M \to \mathbb{R}^n$. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$.

Le champ de vecteurs X est dit de classe C^k si pour tout difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que $M \cap U = \varphi^{-1}(V \cap \mathbb{R}^p)$, l'applicationon $F \circ \varphi^{-1} : V \cap \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ est de classe C^k

où U et V sont deux ouvert de $\mathbb{R}^n$ (voir Définition 4.2.1).

Proposition 4.10.2. *Soient M une sous variété de $\mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \in \Gamma(TU)$. Si $M \subseteq U$ alors*

$$\Big(X \in \Gamma(TM)\Big) \Leftrightarrow \Big((\forall x \in M) : \; X_x \in T_xM\Big).$$

D'après la Proposition 4.9.1, on déduit la proposition suivante :

Proposition 4.10.3. *Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension p définie par une subersion $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$, alors $X \in \Gamma(TU)$ est un champ de vecteurs sur M si et seulement si*

$$Df(X) = 0, \quad i.e. \quad (\forall x \in M) : \; D_xf(X_x) = 0.$$

autrement dit, les fonctions $(X^1, ..., X^n)$ composante de X forment une solution du système d'équations :

$$X(f^j) = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = 0, \quad 1(\leq j \leq n-p). \tag{4.11}$$

Exemple 4.10.1. *Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, \, x \in I\}$. Le champ de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$X_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} + f'(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

est un champ de vecteurs sur M.

Exemple 4.10.2. *Soit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \, z = ax + by + c\}$. Le champ de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$X_{(x,y,z)} \;=\; x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (ax+by)\frac{\partial}{\partial z}$$

est un champ de vecteurs sur M.

$$X_{(x,y,z)} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (z-c-1)\frac{\partial}{\partial z}$$

n'est pas un champ de vecteurs sur M.

Exemple 4.10.3. *Soit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2-1=0\}$. Les champs de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$\begin{aligned} X_{(x,y,z)} &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \\ \overline{X}_{(x,y,z)} &= z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \\ \widetilde{X}_{(x,y,z)} &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

sont des champs de vecteurs sur M.

$$\widehat{X}_{(x,y,z)} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

n'est pas un champ de vecteurs sur M.

4.11 Orientation d'une Sous Variété

Définition 4.11.1. *Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Une base ξ est dite orienté dans le sens directe (resp. inverse) de e si*

$$det(P(e,\xi) > 0), \quad (resp.\ det(P(e,\xi) < 0))$$

où $P(e,\xi)$ désigne la matrice de passage de e à ξ.

Remarque 4.11.1. *:*

1) La base $\overline{e} = (e_2, e_1, e_3, ..., e_n)$ est orienté dans le sens inverse de e.

2) $(det(P(e,\xi) < 0) \Leftrightarrow (det(P(\overline{e},\xi) > 0)$

Définition 4.11.2. *Soient ξ_1, ξ_2 deux bases d'un espace vectoriel E de dimension fini. On dit que ξ_1 et ξ_2 ont la même orientation, ou*

$$\xi_1 \sim \xi_2, \quad \Leftrightarrow \quad detP(\xi_1, \xi_2) > 0$$

où $P(\xi_1, \xi_2)$ désigne la matrice de passage.

Lemme 4.11.1. *L'orientation définie une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E dont l'espace quotient est le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$.*

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble quotient est donné par $\{\dot{e}, \dot{\bar{e}}\}$.

Lemme 4.11.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension fini. Si $\varphi : E \to E$ est un isomorphisme linéaire, alors*

$$\xi_1 \sim \xi_2, \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\xi_1) \sim \varphi(\xi_2).$$

Preuve Si M_1 (resp. M_2) désigne la matrice de φ relativement à la base ξ_1 (resp. ξ_1), alors

$$\begin{array}{ccc} & \varphi, M_1 & \\ (E, \xi_1) & \longrightarrow & (E, \varphi(\xi_1)) \\ P_1 \downarrow & & \downarrow P_2 \\ (E, \xi_2) & \longrightarrow & (E, \varphi(\xi_2)) \\ & \varphi, M_2 & \end{array}$$

$$P_2 = M_2 P_1 M_1^{-1}, \quad d'où \quad detP_1 = detP_2$$

où $P_1 = P(\xi_1, \xi_2)$ (resp. $P_2 = P(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2))$) désigne la matrice de passage de ξ_1 à ξ_2 (resp. de $\varphi(\xi_1)$ à $\varphi(\xi_2)$).

∎

Définition 4.11.3. *L'orientation d'un espace vectoriel de dimension finie n est le choix d'une base ordonnée $\xi = (v_1, ..., v_n)$.*

Une base ξ' est une orientation directe (resp. indirecte) si $detP(\xi, \xi') > 0$ (resp. $detP(\xi, \xi') < 0$).

Définition 4.11.4. *Une sous variété $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimension p est dite orienté si pour tout $x \in M$, l'espace tangent T_xM est orienté.*

Si on désigne par $\xi_x = (v_1(x), ..., v_p(x))$ l'orientation de T_x pour tout $x \in M$, alors les applications

$$\begin{array}{rcl} v_i : M & \to & TM \\ x & \mapsto & v_i(x) \end{array}$$

définissent une famille de champs de vecteurs $\xi = (v_1, ..., v_p)$.

L'orientation ξ est dite de classe C^k si et seulement si les champs de vecteurs $v_1, ..., v_p$ sont de classe C^k (voir Définition 4.10.2).

Exemples 4.11.1. *:*

1) $\mathbb{R}^n$ est une sous variété orienté par $\xi = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$.

2) $\mathbb{R}^p \quad (p < n)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ orienté par $\xi = (\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_p})$.

3) Sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, les champs de vecteurs

$$X_{(x,y)} = (x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_{(x,y)} = (-y, x) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

définis une orientation directe de classe C^∞.

4) Le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n,\ x^2+y^2 = 1\}$ est orienté par le champ de vecteurs de classe C^∞,

$$X_{(x,y)} = (-y, x) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

.

4.12 Exercices

Exercice 4.12.1. *Soit $0 < r < 1$. Montrer que l'ensemble*

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = r^2\}$$

est une sous variété de $\mathbb{R}^3$, *déterminer sa dimension.*

Exercice 4.12.2. *Determiner l'ensemble* U *de* $\mathbb{R}^3$ *où la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2+y^2-z^2 \end{array}$$

est une submersion. Déterminer les sous variétés associées à f.

Exercice 4.12.3. *En utilisant la Définition 4.4.1 démontrer que le cylindre* $S^1 \times [0,1]$ *est une sous variété à bord.*

Exercice 4.12.4. *En utilisant la Définition 4.4.2 démontrer que le cylindre* $S^1 \times [0,1]$ *est une sous variété à bord.*

Chapitre 5

Formes Multilinéaires.

5.1 Groupe Symétrique S_n.

Notations 5.1.1. *:*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note par S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $A_n = \{1, ..., n\}$ dans lui même. S_n est un ensemble fini de cardinal $card(S_n) = n!$. Les éléments de S_n sont appelés permutations.

Un élément $\sigma \in S_n$ est représenter par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

S_n muni de la loi de composition des applications "$\circ$" est un groupe non commutatif. Si $\sigma, \mu \in S_n$ on note alors $\mu \circ \sigma$ par $\mu\sigma$.

Lemme 5.1.1. *Soit $\mu \in S_n$ alors*

$$\begin{array}{rcl} L_\mu : S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & L_\mu(\sigma) = \mu\sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} R_\mu : S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & R_\mu(\sigma) = \sigma\mu \end{array}$$

sont des applications bijectives telles que $L_\mu^{-1} = L_{\mu^{-1}}$ et $R_\mu^{-1} = R_{\mu^{-1}}$.

Définition 5.1.1 (Cycle)**.** *Un cycle de longueur p est une permutation $\sigma \in S_n$ définie par un sous ensemble $\{i_1, ..., i_p\} \subseteq A_n$ tel que*

$$\sigma(i_1) = i_2,\ ..., \sigma(i_{p-1}) = i_p,\ \sigma(i_p) = i_1; \quad et \quad \sigma(j) = j,\ \forall j \notin \{i_1, ..., i_p\}.$$

Le cycle σ est représenter par la matrice ligne $(i_1, ..., i_p)$.

Deux cycles $(i_1, ..., i_p)$ et $(j_1, ..., j_q)$ sont dit disjoint si $\{i_1, ..., i_p\} \cap \{j_1, ..., j_q\} = \emptyset$

Définition 5.1.2 (Transposition)**.** *Une transposition est un cycle τ de longueur 2 définie par (i, j) i.e.*

$$\tau(i) = j,\ \tau(j) = i, \quad et \quad \tau(k) = k,\ \forall k \notin \{i, j\}.$$

Remarques 5.1.1. *Si σ est un cycle de longueur p et τ une transposition, alors*

1. *$\sigma^p = Id = \sigma \circ ... \circ \sigma$ (composition de σ $(p - fois)$).*
2. *$\sigma^{-1} = \sigma^{p-1}$.*
3. *$\tau^{-1} = \tau$.*

Lemme 5.1.2. *Si $\sigma \in S_n$ est une permutation et $i \in A_n$, alors il existe $0 < p \leq n$ tel que $\sigma^p(i) = i$.*

Preuve Soit $B = \{\sigma^k(i);\ k \in \mathbb{N}^*\} \subseteq A_n$, comme A_n est un ensemble fini, alors il existe au moins $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $k < l$ et $\sigma^k(i) = \sigma^l(i)$ d'où

$$\sigma^{l-k}(i) = i$$

.
Si p désigne le plus petit entier non nul tel que $\sigma^p(i) = i$, alors

1. $p \leq n$.
2. $B = \{\sigma(i), \sigma^2(i)...., \sigma^p(i)\}$.
3. $(i, \sigma(i), \sigma^2(i)...., \sigma^{p-1}(i))$ est un cycle.
4. p est dit l'ordre de l'élément i.

■

Lemme 5.1.3. *Toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose en un nombre fini de cycles disjoints.*

Preuve Sur A_n on définit la relation d'équivalence suivante :

$$(i \sim j) \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{N};\ j = \sigma^q(i)) \tag{5.1}$$

Remarquons que si $p \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^p(j) = j$ alors $i = \sigma^{mp-q}(j) = i$, où $m \in \mathbb{N}$ tel que $mp > q$.

