Pr. M. DJAA

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE –I

VARIÉTÉS DIFFÉRENTELLES

1ère Année Master

Publications du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane 2017-2018

بسم الله الرحمان الرحيم

Table des matières

Introduction

Je mets entre les mains de nos étudiants de mathématique "Master Géométrie Différentielle" ce document tout en éspérant qu'il sera pour eux un aide et un outil de base.

Notre objectif est de faire comprendre aux étudiants du master les concepts de la géométrie différentielle générale et le calcul différentiel sur les variétés réelles (ou complexes) par des méthodes simples et logiques.

Pr Mustapha Djaa
Professeur de mathématiques
Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane.
2017 - 2018

A tout chercheur de la vérité.

Chapitre 1

Complément de Topologie.

1.1 Espace Topologique

Définition 1.1.1. *Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $E, \emptyset \in \mathcal{T}$.
2. *Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, i.e.*

$$\{\theta_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \theta_i \in \mathcal{T}.$$

3. *Une réunion quelconque dŠéléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$, i.e.*

$$\{\theta_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \theta_i \in \mathcal{T}.$$

Un élément de $\mathcal{T}$ est appelé ouvert de E.

$(E, \mathcal{T})$ est dit séparé si deux éléments distincts peuvenet être séparés par deux ouverts disjoints, i.e.

$$\Big(x, y \in E;\ x \neq y\Big) \ \Rightarrow\ \Big(\exists \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{T};\ x \in \theta_1, y \in \theta_2 \text{ et } \theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset\Big).$$

Définition 1.1.2. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

• *$V \subset E$ est dit voisinage de $x \in E$, si il existe $\theta \subset \mathcal{T}$ tel que $x \in \theta \subset V$. L'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$.*

• *Une partie $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}(x)$ est dite système fondamentale de voisinage de x si tout élément de $\mathcal{V}(x)$ contient un élément de $\mathcal{W}$ i.e.*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{W} :\ W \subset V.$$

• *$F \subset E$ est dit férmé si $E - F \in \mathcal{T}$.*

• *Soit $A \subset E$, on dit que $x \in E$ est intérieur à A, si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé ensemble intérieur et noté A^o (c'est le plus grand ouvert contenu dans A).*

• *Soit $A \subset E$, on dit que $x \in E$ est adhérant à A, si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ on a $V \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérants à A est appelé adhérence de A et noté $\overline{A}$ (c'est le plus petit fermé qui contient A).*

• *On dit qu'une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base d'ouverts lorsque tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ i.e.*

$$\forall \theta \in \mathcal{T};\ \exists (U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{B} :\ \theta = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

• *(Première axiome de dénombrabilité) La topologie $\mathcal{T}$ est dite localement dénombrable si tout élèment $x \in E$ admet un système fondamentale dénombrable de voisinages ouverts.*

• *(Deuxième axiome de dénombrabilité) La topologie $\mathcal{T}$ est dite a base dénombable si elle admet une base dénombrable d'ouverts.*

Définition 1.1.3 (Topologie initale)**.** *Soient E un ensemble non vide, $(E_i \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques et $f_i : E \to E_i$ une famille d'applications. La topologie initiale sur E est la topologie la moins fine rendant continue les applications f_i, $\forall i \in I$. La base de la topologie initiale est donnée par :*

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(\theta_j);\ J \subset I,\ J \ \texttt{fini et}\ \theta_j \in \mathcal{T}_j\}.$$

Définition 1.1.4 (Topologie Finale)**.** *Soient E un ensemble non vide, $(E_i \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques et $f_i : E_i \to E$ une famille d'applications. La topologie finale sur E est la plus* *petite topologie rendant continue les applications* f_i, $\forall i \in I$. *La topologie finale est définie par :*

$$\mathcal{T} = \{\theta \subset E : \ f_i^{-1}(\theta) \in \mathcal{T}_i, \ \forall i \in I\}.$$

1.2 Toplogie Quotient

Définition 1.2.1 (Toplogie Quotient)**.** *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* E. *On appelle topologie quotient la topologie définie sur l'ensemble quotient* $E_{/\mathcal{R}}$ *par :*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = \{\theta \subset E_{/\mathcal{R}} : \ \pi^{-1}(\theta) \in \mathcal{T}\}$$

où π *désigne la surjection canonique définie par :* $\pi : x \in E \to \pi(x) = \dot{x} \in E_{/\mathcal{R}}$. $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ *n'est que la topologie finale rendant* π *continue.*

Exemple 1.2.1. *Sur* $\mathbb{R}$ *muni de la topologique séparée usuel* $\mathcal{T}_u$, *on définit la relation d'équivalence suivante :*

$$x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow \ x, y \leq 0, \ ou \ x, y > 0.$$

On a :

1. $E_{/\mathcal{R}} = \{\dot{0}, \dot{1}\}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = \{\emptyset, \{\dot{1}\}, \{\dot{0}, \dot{1}\}\}$
2. $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ *n'est pas une topologie séparée.*
3. π *n'est pas une application ouverte* ($\pi^{-1}(\pi(]-1, 0[)) =]-\infty, 0] \notin \mathcal{T}_u$)*).*

