

---

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Département de mathématiques  
Année universitaire : 2021-2022  
Enseignant : Dr. A. ZAGANE



Niveau : 3<sup>ème</sup> année Licence  
Module : Géom Différentielle  
Travaux dirigés : 02

---

**Exercice 1.**

1) Soit l'application  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, 1 + z^2)$$

i) Déterminer le rang de l'application  $f$ .

ii) Déterminer les points où  $f$  est une submersion ou une immersion.

Même questions dans les cas suivants.

$$\begin{array}{ll} 2) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 & 4) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto (2x + yz, y + z) & (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 \\ 3) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 & 5) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x \cos y, \sin x, xy) & (x, y, z) \mapsto (x^2 + \sin y, z) \end{array}$$

**Exercice 2.**

Définir un difféomorphisme  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $f \circ g^{-1}$  est une projection sur  $\mathbb{R}^2$ , où  $f$  une application définie par :

$$1) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad 2) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x, yz) \quad (x, y, z) \mapsto (x + y^2, z)$$

**Exercice 3.**

Soit  $f$  une application définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, x + y, xy)$$

Définir un difféomorphisme  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $g^{-1} \circ f$  est une injection sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 4.**

Soient  $U \subset \mathbb{R}$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ .  $f$  est dite plongement si  $f$  est une immersion injective sur  $U$ .  $f$  est-elle une immersion, plongement dans les cas suivants.

$$\begin{array}{l} 1) f : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto ((2 \cos t - 1) \sin t, (2 \cos t - 1) \cos t) \\ 2) f : ]-\infty, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left( \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right) \\ 3) f : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array}$$