De la relation d'équivalence (5.1), on déduit l'exitence d'un sous ensemble $\{i_1, ..., i_k\} \subset A_n$ tel que $A_n/_\sim = \{\bar{i_1}, ..., \bar{i_k}\}$, d'où

1. $\bar{i_l} = \{\sigma(i_l), ..., \sigma^{p_l}(i_l)\}$, $(1 \leq l \leq k)$.
2. $A_n = \bigcup_{l=1}^{k} \{\sigma(i_l), ..., \sigma^{p_l}(i_l)\}$
3. $\sigma = \Big(\sigma(i_1), ..., \sigma^{p_1}(i_1)\Big) \circ ..... \circ \Big(\sigma(i_k), ..., \sigma^{p_k}(i_k)\Big)$ (composition de k cycles disjoints).

où p_l désigne l'ordre de i_l, $(1 \leq l \leq k)$. ■

Lemme 5.1.4. *Tout cycle $\sigma = (i_1, ..., i_p)$ se décompose en transpositions*

Preuve Il suffit d'écrire σ sous la forme

$$\sigma = (i_1, i_2)(i_2, i_3)....(i_{p-1}, i_p)$$

■

Lemme 5.1.5. *Toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose en transpositions.*

Preuve La preuve découle immédiatement des lemmes Lemme 5.1.3 et Lemme 5.1.4. ■

Définition 5.1.3 (Signature d'une permutation)**.** *La signature d'une permutation $\sigma \in S_n$ est définie par la formule*

$$sign(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \tag{5.2}$$

Remarque 5.1.1. *:*

1) $sign(\sigma) = \pm 1$.

2) On note $\varepsilon(\sigma) = sign(\sigma)$.

Lemme 5.1.6. *Soient σ et μ deux permutations, alors*

$$sign(\sigma\mu) = sign(\sigma \circ \mu) = sign(\sigma)sign(\mu)$$

Preuve On a

$$\frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)} = \frac{\sigma(\mu(j)) - \sigma(\mu(i))}{\mu(j) - \mu(i)}, \quad (\forall i \neq j).$$

d'où

$$\begin{aligned} sign(\sigma\mu) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{i - j} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu(i) - \mu(j)}{i - j} \\ &= \prod_{1 \leq \mu(i) < \mu(j) \leq n} \frac{\sigma(\mu(i)) - \sigma(\mu(j))}{\mu(i) - \mu(j)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu(i) - \mu(j)}{i - j} \\ &= sign(\sigma)sign(\mu). \end{aligned}$$

■

Remarques 5.1.2. *:*

1. *Si τ est une transposition alors $sign(\tau) = -1$.*
2. *Si σ est un cycle de longueur p alors $sign(\sigma) = (-1)^{p-1}$*
3. *Si σ est une permutation alors $sign(\sigma) = (-1)^k$, où k est le nombre de transpositions décomposant σ, (i.e. $\sigma = \tau_1.......\tau_k$).*
4. *$\varepsilon(Id) = 1$.*
5. *$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.*

Proposition 5.1.1. *Si on considère que $S_n \subset S_{n+1}$ en prolongeant les élèments $\sigma \in S_n$ par*

$$\sigma(j) = \begin{cases} \sigma(j) & si\ 1 \leq j \leq n \\ n+1 & si\ j = n+1 \end{cases}$$

alors

$$S_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \tau_i S_n = \bigcup_{i=1}^{n+1} S_n \tau_i$$

où $\tau_i = (i, n+1)$, $\tau_{n+1} = Id$, $\tau_i S_n = \{\tau_i \sigma,\ \sigma \in S_n\}$ et $S_n \tau_i = \{\sigma \tau_i,\ \sigma \in S_n\}$.

Preuve *Il suffit de constater que*

1) $(\forall 1 \leq i \leq n+1) \quad , \forall \sigma \in S_n : \tau_i S_n \subset S_{n+1}$ et ; $S_n \tau_i \subset S_{n+1}$.

2) $(\forall i \neq j) : \tau_i S_n \cap \tau_j S_n = \emptyset$.

3) $card(\bigcup_{i=1}^{n+1} \tau_i S_n) = card(\bigcup_{i=1}^{n+1} S_n \tau_i) = (n+1)card(S_n) = (n+1)! = card(S_{n+1})$.

■

En générale nous avons la proposition suivante

Proposition 5.1.2. *Si on note que $S_{n+1}^m = \{\sigma \in S_{n+1},\ \sigma(m) = m\}$, alors*

$$S_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \tau_i S_{n+1}^m = \bigcup_{i=1}^{n+1} S_{n+1}^m \tau_i$$

où $\tau_i = (i, m)$.

Remarque : $S_{n+1}^{n+1} = S_n$

5.2 Formes Multilinéaires.

Définition 5.2.1. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $k \geq 1$ un entier naturel. On appelle forme multilinéaire d'ordre k ou simplement forme k-linéaire sur E une application*

$$\begin{array}{rcl} f : E^p = E \times E..... \times E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_k) \mapsto f((x_1, x_2, ..., x_k)) & & \end{array}$$

linéaire par rapport à chaque variable.

Remarques 5.2.1. *:*

1) L'ensemble $\mathcal{L}_k(E)$ des formes k-linéaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) Si E est un espace vecoriel de dimension finie n et $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors toute forme k-linéaire est parfaitement déterminée par la suite $\left(f_{i_1...i_k}\right)_{1\leq i_1,...,i_k\leq n}$ où $f_{i_1...i_k} = f(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$, i.e. si $x_l = \Sigma_{j=1}^n x_l^j e_j$ alors

$$f((x_1, x_2, ..., x_k)) = \sum_{i_1,...,i_k=1}^{n} f_{i_1...i_k} x_1^{i_1} ... x_k^{i_k} \tag{5.3}$$

En utilisant la convention d'Einstein la formule (5.3), sécrit :

$$f((x_1, x_2, ..., x_k)) = f_{i_1...i_k} x_1^{i_1} ... x_k^{i_k} \tag{5.4}$$

5.3 Image Réciproque

Définition 5.3.1. *Soient E et F deux espace vecoriels sur $\mathbb{R}$. Soient $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire et $f \in \mathcal{L}_k(F)$ une forme k-linéaire sur F. On définit l'image réciproque de f noté $u^*(f)$ par :*

$$\begin{array}{rcl} u^*(f) : E^k & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_k) & \mapsto & f((u(x_1), ..., u(x_k))) \end{array}$$

Remarques 5.3.1. *:*

1)

$$\begin{array}{rcl} * : \mathcal{L}_k(F) & \to & \mathcal{L}_k(E) \\ f & \mapsto & u^*(f) \end{array}$$

est une application linéaire. i.e :

$$u^*(\alpha f + \beta g) = \alpha u^*(f) + \beta u^*(g)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in \mathcal{L}_k(F)$.

2) Soient E, F, G *des espaces vecoriels sur* $\mathbb{R}$. *Si* $u : E \to F$ *et* $v : F \to G$ *sont deux applications linéaires, alors*

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$$

$$\begin{array}{rcl} (v \circ u)^* : \mathcal{L}_k(G) : & \to & \mathcal{L}_k(E) \\ f & \mapsto & u^*(v^*(f)) \end{array}$$

3) Soient E, F *des espaces vecoriels sur* $\mathbb{R}$ *de dimension finis* n *et* m *respactivement . Si* $u : E \to F$ *est une application linéaire de matrice* $[u^i_j]_{i,j}$ *relativement aux base* $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ *et* $(\overline{e}_i)_{1 \leq i \leq m}$ *de* E *et* F *respectivement, alors*

$$(u^*(\overline{e}^s))(e_k) = \overline{e}^s(u(e_k)) = \overline{e}^s(\Sigma_{j=1}^m u^j_k \overline{e}_j) = u^s_k$$

d'où

$$u^*(\overline{e}^s) = \sum_{j=1}^{m} u^s_j e^j$$

5.4 Produit Tensoriel

Définition 5.4.1. *Soient* E *un espace vecoriels sur* $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}_k(E)$ *une forme* k*-linéaire sur* E *et* $g \in \mathcal{L}_p(E)$ *une forme* p*-linéaire sur* E *. On définit le produit tensoriel* $f \otimes g$ *par :*

$$\begin{array}{rcl} f \otimes g : E^k \times E^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+p}) & \mapsto & f((x_1, ..., x_k))g((x_{k+1}, ..., x_{k+p})) \end{array}$$

$f \otimes g$ *est une forme* $(k+p)$*-linéaire.*

Remarques 5.4.1. *:*

1)$f \otimes g \in \mathcal{L}_{k+p}(E)$

2) Le produit tensoriel n'est pas commutatif $\quad f \otimes g \neq g \otimes f$.

3) En général si $f_1 \in \mathcal{L}_{k_1}(E)$,...,$f_m \in \mathcal{L}_{k_m}(E)$, *on défini alors le proquit tensoriel* $f_1 \otimes .... \otimes f_m$ *par*

$$f_1 \otimes .... \otimes f_m((x_1^1, ..., x_{k_1}^1, ..., x_1^m, ..., x_{p+k_m}^m)) = f_1((x_1^1, ..., x_{k_1}^1))......f_m((x_1^m, ..., x_{k_m}^m)) \quad (5.5)$$

Définition 5.4.2 (Espace dual)**.** *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *L'ensemble des forme 1-linéaire est appellé espace dual de* E, *on le note* E^*

$$E^* = \mathcal{L}_1(E) = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Définition 5.4.3 (Base dual)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n. *Si* $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* E, *on définit sur* E^* *une base* $(e^1, ..., e^n)$ *dite base dual par la formule :*

$$e^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Proposition 5.4.1. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n. *Si* $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* E *alors* $\left\{e^i \otimes e^j\right\}_{1 \leq i,j \leq n}$ *est une base de l'espace vectoriel des formes bilinéaires* $\mathcal{L}_2(E)$.

De la Proposition 5.4.1, on déduit que $\quad dim(\mathcal{L}_2(E)) = (dimE)^2 = n^2$

Preuve :

1) Si

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e^i \otimes e^j = 0$$

alors pour deux éléments e_s et e_t de la base, ona :

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e^i \otimes e^j(e_s, e_t) = \alpha_{st}$$

2) Si $f \in \mathcal{L}_2(E)$, alors

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i,j=1}^{n} f(e_i, e_j) e^i \otimes e^j$$

■

De même, on a :

Proposition 5.4.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors*

$$\left\{ e^{i_1} \otimes ..... \otimes e^{i_k} \right\}_{1 \leq i_1, ..., i_k \leq n}$$

est une base de l'espace vectoriel des formes k-linéaires $\mathcal{L}_k(E)$.