Définition 1.2.2. *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur* E. *Le saturé de* $A \subset E$ *est lensemble défini par :*

$$\mathcal{S}(A) = \bigcup_{x \in A} \dot{x} = \pi^{-1}(\pi(A))$$

Une partie A *est dite saturée si* $A = \mathcal{S}(A)$, *en d'autres termes si elle contient la classe d'équivalence de chacun de ses points.*

Remarque 1.2.1. *Si $B \subset E_{/\mathcal{R}}$ alors $\pi^{-1}(B)$ est saturé.*

Proposition 1.2.1. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Si $(E_{/\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ est séparé alors pour tout $x \in E$, $\dot{x}$ est un ensemble fermé pour la topologi $\mathcal{T}$.*

Preuve $\{\dot{x}\}$ est fermé pour la topologie séparée $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$, de la continuité de l'application π, en déduit que $\dot{x} = \pi^{-1}(\{\dot{x}\})$ est un fermé.
■

Proposition 1.2.2. *L'espace topologique quotient $(E_{/\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ est séparé si et seulement si pour tous $x, y \in E$, tels que $\dot{x} \neq \dot{y}$ alors il existe deux ouverts saturés disjoints contenant x et y respectivement.*

Preuve Soient $x, y \in E$, tels que $\dot{x} \neq \dot{y}$. Si $(E_{/\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ est séparé, alors il existent deux ouverts Ω_1, Ω_2 voisinage de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ respectivement tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Donc $\pi^{-1}(\Omega_1)$ et $\pi^{-1}(\Omega_2)$ sont deux ouverts saturés voisinage de x et y respectivement tels que $\pi^{-1}(\Omega_1) \cap \pi^{-1}(\Omega_2) = \emptyset$.

Inversemnet, si θ_1 et θ_2 sont deux ouverts saturés disjoints tels que $x \in \theta_1$ et $y \in \theta_y$, alors $\pi(\theta_1)$ et $\pi(\theta_2)$ sont deux ouverts disjoints voisinage de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ respectivement.
■

Définition 1.2.3. *Soient $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Une application $f : E \to F$ est dite compatible avec la relation $\mathcal{R}$ si :*

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Proposition 1.2.3. *Soient $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Si $f : E \to F$ est compatible avec la relation $\mathcal{R}$ alors*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : E_{/\mathcal{R}} & \to & F \\ \dot{x} & \to & \widetilde{f}(\dot{x}) = f(x) \end{array}$$

est une application bien définie (i.e. ne dépend pas du rerésentant choisi) telle que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.

Proposition 1.2.4. *Soient $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Une application $f : E_{/\mathcal{R}} \to F$ est continue pour la topologie quotient si et seulement si l'application $f \circ \pi : (E, \mathcal{T}) \to (F, \mathcal{T}')$ est continue.*

$$\begin{array}{ccc} & f\circ\pi & \\ E & \rightarrow & F \\ \pi & \searrow \quad \nearrow & f \\ & E_{/\mathcal{R}} & \end{array}$$

1.3 Construction des surfaces topologiques

Définition 1.3.1 (Action d'un groupe)**.** *Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et G un groupe. Une action de G sur E est un homomorphisme de groupes $h : G \to Aut(E) = \{f : E \to E,\ f$ **homéomorphisme**$\}$, on dit aussi que le groupe G opère sur E.*

On note :

a) $h : (g,x) \in G \times E \to g.x \in E)$.
b) $h(g)(x) = g.x\,;\quad (x \in E)$.
c) $h(g)(A) = g.A = \{g.x,\ x \in A\}\,;\quad (A \subset E)$.
d) $G.A = \{g.x,\ g \in G \text{ et } x \in A\}\,;\quad (A \subset E)$.

Remarque 1.3.1. *Comme $h(g)$ est un homéomorphisme donc si $U \subset E$ est un ouvert, alors $g.U$ est un ouvert.*

Exemple 1.3.1. $E = \mathbb{R}$, $(G,.) = (\mathbb{Z},+)$ *et* $h : \mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} h(p) : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ x & \rightarrow & p + x \end{array}$$

On a :

1. $g.A = \{g + x,\ x \in A\}$.
2. $\forall z \in \mathbb{R},\ \exists x \in [0,1[:\ \dot{x} = \dot{z}$.

Exemple 1.3.2. $E = \mathbb{R}$, $(G,.) = (\mathbb{Z}^*,\times)$ *et* $h : \mathbb{Z}^* \to Aut(\mathbb{R})$ *tels que :*

$$\begin{array}{rcl} h(p) : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \quad (p \in \mathbb{Z}^*) \\ x & \rightarrow & px \end{array}$$

Proposition 1.3.1. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et h une action d'un groupe G sur E. Alors la relation défine par :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists g \in G),\ y = g.x$$

est une relation d'équivalence telle que

$$\dot{x} = \{g.x,\ g \in G\} = G.x$$

l'ensemble quotient sera noté $E_{/G}$ et on a :

$$E_{/G} = \{G.x;\ x \in E\}.$$

Définition 1.3.2. *Une action d'un groupe G sur espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dite*

1) Totalement discontinue si :

$$\forall x \in E,\ \exists V \in \mathcal{V}(x) : \quad (\forall g_1 \neq g_2 \in G)\ g_1.V \cap g_2.V = \emptyset$$