De la Proposition 5.5.1, on déduit :

1) $dim(\mathcal{L}_k(E)) = (dimE)^k = n^k$

2) Si $f \in \mathcal{L}_k(E)$, alors

$$f = \sum_{i_1, ..., i_k = 1}^{n} f_{i_1 ... i_k} e^{i_1} \otimes .... \otimes e^{i_k} = \sum_{i_1, ... i_k = 1}^{n} f(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) e^{i_1} \otimes .... \otimes e^{i_k}$$

Définition 5.4.4. *Une forme k-linéaire $f \in \mathcal{L}_k(E)$ est dite symetrique si*

$$f((x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)})) = f((x_1, ..., x_k))$$

pour tout $x_1, ..., x_k \in E$ et toute permutation $\sigma \in S_n$.

L'ensemble des formes k-linéaire symétriques est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_k(E)$ noté $\mathcal{S}_k(E)$.

5.5 Formes Alternées

Définition 5.5.1. *Une forme k-linéaire $f \in \mathcal{L}_k(E)$ est dite alternées si*

$$f((x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)})) = \varepsilon(\sigma) f((x_1, ..., x_k))$$

pour tout $x_1, ..., x_k \in E$ et toute permutation $\sigma \in S_n$.

L'ensemble des formes k-linéaire alternées est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}_k(E)$ noté $\mathcal{A}_k(E)$.

Proposition 5.5.1. *Si $f \in \mathcal{L}_k(E)$ est une forme k-linéaire, alors l'application g définie par*

$$g((x_1, ..., x_k)) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f((x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}))$$

est une forme k-linéaire alternées.

Preuve Soit $\mu \in S_n$. D'après le Lemme 5.1.1 on a

$$\begin{aligned}
g((x_{\mu(1)}, ..., x_{\mu(k)})) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f((x_{\sigma(\mu(1))}, ..., x_{\sigma(\mu(k))})) \\
&= (\varepsilon(\mu))^2 \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f((x_{\sigma\mu(1)}, ..., x_{\sigma\mu(k)})) \\
&= \varepsilon(\mu) \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\mu) f((x_{\sigma\mu(1)}, ..., x_{\sigma\mu(k)})) \\
&= \varepsilon(\mu) \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma\mu) f((x_{\sigma\mu(1)}, ..., x_{\sigma\mu(k)})) \\
&= \varepsilon(\mu) \sum_{\sigma\mu \in S_k} \varepsilon(\sigma\mu) f((x_{\sigma\mu(1)}, ..., x_{\sigma\mu(k)})) \\
&= \varepsilon(\mu) g((x_{\mu(1)}, ..., x_{\mu(k)}))
\end{aligned}$$

■

Définition 5.5.2 (Antisymétrisation)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}_k(E)$ une forme k-linéaire. L'application $A(f)$ définie par*

$$A(f)((x_1, ..., x_k)) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) f((x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}))$$

est dite antisymétrisation de f.

L'application

$$\begin{aligned}
A : \mathcal{L}_k(E) &\to \mathcal{A}_k(E) \\
f &\mapsto A(f)
\end{aligned}$$

est dite antisymetrisation.

5.6 Produit Exterieur

Définition 5.6.1. *Soient $f \in \mathcal{A}_p(E)$ et $f \in \mathcal{A}_q(E)$. Le produit exterieur de f et g noté $f \wedge g$ est une forme $(p+q)$-linéaire altérnée définie par*

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(f \otimes g). \tag{5.6}$$

$$(f \wedge g)((x_1, ..., x_{p+q})) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma) f((x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})) g((x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)})) \tag{5.7}$$

Propriétés 5.6.1. *: Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_p(E)$, $g_1, g_2 \in \mathcal{A}_q(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. on a*

1. $(f_1 + f_2) \wedge g_1 = f_1 \wedge g_1 + f_2 \wedge g_1$
2. $f_1 \wedge (g_1 + g_2) = f_1 \wedge g_1 + f_1 \wedge g_2$
3. $(\lambda f_1) \wedge g_1 = f_1 \wedge (\lambda g_1) = \lambda f_1 \wedge g_1$

Proposition 5.6.1. *Soit E et F deux espaces vecoriel de dimension finies. Si $u : E \to F$ est une application linéiare alors*

$$u^*(f \wedge g) = u^*(f) \wedge u^*(g)$$

où $f \in \mathcal{A}_p(E)$ et $g \in \mathcal{A}_q(E)$

Preuve La preuve découle immédiatement des définitions 5.6.1 et 5.3.1.
■ De la Proposition 5.6.1 et la Remarque 5.3.1, on obtient

Remarques 5.6.1. *Soient $e = (e_i)_i$ une base de E et $\overline{e} = (\overline{e}_j)_j$ une base de F. Si $(u^i_j)_{i,j}$ désigne la matrice de u relativement à e et $\overline{e}$, alors*

$$\begin{aligned} u^*(\overline{e}^s \wedge \overline{e}^k) &= \sum_{ij} u^s_i u^k_j e^i \wedge e^j \\ &= \sum_{i<j} (u^s_i u^k_j - u^k_i u^s_j) e^i \wedge e^j \end{aligned}$$

Dans le cas général, on a

$$u^*(\overline{e}^{s_1} \wedge ... \wedge \overline{e}^{s_p}) = \sum_{i_1 ... i_p} u^{s_1}_{i_1} ... u^{s_p}_{i_p} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p}$$

Proposition 5.6.2. *Si $f \in \mathcal{A}_1(E)$ et $g \in \mathcal{A}_1(E)$ sont deux formes linéaires, alors $f \wedge g \in \mathcal{A}_2(E)$ et on a*

$$f \wedge g = -g \wedge f$$

Preuve On a $S_2 = \{id, (1,2)\}$, d'où

$$\begin{aligned} f \wedge g((x_1, x_2)) &= f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_1) \\ &= -g \wedge f((x_1, x_2)) \end{aligned}$$

∎

Remarque 5.6.1.

$$f \wedge g((x_1, x_2)) = det \begin{vmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f(x_2) & g(x_2) \end{vmatrix}$$

Proposition 5.6.3. *Soient $f, g, h \in \mathcal{A}_1(E)$, alors*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$$

On note alors

$$f \wedge g \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$$

Preuve On a $S_3 = \{id, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$, d'où

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h((x_1, x_2, x_3)) &= \frac{1}{2}\Big[(f \wedge g)((x_1, x_2)) \wedge h(x_3) - (f \wedge g)((x_2, x_1)) \wedge h(x_3) \\ &\quad -(f \wedge g)((x_3, x_2)) \wedge h(x_1) - (f \wedge g)((x_1, x_3)) \wedge h(x_2) \\ &\quad +(f \wedge g)((x_2, x_3)) \wedge h(x_1) + (f \wedge g)((x_3, x_1)) \wedge h(x_2)\Big] \\ &= (f \wedge g)((x_1, x_2)) \wedge h(x_3) + (f \wedge g)((x_2, x_3)) \wedge h(x_1) \\ &\quad +(f \wedge g)((x_3, x_1)) \wedge h(x_2) \\ &= f \wedge (g \wedge h)((x_1, x_2, x_3)). \end{aligned}$$

∎

Remarque 5.6.2. *D'après la remarque 5.6.1, on a*

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h((x_1, x_2, x_3)) &= (f \wedge g)((x_2, x_3)) \wedge h(x_1) - (f \wedge g)((x_1, x_3)) \wedge h(x_2) \\ &\quad +(f \wedge g)((x_1, x_2)) \wedge h(x_3) \\ &= h(x_1)det \begin{vmatrix} f(x_2) & g(x_2) \\ f(x_3) & g(x_3) \end{vmatrix} - h(x_2)det \begin{vmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f(x_3) & g(x_3) \end{vmatrix} \\ &\quad +h(x_3)det \begin{vmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f(x_2) & g(x_2) \end{vmatrix} \\ &= det \begin{vmatrix} f(x_1) & g(x_1) & h(x_1) \\ f(x_2) & g(x_2) & h(x_2) \\ f(x_3) & g(x_3) & h(x_3) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Définition 5.6.2. *Soient $f_1, ..., f_p \in \mathcal{A}_1(E)$. On définit le produit exterieur $f_1 \wedge .... \wedge f_p$ par*

$$(f_1 \wedge .... \wedge f_p)((x_1, ..., x_p)) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f_1(x_1)....f_p(x_p) \tag{5.8}$$

$$= det \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_p(x_1) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix} \tag{5.9}$$

Remarques 5.6.2. *soient $(e_1, ..., e_n)$ une base de l'espace vectoriel E, $(e^1, ..., e^n)$ la base dual de E^* et $f_1, ...f_p \in \mathcal{A}_p(E)$. On a :*

1) D'après les propriétés du déterminant, si $i, j \in \{1, ..., p\}$ tels que $i \neq j$ et $f_i = f_j$ alors $f_1 \wedge .... \wedge f_p = 0$.

2) De la définition du produit exterieur (Définition 5.6.2), on obtient :

$$e^{i_1} \wedge .... \wedge e^{i_p}((x_1, ..., x_p)) = det \begin{vmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^p_{i_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x^1_{i_p} & \cdots & x^p_{i_p} \end{vmatrix}$$

où $x_k = \Sigma_{i=1}^n x_i^k e_i$ $(1 \leq k \leq p)$.

3) Si $p > n$ alors le système $\{e^{i_1}, ..., e^{i_p}\}$ est linéairement dépendant, d'où $e^{i_1} \wedge .... \wedge e^{i_p} = 0$. Donc $\mathcal{A}_p(E) = \{0\}$.

4) Si $p = 0$ alors $\mathcal{A}_0(E) = E$.

5) Si $p = 1$ alors $\mathcal{A}_1(E) = E^*$ (dual de E).

Proposition 5.6.4. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Si $(e^1, ..., e^n)$ désigne la base dual de E^*, alors*

$$B = \{e^{i_1} \wedge ...... \wedge e^{i_p}\}_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n}$$

est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_p(E)$.

Preuve :

1) Le système B est linéairement indépendant, en effet si

$$\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \alpha_{i_1 ... i_p} e^{i_1} \wedge ...... \wedge e^{i_p} = 0$$

alors
$$\alpha_{j_1\ldots j_p}=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n}\alpha_{i_1\ldots i_p}e^{i_1}\wedge\ldots\ldots\wedge e^{i_p}((e_{j_1},\ldots.,e_{j_p}))=0.$$

2) B est une partie génératrice, en effet si $f\in\mathcal{A}_p(E)$ alors
$$f(((e_{j_1},\ldots.,e_{j_p}))\quad=\quad\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n}\alpha_{i_1\ldots i_p}e^{i_1}\wedge\ldots\ldots\wedge e^{i_p}((e_{j_1},\ldots.,e_{j_p}))$$
où $\alpha_{i_1\ldots i_p}=f(((e_{i_1},\ldots.,e_{i_p}))$.
■

Notation 5.6.1. *Si $f\in\mathcal{A}_p(E)$ alors*
$$f=\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n}f_{i_1\ldots i_p}e^{i_1}\wedge\ldots\ldots\wedge e^{i_p}\tag{5.10}$$
où $f_{i_1\ldots i_p}=f(((e_{i_1},\ldots.,e_{i_p}))$.

Proposition 5.6.5. *Soient$f_1\ldots f_p,g_1\ldots,g_q\in\mathcal{L}_1(E)$ alors*
$$(f_1\wedge\ldots\wedge f_p)\wedge(g_1\wedge\ldots\wedge g_q)=(-1)^{pq}(g_1\wedge\ldots\wedge g_q)\wedge(f_1\wedge\ldots\wedge f_p)$$

Preuve De la proposition 5.6.2, on obtient
$$\begin{aligned}(f_1\wedge\ldots\wedge f_p)\wedge(g_1\wedge\ldots\wedge g_q)&=(-1)^q(f_1\wedge\ldots\wedge f_{p-1})\wedge(g_1\wedge\ldots\wedge g_q)\wedge f_p\\&=(-1)^{2q}(f_1\wedge\ldots\wedge f_{p-2})\wedge(g_1\wedge\ldots\wedge g_q)\wedge f_{p-1}\wedge f_p\\&=\vdots\\&=(-1)^{pq}(g_1\wedge\ldots\wedge g_q)\wedge(f_1\wedge\ldots.\wedge f_p)\end{aligned}$$

■

Des propositions 5.6.4 et 5.6.5 on déduit

Proposition 5.6.6. *Si $f\in\mathcal{A}_p(E)$ et $g\in\mathcal{A}_q(E)$, alors $f\wedge g\in\mathcal{A}_{p+q}(E)$ et on a :*
$$f\wedge g=(-1)^{pq}g\wedge f$$

5.7 Produit Intérieure

Définition 5.7.1. *Soit $x \in E$. Le produit intérieure i_x est une application définie par*

$$\begin{array}{rcl} i_x : \mathcal{L}_p(E) & \to & \mathcal{L}_{p-1}(E) \\ f & \mapsto & i_x(f) \end{array}$$

telle que $i_x(f)$ est une forme $(p-1)$-linéaire donnée par

$$\begin{array}{rcl} i_x(f) : E^{p-1} & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_{p-1}) & \mapsto & i_x(f)((x_1, ..., x_{p-1})) = f((x, x_1, ..., x_{p-1})). \end{array}$$

De la Définition 5.7.1, on obtient

Définition 5.7.2. *Soit $x \in E$. Le produit intérieure i_x est une application définie par*

$$\begin{array}{rcl} i_x : \mathcal{A}_p(E) & \to & \mathcal{A}_{p-1}(E) \\ f & \mapsto & i_x(f) \end{array}$$

$i_x(f)$ est une forme $(p-1)$-linéaire alternée.

Propriétés 5.7.1. *Soient $x \in E$ $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{L}_p(E)$ alors :*

1. $i_x(f, g) = i_x(f) + i_x(g)$.
2. $i_x(\lambda f) = \lambda i_x(f)$.

Proposition 5.7.1. *Si $x \in E$, $f \in \mathcal{A}_p(E)$ et $f \in \mathcal{A}_q(E)$, alors*

$$i_x(f \wedge g) = i_x(g) \wedge g + (-1)^p f \wedge i_x(g)$$

Preuve D'après la Définition 5.6.1 et la Propositio 5.1.2, on a :

$$\begin{aligned}
& i_{x_1}(f\wedge g)(x_2,...,x_{p+q}) = (f\wedge g)(x_1,x_2,...,x_{p+q})\\
= & \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\varepsilon(\sigma)f((x_{\sigma(1)},....,x_{\sigma(p)}))g((x_{\sigma(p+1)},....,x_{\sigma(p+q)}))\\
= & \frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma\in S^1_{p+q}\\ 1\leq i\leq p}}\varepsilon(\sigma\tau_i)f((x_{\sigma\tau_i(1)},....,x_{\sigma\tau_i(p)}))g((x_{\sigma\tau_i(p+1)},....,x_{\sigma\tau_i(p+q)}))\\
& +\frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma\in S^1_{p+q}\\ p+1\leq i\leq p+q}}\varepsilon(\sigma\tau_i)f((x_{\sigma\tau_i(1)},....,x_{\sigma\tau_i(p)}))g((x_{\sigma\tau_i(p+1)},....,x_{\sigma\tau_i(p+q)}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma\in S^1_{p+q}\\ 1\leq i\leq p}}\varepsilon(\sigma\tau_i)f((x_{\sigma(i)},..x_{\sigma(1)}..,x_{\sigma(p)}))g((x_{\sigma(p+1)},....,x_{\sigma(p+q)}))\\
& +\frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma\in S^1_{p+q}\\ p+1\leq i\leq p+q}}\varepsilon(\sigma\tau_i)f((x_{\sigma(i)},x_{\sigma(2)}....,x_{\sigma(p)}))g((x_{\sigma(p+1)},..x_{\sigma(1)}..,x_{\sigma(p+q)}))\\
= & \frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma\in S^1_{p+q}\\ 1\leq i\leq p}}\varepsilon(\sigma)f((x_{\sigma(1)},..x_{\sigma(i)}..,x_{\sigma(p)}))g((x_{\sigma(p+1)},....,x_{\sigma(p+q)}))\\
+ & \frac{1}{p!q!}\sum_{\substack{\sigma\in S^1_{p+q}\\ p+1\leq i\leq p+q}}(-1)^{i-p}\varepsilon(\sigma\tau_i)f((x_{\sigma(i)},x_{\sigma(2)}....,x_{\sigma(p)}))g((x_{\sigma(1)},x_{\sigma(p+1)}..x_{\sigma(i-1)},\\
& \qquad x_{\sigma(i+1)}..,x_{\sigma(p+q)}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{p}{p!q!}\sum_{\sigma\in S^1_{p+q}}\varepsilon(\sigma)f((x_1,..x_{\sigma(i)}..,x_{\sigma(p)}))g((x_{\sigma(p+1)},....,x_{\sigma(p+q)}))\\
+ & \frac{1}{p!q!}\sum_{p+1\leq i\leq p+q}\sum_{\sigma\in S^1_{p+q}}(-1)^{i-p-1}\varepsilon(\sigma)f((x_{\sigma(i)},x_{\sigma(2)}....,x_{\sigma(p)}))g((x_1,x_{\sigma(p+1)}...x_{\sigma(i-1)},\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_{\sigma(i+1)}..,x_{\sigma(p+q)}))\\
= & \frac{p(p-1)!q!}{p!q!}[(i_{x_1}f)\wedge g]((x_2,....,x_{p+q}))\\
& \quad +\frac{p!(q-1)!}{p!q!}\sum_{p+1\leq i\leq p+q}(-1)^{i-p-1}[f\wedge(i_{x_1}g)]((x_i,x_2...,x_{i-1},x_{i+1}..,x_{p+q}))\\
= & [(i_{x_1}f)\wedge g]((x_2,....,x_{p+q}))\\
& \quad +\frac{1}{q}\sum_{p+1\leq i\leq p+q}(-1)^{i-p-1}(-1)^{i-2}[f\wedge(i_{x_1}g)]((x_2...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},..,x_{p+q}))\\
= & [(i_{x_1}f)\wedge g]((x_2,....,x_{p+q}))+(-1)^p[f\wedge(i_{x_1}g)]((x_2.....,x_{p+q}))\\
= & [(i_{x_1}f)\wedge g+(-1)^pf\wedge(i_{x_1}g)]((x_2.....,x_{p+q}))
\end{aligned}
$$

■

Chapitre 6

Formes Différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

6.1 Formes Différentielles

Dans ce chapitre on considère $E = \mathbb{R}^n$.

Définition 6.1.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différentielle de degré p dans U (ou simplement p-forme différentielle) toute application*

$$\begin{array}{rcl} \omega : U & \to & \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n) \\ x & \mapsto & \omega_x \end{array}$$

Si $(e_1, ..., e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et ω une p-forme différentielle sur $U \in \mathbb{R}^n$. Alors d'après la proposition 5.6.4, on a

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1 ... i_p} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p} \tag{6.1}$$

où $\omega_{i_1 ... i_p} : U \to \mathbf{R}$ sont des fonctions sur U et $(e^1, ...e^n)$ désigne la base duale canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$(\forall x \in U); \qquad \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1 ... i_p}(x) e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p}$$

En utilisant la covention d'Einstein la formule (6.1) s'écrit :

$$\omega = \omega_{i_1 ... i_p} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_p} \tag{6.2}$$

$$(\forall x \in U); \qquad \omega(x) = \omega_{i_1 \dots i_p}(x) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \tag{6.3}$$

Définition 6.1.2. *Soit* $\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ *une p-forme différentielle sur* $\mathbf{R}^n$.

- ω *est dite continue si les fonctions* $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \to \mathbf{R}$ *sont continues* $(1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$.

- ω *est dite différentiable de classe* C^k *si les fonctions* $\omega_{i_1 \dots i_p} : U \to \mathbf{R}$ *sont différentiables de classe* C^k $(1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$.

Propriétés 6.1.1. *Soient* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $\omega_1 = \omega^1_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$, $\omega_2 = \omega^2_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ *deux p-formes différentielles de classe* C^k *sur* U, $\omega = \omega_{j_1 \dots j_q} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_q}$ *une q-forme différentielle sur* U *et* $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^k, *alors*

1. $\omega_1 + \omega_2 = \left(\omega^1_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} + \omega^2_{i_1 \dots i_p} e^{i_1}\right) \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ *est une p-forme différentielle de classe* C^k *sur* U.

2. $\omega_1 = f\omega^1_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ *est une p-forme différentielle de classe* C^k *sur* U.

3. $\omega_1 \wedge \omega$ *est une (p+q)-forme différentielle de classe* C^k *sur* U, *où*
$$\omega_1 \wedge \omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n}} \omega^1_{i_1 \dots i_p} \omega_{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \wedge e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_q}$$

4. $$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n f_i e^i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n g_j e^j\right) &= \sum_{i,j=1}^n f_i g_j e^i \wedge e^j \\ &= \sum_{i \neq j} f_i g_j e^i \wedge e^j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (f_i g_j - g_i f_j) e^i \wedge e^j \end{aligned}$$

Définition 6.1.3. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Si on note par* $\Omega^k_p(U)$ *l'ensemble des p-formes différentielles de classe* C^k *sur* U, *alors* $(\Omega^k_p(U), +, .)$ *muni de la somme des p-formes différentielles et le produit par des fonctions est un module sur* $\mathcal{C}^k(U)$. *Où*

$\mathcal{C}^k(U)$ *désigne l'anneau des fonctions réelles de classe* C^k *sur* U.