2) Séparente si

$$\forall \dot{x} \neq \dot{y},\ \exists U \in \mathcal{V}(x), V \in \mathcal{V}(y) :\ G.U \cap G.V = \emptyset.$$

où

$$G.U = \{g.x,\ g \in G \texttt{ et } x \in U\} = \bigcup_{g \in G} g.U.$$

Exemples 1.3.1. *:*

1) L'action du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ sur l'espace topologique usuel $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ définie par

$$\begin{array}{rcl} h(p) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ x & \to & p + x \end{array}$$

• *est totalement discontinue, en effet si $x \in \mathbb{R}$, alors pour $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$ on a*

$$]x - \epsilon + n, x + \epsilon + n[\cap]x - \epsilon + m, x + \epsilon + m[= \emptyset, \quad \forall n \neq m \in \mathbb{Z}.$$

• *est totalement séparente, en effet, si $x, y \in [0, 1[$ tels que $0 \leq x < y < 1$, alors pour $0 < \epsilon < \min(\frac{x}{2}, \frac{y-x}{2}, \frac{1-y}{2}$ on a $(Z+]x - \epsilon, x + \epsilon[) \cap (Z+]y - \epsilon, y + \epsilon[) = \emptyset$.*

2) L'action du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ *sur l'espace topologique usuel* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ *définie par*

$$\begin{array}{rcl} h(p) : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^{\nvDash} \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ (x, y) & \rightarrow & (p + x, y) \end{array}$$

est une action totalement discontinue et séparente.

3) L'action du groupe $(\mathbb{Z}^2, +)$ *sur l'espace topologique usuel* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ *définie par*

$$\begin{array}{rcl} h((p, q)) : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ (x, y) & \rightarrow & (p + x, q + y) \end{array}$$

est une action totalement discontinue et séparente.

4) L'action du groupe $(\mathbb{Q}, +)$ *sur l'espace topologique usuel* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *définie par*

$$\begin{array}{rcl} h(p) : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \quad (p \in \mathbb{Q}) \\ x & \rightarrow & p + x \end{array}$$

En vertu de la densité de $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*, l' action n'est ni totalement discontinue ni séparente.*

5) Soit $G = \{-1, 1\}$*. L'action du groupe multiplicatif* $(G, .)$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *définie par :*

$$h(1) = Id_{\mathbb{R}}, \quad h(-1) = -Id_{\mathbb{R}}$$

est une action séparente non totalement discontinue, en effet :

1) Pour tout $\epsilon > 0$*, on* $(1.]-\epsilon, +\epsilon[) \cap ((-1).]-\epsilon, +\epsilon[) =]-\epsilon, +\epsilon[\neq \emptyset$*, donc l'action n'est pas totalement discontinue.*

2) Si $0 < x$ *alors pour* $0 < \epsilon < \frac{x}{2}$*, on* $]-\epsilon, +\epsilon[\cap G.]x - \epsilon, x + \epsilon[= \emptyset$*.*

3) Si $0 < x < y$ *alors pour* $0 < \epsilon < \frac{y-x}{2}$*, on* $G.]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap G.]y - \epsilon, y + \epsilon[= \emptyset$*.*

Théorème 1.3.1. *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* h *une action d'un groupe* G *sur* E*. Si l'action est séparente alors* $(E_{/G}, \mathcal{T}_{/G})$ *est un espace topologique séparé et* $\pi : x \in E \rightarrow \dot{x} \in E_{/G}$ *est une application ouverte.*

Preuve 1) Puisque l'action est séparente, on déduit que $(E_{/G}, \mathcal{T}_{/G})$ est un espace topologique séparé.

2) Daprès la Remarque 1.3.1, si U est un ouvert de E alors pour tout $g \in G$, $g.U$ est un ouvert de E d'où

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g.U$$

est un ouvert de E, donc π est une application continue.

■

1.4 Exemples de construction de surfaces topologiques

Exemple 1.4.1 (Construction du cercle.). *En reprend l'exemple 1.3.1 (1) :*

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ (p, x) & \to & p + x \end{array}$$

est une action totalement discontinue et séparente, l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \to & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{array}$$

est compatible avec la relation $\mathcal{R}$ définie par l'action h :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

On a :

1) f est une application continue et ouverte.

2) $f(\mathbb{R}) = f([0, 1]) = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.

3)$(\mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}, \mathcal{T}_{/\mathbb{Z}}) = \pi([0, 1])$ est un espace topologique compact.

4) L'application

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : \mathbb{R}_{/\mathbb{Z}} & \to & S^1 \\ \dot{x} & \to & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \end{array}$$

est un homéomorphisme topologique.

On dit que le cercle S^1 est obtenu par recollement du point 0 avec le point 1 (voir figure).

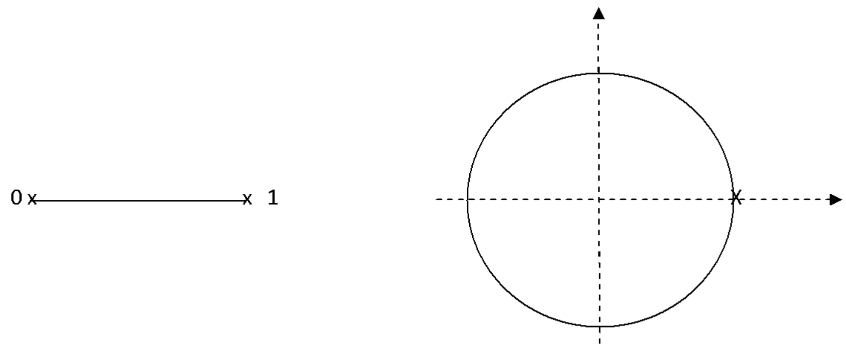


Fig. 1.1 – (Cercle)

Exemple 1.4.2 (Construction du cylindre.). *En reprend l'exemple 1.3.1 (2) :*

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ (p, (x, y)) & \to & (p + x, y) \end{array}$$

est une action totalement discontinue et séparente, l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \to & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{array}$$

est compatible avec la relation $\mathcal{R}$ *définie par l'action* h *:*

$$(x, x')\mathcal{R}(y, y) \Leftrightarrow (y = y'),\ (x - x' \in \mathbb{Z}).$$

On a :

1) f *est une application continue et ouverte.*

2) $f(\mathbb{R}^2) = f([0, 1] \times \mathbb{R}) = \mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$.

3)$(\mathbb{R}^2_{/\mathbb{Z}}, \mathcal{T}_{/\mathbb{Z}}) = \pi([0, 1] \times \mathbb{R})$ *est un espace topologique non compact.*

4) L'application

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : \mathbb{R}^2_{/\mathbb{Z}} & \to & \mathcal{C} \\ \dot{x} & \to & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y) \end{array}$$

est un homéomorphisme topologique.

On dit que le cylindre $\mathcal{C}$ *est obtenu par recollement de la droite* $\{0\} \times \mathbb{R}$ *avec la droite* $\{1\} \times \mathbb{R}$ *(voir figure).*

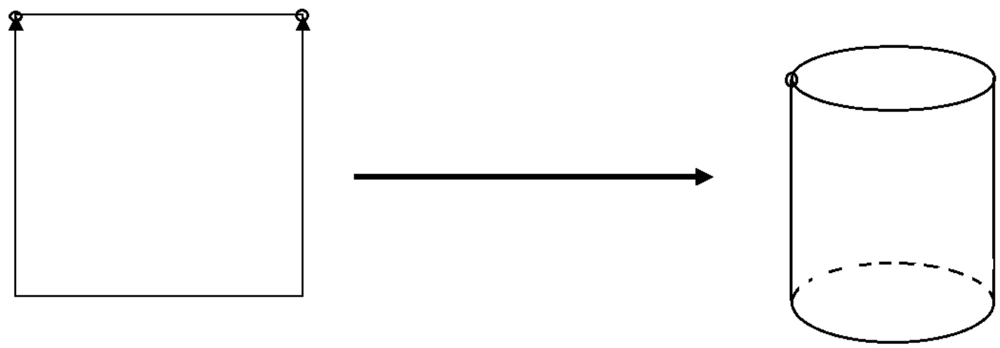


FIG. 1.2 – (Cylindre)

Exemple 1.4.3 (Construction du tore.). *En reprend l'exemple 1.3.1 (3) :*

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ ((p,q),(x,y)) & \rightarrow & (p+x, q+y) \end{array}$$

est une action totalement discontinue et séparente, l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \rightarrow & (1+\cos(2\pi x)\cos(2\pi y), 1+\cos(2\pi y)\sin(2\pi x), \sin(2\pi y)) \end{array}$$

est compatible avec la relation $\mathcal{R}$ définie par l'action h :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow (x-x', y-y') \in \mathbb{Z}^2.$$

On a :

1) f est une application continue et ouverte.

2) $f(\mathbb{R}^2) = f([0,1]\times[0,1]) = T^1$.

3)$(\mathbb{R}^2_{/\mathbb{Z}^2}, \mathcal{T}_{/\mathbb{Z}^2}) = \pi([0,1]\times[0,1])$ est un espace topologique compact.

4) L'application

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : \mathbb{R}^2_{/\mathbb{Z}^2} & \rightarrow & T^1 \\ (\dot{x,y}) & \rightarrow & (1+\cos(2\pi x)\cos(2\pi y), 1+\cos(2\pi y)\sin(2\pi x), \sin(2\pi y)) \end{array}$$

est un homéomorphisme topologique.

On dit que le tore T^1 est obtenu par recollement des point $\{0\}\times[0,1]$ avec $\{1\}\times[0,1]$ et les points $[0,1]\times\{0\}$ avec $[0,1]\times\{1\}$ (voir figure).

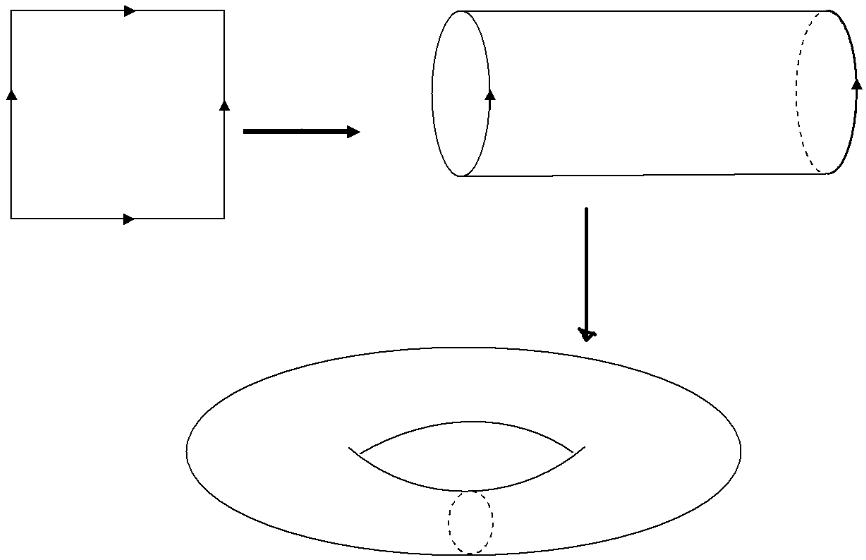


FIG. 1.3 – (Tore)