$\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}^0(U)$ *désigne l'anneau des fonctions réelles continues sur* U,

6.2 Caractérisation des formes différentielles

Soient $i \in \{1, ..., n\}$ et P_i la *iéme* projection définie par

$$\begin{array}{rcl} P_i : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_i. \end{array}$$

Alors dP_i est une 1-forme différentielle de classe C^∞ noté dx^i

$$\begin{array}{rcl} dx^i : \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & d_x P_i = e^i = e_i^* \end{array}$$

Si ω est une 1-forme différentielle sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ alors ω s'ecrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i \tag{6.4}$$

$$(x \in U), \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) dx^i. \tag{6.5}$$

Exemples 6.2.1. *:*

1. *Si $n = 3$ alors toute 1-forme différentielle ω sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme*

$$\omega = f dx + g dy + h dz$$

   où f, g, h sont des fonctions sur U.

2. $\omega = \cos(x)dx + \sin(y)dy$ *est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$.*

En général si ω est une p-forme différentielle alors ω s'écrit sous la forme :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1 ... i_p} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}. \tag{6.6}$$

Dans la suite, on note $dx^{i_1} ....dx^{i_p}$ au lieu de $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_p}$. Ainsi la formule (6.6) s'écrit

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1 ... i_p} dx^{i_1} ....dx^{i_p}. \tag{6.7}$$

Remarque 6.2.1. *Si $j \in \{i_1, .., i_p\}$ alors*

$$dx^{i_1}...dx^j...dx^{i_p} = 0.$$

Exemples 6.2.2. *Si U est un ouvet de $\mathbb{R}^2$, alors :*

1. $\Omega_0^k(U) = \mathcal{C}^k(U)$.
2. $\Omega_1^k(U) = \{fdx + gdy; \quad f, g \in \mathcal{C}^k(U)\}$.
3. $\Omega_2^k(U) = \{fdxdy; \quad f\ \mathcal{C}^k(U)\}$.
4. $\Omega_p^k(U) = \{0\}$ *si* $p \geq 3$.

Exemples 6.2.3. *Si U est un ouvet de $\mathbb{R}^n$, alors :*

1. $\Omega_0^k(U) = \mathcal{C}^k(U)$.
2. $df = \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \in \Omega_1^k(U)$, *où* $f \in \mathcal{C}^k(U)$
3. $\Big(\Sigma_i f_i dx^i\Big)\Big(\Sigma_j g_j dx^j\Big) = \Sigma_{i \leq j}(f_i g_j - g_i f_j) dx^i dx^j \in \Omega_2^k(U)$

Définition 6.2.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ la forme différentielle*

$$\omega = dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

est dite forme volume sur U.

6.3 Dérivée Extérieure

Définition 6.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega = \Sigma_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1,...,i_p} dx^{i_1}....dx^{i_p}$ une p-forme différentielle de classe C^k sur U $(1 \leq k)$. On appelle dérivée extérieure de ω la $(p+1)$-forme différentielle $d\omega$ définie par*

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} d\omega_{i_1,...,i_p} dx^{i_1}....dx^{i_p}.$$

Remarque 6.3.1.

$$d\omega = \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j} dx^j dx^{i_1}....dx^{i_p}.$$

$$d(dx^{i_1}....dx^{i_p}) = 0.$$

Exemples 6.3.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ on a*

1. *Si $f \in \Omega_0^k(U)$, alors $df = f'(x)dx$.*

2. *Si $\omega \in \Omega_p^k(U)$ $(p \geq 1)$, alors $d\omega = 0$.*

Exemples 6.3.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ on a*

1. $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

2. $d(fdx + gdy) = \frac{\partial f}{\partial y}dydx + \frac{\partial g}{\partial x}dxdy = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy$.

3. $\omega = -y\cos^2(x)dx + x\sin^2(y)dy, \quad d\omega = dxdy$.

4. *Si $\omega \in \Omega_p^k(U)$ $(p \geq 2)$, alors $d\omega = 0$.*

où $f, g \in \mathcal{C}^k(U)$.

Exemples 6.3.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ on a*

1. $df = \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$.

2. $d(fdx + gdy + hdz) = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z})dxdz + (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z})dydz$.

3. $d(fdxdy + gdxdz + hdydz) = (\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x})dxdydz$.

4. *Si $\omega \in \Omega_p^k(U)$ $(p \geq 2)$, alors $d\omega = 0$.*

Où $f, g, h \in \mathcal{C}^k(U)$.

Exemples 6.3.4. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega_{n-1}^k(U)$ telle que*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i dx^1 ... dx^{i-1} dx^{i+1} ... dx^n,$$

alors

$$d\omega = ndx^1....dx^n.$$

Proposition 6.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega_1 \in \Omega_p^k(U)$ et $\omega_2 \in \Omega_q^k(U)$, alors*

$$d(\omega_1\omega_2) = (d\omega_1)\omega_2 + (-1)^p\omega_1(d\omega_2).$$

Preuve Il suffit de la démontrer dans le cas où

$$\omega_1 = fdx^{i_1}...dx^{i_p}, \quad \omega_2 = gdx^{j_1}...dx^{i_q}$$

on a

$$\begin{aligned}
d(\omega_1\omega_2) &= d(fg)dx^{i_1}...dx^{i_p}dx^{j_1}...dx^{i_q} \\
&= (gdf + fdg)dx^{i_1}...dx^{i_p}dx^{j_1}...dx^{i_q} \\
&= gdfdx^{i_1}...dx^{i_p}dx^{j_1}...dx^{i_q} + fdgdx^{i_1}...dx^{i_p}dx^{j_1}...dx^{i_q} \\
&= (dfdx^{i_1}...dx^{i_p})(gdx^{j_1}...dx^{i_q}) + (-1)^p(fdx^{i_1}...dx^{i_p})(dgdx^{j_1}...dx^{i_q}) \\
&= (d\omega_1)\omega_2 + (-1)^p\omega_1(d\omega_2).
\end{aligned}$$

■

Lemme 6.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^k(U)$ $(k \geq 2)$, alors*

$$d(df) = 0.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
df &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx^i \\
d(df) &= \sum_{i=1}^n d(\frac{\partial f}{\partial x_i})dx^i \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx^j dx^i \\
&= \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx^j dx^i \\
&= \sum_{i<j} \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}dx^j dx^i + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx^i dx^j\Big] \\
&= \sum_{i<j} \Big[-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big]dx^i dx^j \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Lemme 6.3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^k(U)$ $(k \geq 2)$, alors*

$$d(d(f dx^{i_1}....dx^{i_p})) = 0.$$

Preuve D'après la Remarque 6.3.1, la Proposition 6.3.1 et le Lemme 6.3.1, on déduit

$$\begin{array}{rcl} d(f dx^{i_1}....dx^{i_p}) & = & (df)dx^{i_1}....dx^{i_p} \\ d(d(f dx^{i_1}....dx^{i_p})) & = & d((df)dx^{i_1}....dx^{i_p}) \\ & = & (d(df))dx^{i_1}....dx^{i_p} \\ & = & 0. \end{array}$$

■

Du Lemme 6.3.2, on obtient

Théorème 6.3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega_p^k(U)$ $(k \geq 2)$, alors*

$$d(d\omega)) = 0.$$

Définition 6.3.2. *oient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une p-forme différentielle $\omega \in \Omega_p^k(U)$ $(k \geq 1)$ est dite fermée si*

$$d\omega = 0.$$

Exemples 6.3.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$*

1. *Si $\omega \in \Omega_p^k(U)$, alors $d\omega$ est une p-forme fermée.*
2. *$\omega = \Sigma_i x^i dx^i$ est fermée.*
3. *$\omega = \Sigma_i x^1 dx^i$ n'est pas fermée pour $n \geq 2$.*

Proposition 6.3.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une 1-forme différentielle $\omega = \Sigma_i \omega_i dx^i \in \Omega_1^k(U)$ est fermée si et seulement si*

$$\forall i, j : \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

Preuve On a

$$\begin{array}{rcl} d\omega & = & \displaystyle\sum_{i,j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j dx^i \\ & = & \displaystyle\sum_{i \neq j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j dx^i \\ & = & \displaystyle\sum_{i<j} \Big(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\Big) dx^i dx^j \end{array}$$

d'où

$$(d\omega = 0) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall i, j: \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\Big)$$

■

6.4 Forme Différentielle Exacte.

Définition 6.4.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega^{k-1}_{p+1}(U)$ ($k \geq 1$) et $\varpi \in \Omega^k_p(U)$ ($k \geq 2$). ϖ est dite primitive de ω si*

$$d\varpi = \omega$$

La forme différentielle ω est dite alors exacte.

De la Définition 6.4.1, on a

Proposition 6.4.1. *Toute forme différentielle exacte est une forme différentielle fermée.*

Exemples 6.4.1. *:*

1. $\Sigma_{i=1}^n \omega = x_i i dx^i$ *est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$d\omega = 0 \quad et \quad \omega = d(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

2. *Soit la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$*

$$\omega = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

On a :

$$d\omega = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} dydx + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} dxdy = 0$$

$$\omega = d\Big(\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big).$$

Donc ω est une forme 1-difffé rrentielle exacte sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

3. *Sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ la 1-forme différentielle*

$$\omega = \frac{\Sigma_{i=1}^n x_i dx^i}{\Sigma_{i=1}^n x_i^2}$$

est une forme exacte telle que :

$$\omega = d\Big(\ln\sqrt{\Sigma_{i=1}^n x_i^2}\Big).$$

4. *Sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ la 1-forme différentielle*

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

est une forme fermée, en effet :

$$d\omega = \frac{(x^2 - y^2)dydx}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(y^2 - x^2)dxdy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

On verra dans l'Exemple 6.7.3 que ω n'est pas exacte.