De même l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \rightarrow & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{array}$$

est compatible avec la relation $\mathcal{R}$ définie par l'action h, et on a :

1) g est une application continue et ouverte.

2) $g(\mathbb{R}^2) = g([0, 1] \times [0, 1]) = S^1 \times S^1$.

4) L'application

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{g} : \mathbb{R}^2_{/\mathbb{Z}^2} & \rightarrow & S^1 \times S^1 \\ (\dot{x, y}) & \rightarrow & (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{array}$$

est un homéomorphisme topologique, ($\mathbb{R}^2_{/\mathbb{Z}^2} \cong T^1 \cong S^1 \times S^1$).

Exemple 1.4.4 (Construction de la bande de Mobius.). *Soit $E = [0, 1] \times \mathbb{R}$ l'espace topologique muni de la topologie usuelle induite par celle de $\mathbb{R}^2$, on définit l'action h par :*

$$\begin{array}{rcl} h : G = \{1, 1\} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \quad (p \in \mathbb{Z}) \\ (p, (x, y)) & \to & \left\{ \begin{array}{cc} (x, y), & si \quad p = 1, \ (x, y) \in E \\ (x, y), & si \quad p = -1, \ 0 < x < 1 \\ (1 - x, -y), & si \quad p = -1, \ x \in \{0, 1\}. \end{array} \right. \end{array}$$

est une action totalement discontinue et séparente, l'application. L'espace topologique $(\mathbb{R}^2_{/G}, \mathcal{T}_{/G})$ *n'est pas compact.*

On dit que la bande de Mobius est obtenu par recollement de la droite $\{0\} \times \mathbb{R}$ *avec le droite* $\{1\} \times \mathbb{R}$ *en inversant le sens de la direction (voir figure).*

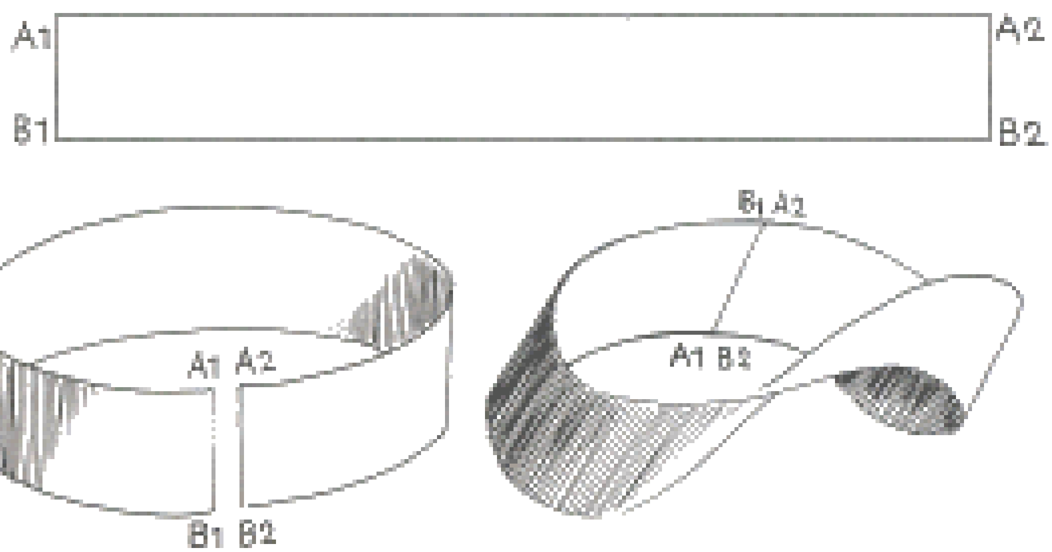


FIG. 1.4 – (Bande de Mobius)

Exemple 1.4.5 (Construction de la bouteille de Klein.)**.** *Soit* $E = [0, 1] \times [0, 1]$ *l'espace topologique muni de la topologie usuelle induite par celle de* $\mathbb{R}^2$*, on définit la relation d'équivalence par'action* h *par :*

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} (x, y) = (x', y'), & si \quad (x, y), (x', y') \in E \\ (x', y') = (1 - x, y) & si \quad x \in \{0, 1\}, \ 0 < y < 1 \\ (x', y') = (1 - x, 1 - y), & si \quad x \in]0, 1[, \ y \in \{0, 1\}. \\ (x, y), (x', y') \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}. & \end{array} \right.$$

L'espace topologique $(\mathbb{R}^2_{/\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{/\mathcal{R}})$ *est séparé compact.*

On dit que la bouteille de Klein est obtenu par recollement du cercle $S^1 \times \{0\}$ avec le cercle droite $S^1 \times \{1\}$ en inversant le sens de la direction (voir figure).