5. *Soit dans $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle*

$$\omega = (3x^2 + 2xy + y^2)dx + (3y^2 + 2xy + x^2)dy$$

On a

$$d\omega = 2(x + y)dydx + 2(x + y)dxdy = 0$$

donc ω est une 1-forme différentielle férmée. Cherchons une fonction F continument dérivable sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$dF = \omega = (3x^2 + 2xy + y^2)dx + (3y^2 + 2xy + x^2)dy.$$

On a

$$(\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + y^2) \Rightarrow (F(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + f(y))$$

$$(\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2xy + x^2 = x^2 + 2xy + f'(y)$$

d'où

$$(f'(y) = 3y^2) \quad \Rightarrow \quad (f(y) = y^3 + c)$$

Ainsi

$$F(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + c$$

6.5 Dérivée Intérieure de Forme Différentielle

Définition 6.5.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $X \in \Gamma(TU)$ et $\omega \in \Omega_1^k(U)$. On définit alors la fonction $\omega(X)$ sur U par*

$$(\forall x \in U) : \quad \omega(X)(x) = \omega_x(X_x) \tag{6.8}$$

où $\omega_x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Si

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \omega = \sum_i \omega_i dx^i.$$

alors

$$\omega(X) = \sum_i X^i \omega_i. \tag{6.9}$$

La fonction $\omega(X)$ est appellée dérivée interieure de ω par X notée

$$i_X(\omega)$$

Lemme 6.5.1. *Si $\omega \in \Omega_1^k(U)$, alors*

$$\begin{array}{rcl} \omega : \Gamma(U) & \to & \mathcal{C}^k(U) = \Omega_0^k(U) \\ X & \mapsto & \omega(X) \end{array}$$

est une application $\mathcal{C}^k(U)$-linéaire, i.e. pour tout $X, Y \in \Gamma(U)$ et $f \in \mathcal{C}^k(U)$, on a

1) $\omega(X+Y) = \omega(X) + \omega(Y)$.

2) $\omega(fX) = f\omega(X)$.

Définition 6.5.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X \in \Gamma(U)$. La dérivée intérieure i_X est une application définie par*

$$\begin{array}{rcl} i_X : \Omega_p^k(U) & \to & \Omega_{p-1}^k(U) \\ \omega & \mapsto & i_X(\omega) \end{array}$$

telle que $i_X(\omega)$ est une forme $(p-1)$-linéaire donnée par

$$\begin{array}{rcl} i_X(\omega) : \Gamma(U)^{p-1} & \to & \mathcal{C}^k(U) = \Omega_0^k(U) \\ (X_1, ..., X_{p-1}) & \mapsto & i_X(\omega)((X_1, ..., X_{p-1})) = \omega((X, X_1, ..., X_{p-1})). \end{array}$$

où

$$\omega((X, X_1, ..., X_{p-1}))(x) = \omega_x((X(x), X_1(x), ..., X_{p-1}(x))) \quad (\forall x \in U).$$

Remarque 6.5.1. *La dérivée intérieure i_X est une application $\mathcal{C}^k(U)$-linéaire, i.e. pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_p^k(U)$ et $f \in \mathcal{C}^k(U)$ on a :*

$$i_X(f\omega_1 + \omega_2) = f i_X(\omega_1) + i_X(\omega_2).$$

De la Proposition 5.7.1, on a

Proposition 6.5.1. *Soient $X \in \Gamma(U)$, $\omega \in \Omega_p^k(U)$ et $\eta \in \Omega_q^k(U)$, alors*

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge i_X(\eta)$$

Remarque 6.5.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X = \Sigma_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs de classe C^k sur U. Si $\omega = dx^1....dx^n$ est une forme volume sur U alors*

$$i_X\omega = \sum_{i=1}^n X^i dx^1 ... \widehat{dx^i} ... dx^n.$$

6.6 Image Réciproque de Forme Différentielle

Définition 6.6.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\varphi : U \to V$ une application de classe C^{k+1} $(k \geq 1)$. On définit l'image réciproque des p-forme différentielle*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : \Omega_p^k(V) & \to & \Omega_p^k(U) \\ \omega & \mapsto & \varphi^*(\omega) \end{array}$$

par

$$\Big(\varphi^*(\omega)\Big)_x (z_1, ..., z_p) = (d_x\varphi)^*(\omega_{\varphi(x)})(z_1, ..., z_p) = \omega_{\varphi(x)}(d_x\varphi(z_1), ..., d_x\varphi(z_p))$$

où $x \in U$ et $z_1, ..., z_p \in \mathbb{R}^n$ (voir la Définition 5.3.1).

De la Définition 6.6.1, la Remarque 5.3.1 et la Proposition 5.6.1, on obtient

Proposition 6.6.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, W un ouvert de $\mathbb{R}^r$, $\varphi : U \to V$ et $\psi : V \to W$ deux applications de classe C^{k+1} $(k \geq 1)$. Alors*

1) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

2) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2)$.

3) $\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\varphi^*(\omega)$.

4) $\varphi^*(\omega\eta) = \varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega)\varphi^*(\eta)$.

5) $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

6) Si $k > n$ alors $\varphi^*(\omega) = 0$

où $f \in \mathcal{C}^k(V)$, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega_p^k(V)$ et $\eta \in \Omega_q^k(V)$

Proposition 6.6.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, alors*

$$\varphi^*(dy^j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i = d\varphi^j$$

$$\varphi^*(\sum_j \omega_j dy^j) = \sum_{i,j} (\omega_j \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i = \sum_j (\omega_j \circ \varphi) d\varphi^j$$

Preuve Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $(\overline{e}_1, ..., \overline{e}_m)$ une base de $\mathbb{R}^m$. On a

$$\begin{array}{rcl}\varphi_x^*(dy^j)(e_i) & = & (dy^j)(d_x\varphi(e_i)) \\ & = & (dy^j)(\dfrac{\partial \varphi^s}{\partial x^i}(x)\overline{e}s) \\ & = & \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}(x) \\ & = & \Big(\dfrac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}(x)dx^i\Big)(e_i)\end{array}$$

d'où

$$\varphi^*(dy^j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i = d\varphi^j$$

■

Remarque 6.6.1. *La preuve peut se faire d'une manière directe en remarquant que $dy^j = dP_j$ où P_j et la $j-$ième projection :*

$$\varphi^*(dy^j) = dy^j \circ d\varphi = dP_j \circ d\varphi = d(P_j \circ \varphi) = d\varphi^j$$

.

Exemple 6.6.1. *Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\varphi : x \in I \to \varphi(x) = (\varphi^1(x), ..., \varphi^m(x)) \in \mathbb{R}^m$, de classe C^1, alors*

$$\varphi^*(dx^j) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial x} dx = (\varphi^j)'(x)dx$$

Exemple 6.6.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, alors*

$$\varphi^*(dy^j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i = d\varphi^j$$

$$\varphi^*(\sum_j \omega_j dy^j) = \sum_{i,j} (\omega_j \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} dx^i = \sum_j (\omega_j \circ \varphi) d\varphi^j$$

Exemple 6.6.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, alors*

$$\begin{aligned}
\varphi^*(dx^i dx^j) &= \varphi^*(dx^i)\varphi^*(dx^j) \\
&= (\frac{\partial \varphi^i}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi^i}{\partial y}dy)(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi^j}{\partial y}dy) \\
&= (\frac{\partial \varphi^i}{\partial x}\frac{\partial \varphi^j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi^j}{\partial x}\frac{\partial \varphi^i}{\partial y})dxdy \\
&= det\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x} & \frac{\partial \varphi^j}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi^j}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy
\end{aligned}$$

De la Définition 5.6.2 on obtient

Proposition 6.6.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(n \leq m)$, alors*

$$\varphi^*(dy^{i_1}...dy^{i_n}) = \varphi^*(dy^{i_1}) \wedge ... \wedge \varphi^*(dy^{i_n}) = f_{i_1..i_n} dx^1...dx^n$$

où

$$f_{i_1..i_n} = det\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{i_n}}{\partial x_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial x_n} & & \cdots \frac{\partial \varphi^{i_n}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

sont des fonctions sur U de classe C^{k-1}.

Corollaire 6.6.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\varphi : U \to V$ de classe C^k $(n \leq m)$. Si $\omega \in \Omega^k_n(V)$ alors*

$$\varphi^*(\omega) = f dx^1...dx^n \tag{6.10}$$

où $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^{k-1}.

Proposition 6.6.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ de classe C^k $(p \leq n)$. Si $\omega \in \Omega^k_p(V)$ alors*

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$$

Preuve En utilisant la Proposition 6.6.1, il suffit de démontrer la Proposition 6.6.4 pour

$$\omega = f dy^i.$$

D'après la Proposition 6.6.2, on a

$$\begin{aligned}
\varphi^*(d(f dy^i)) &= \varphi^*(d(f)dy^i)) \\
&= \sum_j \varphi^*((\frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j dy^i)) \\
&= \sum_j (\frac{\partial f}{\partial y^j} \circ \varphi)\varphi^*((dy^j dx^i)) \\
&= \sum_j (\frac{\partial f}{\partial y^j} \circ \varphi)\varphi^*(dy^j)\varphi^*(dy^i)) \\
&= \sum_j (\frac{\partial f}{\partial y^j} \circ \varphi) d\varphi^j d\varphi^i
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
d\Big(\varphi^*(f dy^i)\Big) &= d\Big((f \circ \varphi)(\varphi^* dy^i)\Big) \\
&= d\Big((f \circ \varphi)(d\varphi^i)\Big) \\
&= (d(f \circ \varphi))d\varphi^i \\
&= \sum_{jk} (\frac{\partial f}{\partial y^j} \circ \varphi)(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^k} dx^k) d\varphi^i \\
&= \sum_j (\frac{\partial f}{\partial y^j} \circ \varphi) d\varphi^j d\varphi^i
\end{aligned}$$

■

Corollaire 6.6.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ de classe C^k $(p \leq min(n, m))$. Soit $\omega \in \Omega_p^k(V)$ alors*

1) ω est fermée $\Rightarrow \varphi^*(\omega)$ est fermeé.

2) ω est exacte $\Rightarrow \varphi^*(\omega)$ est exacte. (i.e. $(\omega = d\alpha) \Rightarrow \varphi^*(\omega) = d\varphi^*(\alpha)$.)

Corollaire 6.6.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ difféomorphisme de classe C^k. Soit $\omega \in \Omega_p^k(V)$ $(p \leq n)$ alors*

1) ω est fermée $\Leftrightarrow \varphi^*(\omega)$ est fermeé.

2) ω est exacte $\Leftrightarrow \varphi^*(\omega)$ est exacte.

6.7 Integration des Formes Différentielles

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega_p^k$ $(\leq n)$, I ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : I \to U$ une application de classe C^k. D'après le Corollaire 6.6.1, on a

$$\varphi^*(\omega) = f dx^1 ... dx^p$$

Définition 6.7.1. *On dit que ω est integrable relativement à φ si la fonction f est integrable sur I, on note alors*

$$\int_\varphi \omega = \int_I \varphi^*(\omega) = \int .. \int_I f(x) dx^1 ... dx^p. \tag{6.11}$$

Des propriétés de l'intégral multiple et la Définition 6.7.1, on déduit

Propriétés 6.7.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega_p^k$ $(\leq n)$, I ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : I \to U$ une application de classe C^k. Alors*

$$\begin{aligned} \int_\varphi (\omega_1 + \omega_2) &= \int_\varphi \omega_1 + \int_\varphi \omega_2. \\ \int_\varphi \lambda\omega &= \lambda \int_\varphi \omega. \end{aligned}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 6.7.1. ***[Changement de variables]*** *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\theta : U \to V$ un difféomorphisme. Si $f : V \to \mathbb{R}$ est une application integrable sur V, alors $f \circ \theta$ est integrable sur U et on a*

$$\begin{aligned}\int..\int_V f dx^1...dx^n &= \int..\int_U f\circ\theta[Jac(d\theta)]dx^1...dx^n\\ &= \int..\int_U \theta^*(f dx^1...dx^n)\end{aligned}$$

où

$$Jac(d\theta)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\theta_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\theta_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\theta_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

Théorème 6.7.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega\in\Omega_p^k$, I, J deux ouverts de $\mathbb{R}^p$ et $\theta : J\to I$ un difféomorphisme de classe C^k. Si $\varphi : I\to U$ est une application de classe C^k alors*

$$\int_\varphi \omega = \int_{\widetilde{\varphi}}\omega.$$

où $\widetilde{\varphi} = \varphi\circ\theta$.

Preuve Si $\varphi^*(\omega) = f dx^1...dx^p$ alors d'après la Définition 6.7.1 et le Théorème 6.7.1, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\varphi}}\omega &= \int_J(\varphi\circ\theta)^*(\omega)\\ &= \int_J \theta^*(\varphi^*((\omega))\\ &= \int_J \theta^*(f dx^1...dx^p)\\ &= \int..\int_J(f\circ\theta)[Jac(d\theta)]dx^1...dx^p\\ &= \int..\int_I f dx^1...dx^p\\ &= \int_I \varphi^*(\omega)\\ &= \int_\varphi \omega.\end{aligned}$$

∎

Exemple 6.7.1. *Soient $\omega = xdy - ydx$, $a > 0$ et*

$$\begin{array}{rcl}\varphi : I =]-a,+a[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x, x^2)\end{array}$$

On a

$$\varphi^*(\omega) = xd(x^2) - x^2dx = x^2dx$$

$$\int_\varphi \omega = \int_I \varphi^*(\omega) = \int_{-a}^{+a} x^2dx = \frac{2}{3}a^2.$$

Exemple 6.7.2. *Soient* $\omega_1 = ydx$, $\omega_2 = ydy$, $I =]-a,+a[$ *(*$a > 0$*),* $f \in \mathcal{C}(I)$ *et*

$$\begin{array}{rcl}\varphi : I =]-a,+a[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x, f(x))\end{array}$$

On a

$$\varphi^*(\omega_1) = f(x)dx\varphi^*(\omega_2) = f(x)f'(x)dx$$

$$\begin{array}{rcl}\int_\varphi \omega_1 = \int_I \varphi^*(\omega_1) & & \\ & = & \int_{-a}^{+a} f(x)dx. \\ \int_\varphi \omega_2 = \int_I \varphi^*(\omega_2) & & \\ & = & \int_{-a}^{+a} f(x)f'(x)dx. \\ & = & \frac{1}{2}[f^2(a) - f^2(-a)]\end{array}$$

Exemple 6.7.3. *Soient ,* $I =]0, 2\pi[$,

$$\omega = -\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{array}{rcl}\varphi : I =]-0, 2\pi[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)))\end{array}$$

On a

$$\varphi^*(\omega) = dt$$

$$\begin{aligned}\int_\varphi \omega &= \int_I \varphi^*(\omega)\\ &= \int_0^{2\pi} dt.\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

Remarque : *si ω est une forme exacte, alors il existe une fonction f telle que $\omega = df$, d'après la Proposition 6.6.4, on*

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(df) = d(\varphi^* f) = d(f\circ\varphi) = (f\circ\varphi)'(t)dt$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_\varphi \omega &= \int_I \varphi^*(\omega)\\ &= \int_0^{2\pi} (f\circ\varphi)'(t)dt.\\ &= f\circ\varphi(2\pi) - f\circ\varphi(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec le résultat précédent.

Exemple 6.7.4. *Soient $I =]0,1[\times]-\pi,\pi[$, $\varphi : (r,t) \in I \to (r\cos(t), r\sin(t))$ et $\omega = xdxdy$. On a*

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega) &= rd(r\cos(t))d(r\sin(t)\\ &= r\Big(\cos(t)dr - r\sin(t)dt\Big)\Big(\sin(t)dr + r\cos(t)dt\Big)\\ &= r^2\Big(\cos^2(t)drdt - \sin^2(t)dtdr\Big)\\ &= r^2drdt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\varphi \omega &= \int_I \varphi^*(\omega)\\ &= \int_0^1 r^2dr\int_{-\pi}^{+\pi} dt\\ &= \frac{2}{3}\pi.\end{aligned}$$

Exemple 6.7.5. *Soient* $I =]-\pi, +\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}[$, $\omega = xdydz + ydzdx + zdxdy$ *et*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : I & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t,s) & \to & (\cos(s)\cos(t), \cos(s)\sin(t), \sin(s)). \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*(\omega) & = & \cos(s)\cos(t)d(\cos(s)\sin(t))d\sin(s) + \cos(s)\sin(t)d\sin(s)d(\cos(s)\cos(t)) \\ & & +\sin(s)d(\cos(s)\cos(t))d(\cos(s)\sin(t)) \\ & = & \cos(s)\cos(t)[\cos(s)\cos(t)dt - \sin(s)\sin(t)ds][\cos(s)ds] \\ & & +\cos(s)\sin(t)[\cos(s)ds][-\cos(s)\sin(t)dt - \cos(t)\sin(s)ds] \\ & & +\sin(s)[-\cos(s)\sin(t)dt - \cos(t)\sin(s)ds][\cos(s)\cos(t)dt - sin(s)sin(t)ds] \\ & = & \cos^3(s)\cos^2(t)dtds - \cos^3(s)\sin^2(t)dsdt \\ & & +\sin(s)[\cos(s)\sin(s)\sin^2(t)dtds - \cos^2(t)\sin(s)cos(s)dsdt] \\ & = & \cos^3(s)dtds + \cos(s)\sin^2(s)dtds \\ & = & \cos(s)dtds \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \int_\varphi \omega & = & \int_I \varphi^*(\omega) \\ & = & \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(s)ds \\ & = & 4\pi. \end{array}$$

6.8 Integration sur une Sous Variété

Théorème 6.8.1. *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $M \subseteq U$ *une sous variété de dimension* p *et* $\omega \in \Omega_p^k(U)$. *Si* U_1 *(resp* U_2*) est un ouvert de* $\mathbb{R}^p$, $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ *(resp* $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$*) est une immersion injective telle que* $M = \varphi_1(U_1) = \varphi_2(U_2)$, *alors*

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega$$

Preuve Si on désigne par $\theta = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : U_1 :\to U_2$, alors θ est un difféomorphisme, en effet, d'après le théorème de caractérisation d'immersion (Théorème 3.2.1), localement ils existent g_1 et g_2 deux difféomorphismes tels que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_1 & \\ \widetilde{U_1} & \to & V \\ h_1 & \searrow & \Big\downarrow g_1 \\ & & W_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \varphi_2 & \\ \widetilde{U_2} & \to & V \\ h_2 & \searrow & \Big\downarrow g_2 \\ & & W_2 \end{array}$$

où $\widetilde{U_1}$ (resp. $\widetilde{U_2}$) est un ouvert inclus dans U_1 (resp. U_2), h_1 (resp. h_2) est l'injection canonique dans $\mathbb{R}^n$ (identité sur $\mathbb{R}^p$) avec

$$\varphi_1(\widetilde{U_1}) = V \cap M = \varphi_2(\widetilde{U_2}).$$

On a

$$\theta = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = g_2^{-1} \circ h_2 \circ h_1^{-1} \circ g_1$$

Ce qui montre que θ est un difféomorphisme. D'apré le Théorème 6.7.2, on déduit que

$$\int_{\varphi_2} \omega = \int_{\theta\circ\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_1} \omega$$

■

Définition 6.8.1. *Soient M une sous variété orienté de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, U un ouvert $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega_p^k(U)$. On suppose que M est définit par une immersion injective $\varphi : U_1 \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ ($M = \varphi(U_1)$). On dit que ω est integrable sur la sous variété M si elle integrable relativement à φ, on écrit alors*

$$\int_M \omega = \int_\varphi \omega.$$

D'après le Théorème 6.8.1 la Définition 6.8.1 est indépendante de l'immersion φ.

Définition 6.8.2. *Def6.8.2 Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété a bord de dimension p. Un recouvrement fini a bord de M est une famille finie $\{(U_i, \varphi_i)\}_{1\leq i\leq m}$ telle que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $U_i \subset \mathbb{R}^p$ est une sous-variété a bord de dimension p

2) $\varphi_i : U_i \mapsto \mathbb{R}^n$ est une immersion, injective sur l'intérieur U_i^O.

3) $\forall j \in \{1, .., m\}$: $\varphi_j(U_j) \cap (\cup_{i\neq j}\varphi_i(U_i)$ est une sous variété de dimension $< p$.

4) $M = \cup_{i=1}^m \varphi_i(U_i)$.

Exemple 6.8.1. *Soient*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$U_1 = U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array}$$

On a $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un recouvrement fini a bord de la sphère S^2 tel que

$$\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 1\}$$

est une sous-variété de dimension 1.

Exemple 6.8.2. *Soient*

$$C = S^1 \times [0, 1],$$
$$U_1 = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (\cos(x), \sin(x), y), \end{array}$$

On a $\{(U_1, \varphi_1)\}$ est un recouvrement fini a bord du cylindre C.

Définition 6.8.3. *Soient M une sous variété orienté de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega_p^k(U)$. Soit $\{(U_i, \varphi_i)\}_{1\leq i\leq m}$ un recouvrement fini à bord de M. On dit que ω est integrable sur la sous variété M si elle integrable relativement à toutes les immersions φ_i $(1 \leq i \leq m)$, on écrit alors*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i} \omega.$$

La Définition 6.8.3 est indépendante du recouvrement a bord.