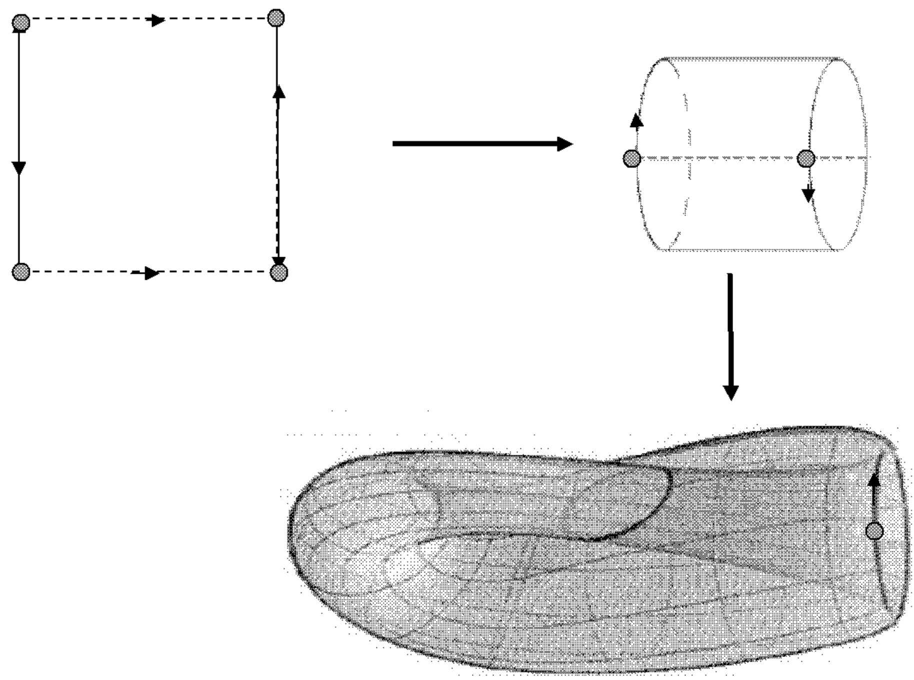


Fig. 1.5 – (Bouteille de Klein)

Exemple 1.4.6 (Plan projectif)**.** *Soient la sphère $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^3$ et $G = \{1,-1\}$ le groupe multiplicatif. l'action h définie par :*

$$\begin{array}{rcl} h : G \times S^2 & \to & S^2 \\ (p,(x,y,z)) & \to & (px,py,pz) \end{array}$$

est une action totalement discontinue et séparente. L'espace quotient $P^2(\mathbb{R}) = S^2_{/G}$ est un espace compact appelé plan projectif réel.Le plan projectif $P^2(\mathbb{R})$ peut être obtenu à partir de la relation d'équivalence sur $E = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ définie par :

$$(x,y,z)\mathcal{R}(x',y',z') \Leftrightarrow (\exists\, \lambda \in \mathbb{R}) :\ (x',y',z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

i.e.

$$(P, P' \in \mathbb{R}^3 - \{0\}),\ P\,\mathcal{R}\,P' \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}//\overrightarrow{OP'}.$$

$$\begin{array}{rcl} \pi : E = \mathbb{R}^3 - \{0\} & \to & E_{/\mathcal{R}} \\ (x,y,z) & \mapsto & \overbrace{(x,y,z)}^{\cdot} \end{array}$$

$$E_{/\mathcal{R}} = \pi(S^2) = S^2_{/G}.$$

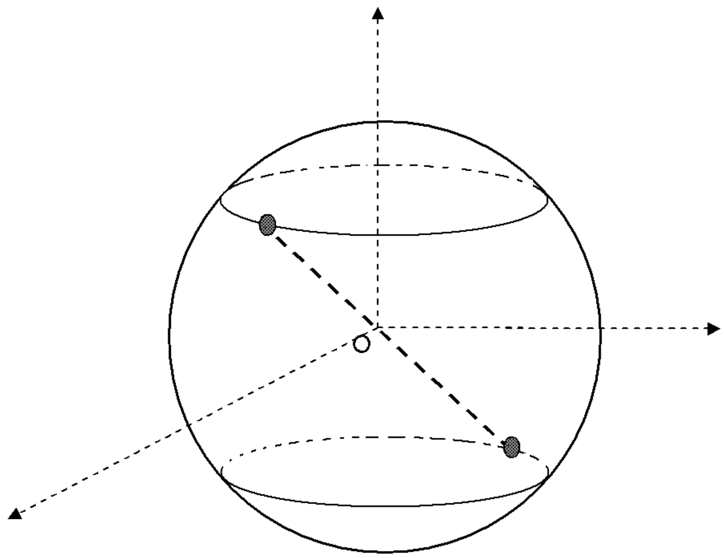


Fig. 1.6 – (Plan projectif)

1.5 Partition de l'unité

Définition 1.5.1. *Un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit localement fini, si pour tout $x \in E$ il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap U_i = \emptyset$ sauf pour un nombre fini (i.e. $\{i \in I;\ V \cap U_i \neq \emptyset\}$ est un ensemble fini).*