6.9 Lemme de Poincaré

Définition 6.9.1 (Rappel)**.** *Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé en $x_0 \in U$ si :*

$$\forall x \in U,\ \forall t \in [0,1] : \quad t(x - x_0) + x_0 \in U$$

Lemme 6.9.1. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé en 0 et X un champ de vecteurs défini par*

$$X_x = x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Si on considére l'application :

$$\begin{array}{rcl} \chi : \Omega^k_{p+1}(U) & \to & \Omega^k_p(U) \\ \omega & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 t^p i_X(\omega)(tx)dt. \end{array}$$

Alors χ est une application linéaire telle que

$$d\chi(\omega) + \chi(d\omega) = \omega.$$

Preuve *Il suffit de démontrer le lemme pour $\omega = f dx^{i_1}....dx^{i_{p+1}}$. On a :*

$$\chi(\omega) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \Big(\int_0^1 t^p f(tx) x_{i_j} dt \Big) dx^{i_1} ... \widehat{dx^{i_{i_j}}} ... dx^{i_{p+1}}$$

$$d\Big(\int_0^1 t^p f(tx) x_{i_j} dt \Big) = \int_0^1 t^p f(tx) dt \Big) dx^{i_j} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_{i_j} dt \Big) dx^i.$$

D'où

$$\begin{aligned} d\chi(\omega) &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \Big[\Big(\int_0^1 t^p f(tx) dt \Big) dx^{i_j} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_{i_j} dt \Big) dx^i \Big] dx^{i_1} ... \widehat{dx^{i_{i_j}}} ... dx^{i_{p+1}} \\ &= (p+1) \Big(\int_0^1 t^p f(tx) dt \Big) dx^{i_1} ... dx^{i_{i_j}} ... dx^{i_{p+1}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_{i_j} dt \Big) \Big) dx^i dx^{i_1} ... \widehat{dx^{i_{i_j}}} ... dx^{i_{p+1}} \end{aligned} \tag{6.12}$$

D'autre part, on a :

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}}$$

$$i_X(dx^i dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}}) \;=\; x_i dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}} + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j x_{i_j} dx^i dx^{i_1}...\widehat{dx^{i_j}}...dx^{i_{p+1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\chi(d\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \chi(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) i_X(dx^i dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}}) dt \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\Big(x_i dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}} + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j x_{i_j} dx^i dx^{i_1}...\widehat{dx^{i_j}}...dx^{i_{p+1}}\Big) dt
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Par sommation de (6.12) et (6.13) on obtient :

$$\begin{aligned}
d\chi(\omega) + \chi(d\omega) &= \int_0^1 \Big((p+1)t^p f(tx) dt + \sum_{i=1}^{n} t^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i\Big) dt dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}} \\
&= \Big[\int_0^1 \Big(t^{p+1} f(tx)\Big)' dt\Big] dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}} \\
&= \Big[t^{p+1} f(tx)\Big]_0^1 dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}} \\
&= f(x) dx^{i_1}.....dx^{i_{p+1}} \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

■

Du Corollaire 6.6.3 et le Lemme 6.9.1, on obtient

Lemme 6.9.2 (Poincaré)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé. Si ω est une p-forme differentielle férmée alors ω est une p-forme differentielle exacte.*

Preuve D'après le Corollaire 6.6.3, on peut supposer que U est étoilé en 0.
Du Lemme 6.9.1, on a :

$$d\chi(\omega) + \chi(d\omega) = \omega.$$

Comme ω est fermée (i.e. $d\omega = 0$), on déduit

$$d\chi(\omega) = \omega.$$

■

6.10 Formule de Stokes

Théorème 6.10.1. *Soit M une sous variété orientée à bord et $\omega \in \Omega^k_{p-1}(M)$ à support compact. Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} I^*(\omega) \tag{6.14}$$

où $I : \partial M \to$ désigne l'injection canonique (inclusion).

Preuve On suppose qu'il existe V ouvert de M image d'une paramétrisation $\varphi : H^p_+ \to V$ telle que $supp(\omega) \subset V$.

On a :

1) $\partial H^p_+ = \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$

2) $int(H^p_+) = \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^*_+$.

3) $\varphi^*(\omega) = \Sigma_{i=1}^p (-1)^{i+1} f_i dx^1 .... \widehat{dx^i} ... dx^p \in \Omega^k_{p-1}(H^p_+)$.

4) $d\varphi^*(\omega) = \Sigma_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1 .... dx^i ... dx^p \in \Omega^k_{p-1}(H^p_+)$.

5) Comme f_i est à support compact dans H^p_+ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i = 0, \quad pour \quad 1 \leq i < p$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_p}{\partial x^p} dx^p = f_p(x_1, ..., x_{p-1}, 0)$$

6) Si $j : \partial H^p_+ \to H^p_+$ désigne l'inclusion canonique alors

$i)$ $j^*(dx^1 .... \widehat{dx^i} ... dx^p) = 0$ pour $i \neq p$ puisque x_p est constant sur ∂H^p_+.

ii) $j^*(dx^1......dx^{p-1}) = dx^1......dx^{p-1}$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_V d\omega &= \int_{H_+^p} \varphi^*(d\omega) \\
&= \int_{H_+^p} d\varphi^*(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \int_{H_+^p} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^1....dx^i...dx^p \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{p-2}\times\mathbb{R}+} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \Big) dx^1....\widehat{dx^i}...dx^p \\
&\qquad\qquad + \int_{\mathbb{R}^{p-1}} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_p}{\partial x^p} dx^p \Big) dx^1......dx^{p-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{p-1}} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_p}{\partial x^p} dx^p \Big) dx^1......dx^{p-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{p-1}} f_p(x_1, ..., x_{p-1}, 0) dx^1......dx^{p-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{p-1}\times\{0\}} j^*(\varphi^*(\omega)) \\
&= \int_{\partial H_+^p} j^*\varphi^*(\omega) \\
&= \int_{\partial M\cap V} I^*(\omega)
\end{aligned}$$

■

Exemple 6.10.1. *Soient* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$ *et* $\omega = xdx + ydy$*. On a :*

1) D *est une sous variété compact de bord* $\partial D = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$.

2) Si $\varphi : t \in [0, 2\pi] \to (cos(t), sin(t)) \in \mathbb{R}^2$ *est une paramétrisation de la sous variété* S^1*, alors* $\varphi^*(\omega) = 0$ *et*

$$\int_{S^1} \omega = \int_{\varphi} \omega = \int_{[0,2\pi]} \varphi^*(\omega) = 0.$$

3) On a $d\omega = 0$*, par application de la formule de stokes on obtient :*

$$\int_{S^1} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 0.$$

Exemple 6.10.2. *Soient* $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$ *la sous variété compacte de dimension* 3 *et de bord* $\partial C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq 1\}$. *Si* ω *désigne la 2-forme différentielle définie par*

$$\omega = f(x,y)dxdy.$$

où $f \in C^k(\mathbb{R}^3)$ $(k \geq 1)$. *Alors* ω *est une forme différentielle fermée, de la formule de Stokes on obtient :*

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega = 0.$$

Exemple 6.10.3. *Sur* $\mathbb{R}^2$ *on pose :* $\omega = dxdy$, $\eta = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, $D_1 = [0,1] \times [0,1]$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq R^2\}$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : [0,R] \times [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\theta) & \mapsto & (R\cos(\theta), R\sin(\theta)) \end{array}$$

On a :

1)

$$\int_{D_1} \omega = \int_0^1 \int_0^1 dxdy = 1.$$

2)

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^*(\omega) & = & (\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta)(\sin(\theta)dr - r\cos(\theta)d\theta) \\ & = & r\cos^2(\theta)drd\theta - r\sin^2(\theta)d\theta dr \\ & = & rdrd\theta \end{array}$$

$$\int_{D_2} \omega = \int_{\varphi_1} \omega = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} \varphi_1^*(\omega) = \int_0^{2\pi} (\int_0^R rdr)d\theta = \pi R^2.$$

3) On $\omega = d\eta$ *et* $\varphi_2^*(\eta) = \frac{1}{2}R^2 d\theta$. *De la formule de stokes on obtient :*

$$\int_{D_2} \omega = \int_{\partial D_2} \theta = \int_{\varphi_2} \eta = \int_{[0,2\pi]} \varphi_2^*(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\theta = \pi R^2.$$

6.11 Formule de Green-Riemann

Comme application directe du théorème de Stokes on obtient la formule de Green-Riemann

Corollaire 6.11.1. *Soient D un domaine compact à bord de $\mathbb{R}^2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D et $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega_1^k(U)$. Alors*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \Big) dxdy$$

6.12 Formule de Gauss-Ostrogradski

Corollaire 6.12.1. *Soient D un domaine compact à bord de $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant D, X un champ de vecteurs sur U de classe C^k et $\omega = dxdydz \in \Omega_3^k(U)$. Alors*

$$\int_{\partial D} i_X \omega = \int_D (divX)\omega$$

i.e.

$$\int_{\partial D} (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy) = \int_D (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz$$

où $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$.

Bibliographie

[1] Y. Bougrov and S. Nikolski, *Cours de mathématiques supérieures*, Edition Mir (1983).

[2] H. Cartan, *Cours de Calcul Différentielle*, Collections Méthodes (1982).

[3] P. Colmez, *Élémént d'analyse et d'algèbre*,C.M.L.S., École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

[4] J. Dixmier, *Cours de Mathématiques du Premier Cycle 2ème année*, Gauthier-Villars, Bordas (1977).

[5] J. Dixmier, *Cours de Mathématiques du Premier Cycle 1ème année*, Gauthier-Villars, Bordas (1977).

[6] I. Kolar, V. Michor and J. Slovak, *Natural Operations In Differential Geometry*, Springer-Verlag (1993).

[7] D. Leborgne, *Calcul différentiel et géométrie*,Presses Universitaires de France (1982).

[8] S. Simon, *Géométrie et topologie 2 : MATH803.* Université de Savoie Année 07/08.

Mustapha DJAA, Professeur en mathématiques au centre universitaire Ahmed Zabana Relizane. Spécialiste en Géométrie, Analyse globale et Théorie spectrale. Directeur du laboratoire Géométrie Analyse Contrôle et Application à l'université Ahmed Medeghri Saida 2000-2011. Directeur du laboratoire Gestion des marchés financiers par l'application des mathématiques et l'informatique 20012-2017. Responsable du domaine mathématiques et informatique 2013-2017. Auteur de plusieurs publications internationales en géométrie, analyse et théorie spectrale. Auteur de l'Algèbre générale et Mesure et intégration publiés par l'office national des publications universitaires.