Définition 1.5.2. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de E. Un recouvrement $\{\widetilde{U}_j\}_{j\in J}$ est dit refinement de $\{U_i\}_{i\in I}$ si :*

$$(\forall j \in J),\ (\exists i \in I) :\ \widetilde{U}_j \subset U_i.$$

Définition 1.5.3. *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit paracompact si tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ admet un refinement $\{\widetilde{U}_j\}_{j\in J}$ d'ouverts localement fini.*

Exemple 1.5.1. $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle est un espace paracopact.*

Proposition 1.5.1. *Tout espace topologique séparé, localement compact et admet une base dénombrale d'ouverts est un espace topologique paracompact.*

Pour la preuve de cette proposition, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 1.5.1. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé localement compact. Si U est un ouvert de E, alors pour tout $x \in U$, il existe un voisinage compact $F \in \mathcal{V}(x)$ tel que $x \in F \subset U$.*

Preuve Soient $x \in U$ et B un voisinage compact de x. Il existe un voisinage ouvert $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $x \in W \subset B \cap U$. Comme E est séparé, on peut alors séparé x est le compact $W^C \cap B$ par deux ouverts disjoint, i.e.

$$\exists\ \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{T} :\ x \in \theta_1 \subset W,\ W^C \cap B \subset \theta_2 \ et\ \theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset.$$

On a :

$$W^C \cap B \subset \theta_2 \Rightarrow \theta_2^C \subset W \cup B^C$$

d'où $F = \theta_2^C \cap B$ est un compact voisinage de x tel que :

$$(\theta_1 \cap B) \subset (\theta_2^C \cap B) \subset (W \cap B) \subset U.$$

■

Du Lemme 1.5.1 on déduit

Corollaire 1.5.1. *Dans un espace localement compact tout point possède un système fondamental de voisinages compacts.*

Lemme 1.5.2. *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique localement compact à base de topologie dénombrable. Alors $(E,\mathcal{T})$ admet un recouvrement dénombrable de compacts $\{K_n\} \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}):\ K_n \subset K^0_{n+1}.$$

Preuve Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de topologie. Puisque $(E,\mathcal{T})$ est localement compact alors tout point $x \in E$ admet un voisinage compact $B_x \in \mathcal{V}(x)$. On pose :

$$I = \{m \in \mathbb{N},\ (\exists\, x \in E) : \theta_m \subset B_x\}.$$

Les familles $\{B_x\}_{x\in E}$,$\{B^0_x\}_{x\in E}$ et $\{\theta_i\}_{i\in I}$ sont des recouvrements de E. Comme I est denombrable alors $\{B_x\}_{x\in E}$ admet un sous recouvrement au plus dénombrale $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Pour le compact $K_0 = B_0$, il existe un ensemble fini J_0 tel que $K_0 \subset \cup_{j\in J_0} B^0_j$. De même pour le compact $K_1 = B_1 \cup_{j\in J_0} B_j$ il existe un ensemble fini J_1 tel que $K_1 \subset \cup_{j\in J_1} B^0_j$ et on a $K_0 \subset K^0_1$.

Par récurence, on construit une suite d'ensemble compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}):\ B_n \subset K_n \subset K^0_{n+1}.$$

■

Preuve [Proposition 1.5.1] Soit $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Du Lemme 1.5.2, il existe un recouvrement de E par une famille d'ensemble compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $(\forall\, n \in \mathbb{N}),\ K_n \subset K^0_{n+1}$.

Du recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$, on peut extraire un sous recouvrement fini $(U_i)_{i\in I_1}$ tel que $K_1 \subset \bigcup_{i\in I_1} U_i$. On pose

$$\widetilde{U}^1_i = U_i \cap K^0_2, \quad (i \in I_1); \qquad W_1 = \bigcup_{i\in I_1} \widetilde{U}^1_i.$$

On a $K_1 \subset W_1 \subset K^0_2$, $(K_2 - W_1)$ est un compact tel que $(K_2 - W_1) \subset K^C_1$. Soit alors I_2 un ensemble fini tel que $(K_2 - W_1) \subset \bigcup_{i\in I_2} U_i$. Si on note par $\widetilde{U}^2_j = K^C_1 \cap U_j \cap K^0_3$ $(j \in I_2)$ et $W_2 = \bigcup_{j\in I_2} \widetilde{U}^2_j$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \widetilde{U}^2_j \cap K_1 = \emptyset, & (\forall j \in I_2) \\ \widetilde{U}^2_j \subset K_3, & (\forall j \in I_2) \\ \widetilde{U}^2_j \subset U_j, & (\forall j \in I_2) \\ K_2 \subset W_1 \cup W_2 \end{cases}$$

Ainsi par récurence, on construit une famille $\{I_p\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ dénombrable de sous ensemble de I et une famille dénombrable d'ouverts $\{\widetilde{U}_j^p\}_{\substack{p\in\mathbb{N}^*\\ j\in I_p}}$ tels que :

$$\begin{cases} \widetilde{U}_j^p \cap K_m = \emptyset, & (\forall p > m),\ (\forall j \in I_p) \\ \widetilde{U}_j^p \subset K_{p+1}^0, & (\forall j \in I_p) \\ \widetilde{U}_j^p \subset U_j \quad , & (\forall j \in I_p) \\ W_p = \bigcup_{j\in I_p} \widetilde{U}_j^p & \\ K_m \subset \bigcup_{p\leq m} W_p & \end{cases}$$

On a

$$E \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} K_m^0 \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} K_m \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} W_p = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{j\in I_p} \widetilde{U}_j^p.$$

Soit $x \in E$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

1) $x \in K_m^0 \subset K_m$.
2) $\forall (p > m)$, $\forall (j \in I_p)$ $K_m \cap \widetilde{U}_j^p = \emptyset$.

Ce qui montre que $\{\widetilde{U}_j^p\}_{\substack{p\in\mathbb{N}^*\\ j\in I_p}}$ est un refinement localement fini de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

■

Définition 1.5.4. *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $f : E \to \mathbb{R}$. On appel support de f l'ensemble fermé :*

$$supp(f) = \overline{\{x \in E,\ f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.5.5. *Une partition de l'unité d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est une famille $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ tel que :*

1) $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement localement fini d'ouverts de E.

2) $(\forall i \in I)$, $f_i : E \to \mathbb{R}_+$ est une application continue à support compact, $supp(f_i) \subset U_i$.

3) $(\forall x \in E)$, $\sum_i f_i(x) = 1$.

Remarque : De la condition (1), on déduit que $\sum_i f_i(x)$ est une somme finie.

Définition 1.5.6. *Une partition de l'unité* $\{(U_i, f_i)\}_i$ *est dite subordonnée à un recouvrement* $\{\overline{U_\alpha}\}_\alpha$*, si* $\{U_i\}_i$ *est un refinement du recouvrement* $\{\overline{U_\alpha}\}_\alpha$*.*

Proposition 1.5.2. *Pour tout* $(\epsilon > 0)$*, il existe une fonction* $g_\epsilon : \mathbb{R}^n \to R$ *de classe* C^∞ *telle que :*

$$\begin{cases} g_\epsilon(x) \leq 1. \\ g_\epsilon(x) = 1 \quad si\ \|x\| < \epsilon \\ g_\epsilon(x) = 0 \quad si\ \|x\| > 3\epsilon \end{cases}$$

Preuve Soit h la fonction de classe C^∞ définie par

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h(t) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{1-t^2}) & si\ |t| < 1. \\ 0 & si\ |t| \geq 1. \end{cases} \end{array}$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{h} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \widetilde{h}(t) = \Big(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)ds \Big)^{-1} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} h(s)ds \\ \widehat{h} : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \widehat{t} = \widetilde{h}(2-t) \end{array}$$

alors $\widetilde{h}$ et $\widehat{h}$ sont des fonctions de classe C^∞ telles que :

$$\begin{cases} \widetilde{h}(t) = & \Big(\int_{-1}^{+1} h(s)ds \Big)^{-1} \int_{-\infty}^{t} h(s)ds \\ \widetilde{h}(t) \leq 1 & si \quad t \in \mathbb{R} \\ \widetilde{h}(t) = 0 & si \quad t \leq -1 \\ \widetilde{h}(t) = 1 & si \quad t \geq +1 \\ \widehat{h}(t) \leq 1 & si \quad t \in \mathbb{R} \\ \widehat{h}(t) = 1 & si \quad t \leq +1 \\ \widehat{h}(t) = 0 & si \quad t \geq +3 \end{cases}$$

Finalement, si on pose

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) = \widehat{h}(\|x\|) \\ g_\epsilon : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g_\epsilon(x) = g(\dfrac{x}{\epsilon}) = \widehat{h}(\dfrac{\|x\|}{\epsilon}) \end{array}$$

alors g et g_ϵ sont des fonctions de classe C^∞ telles que :

$$\begin{cases} g(x) \leq 1 & si \quad x \in \mathbb{R}^n \\ g(x) = 1 & si \quad \|x\| \leq 1 \\ g(x) = 0 & si \quad \|x\| \geq 3 \\ g_\epsilon(x) \leq 1 & si \quad x \in \mathbb{R}^n \\ g_\epsilon(x) = 1 & si \quad \|x\| \leq \epsilon \\ g_\epsilon(x) = 0 & si \quad \|x\| \geq 3\epsilon \end{cases}$$

■

Chapitre 2

Notion de Variété.

2.1 Variété Différentiable

Définition 2.1.1 (Carte)**.** *Soit M un espace topologique séparé. Une carte de dimension n dans M est un couple (U, φ) tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *U (resp $\varphi(U)$) est un ouvert de M resp ($\mathbb{R}^n$).*
2. *$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.*

Définition 2.1.2 (Compatibilité)**.** *Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) de même dimension n sont dite compatibles si*

$$U \cap V = \varnothing$$

ou

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme de classe C^∞. L'application $\psi \circ \varphi^{-1}$ est dite application de transition.

Définition 2.1.3 (Atlas)**.** *Soit M un espace topologique séparé. Une famille de cartes $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ est dite atlas différentiable de dimension n si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$M = \bigcup_{i \in I} U_i$*
2. *$\forall i \in I$, (U_i, φ_i) est une carte de dimension n.*
3. *$\forall i, j \in I$, (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.*

Remarque 2.1.1. *:*

1) Deux carte (U, φ) et (V, ψ) compatibles tel que $U \cap V \neq \emptyset$ ont même dimension.

2) Dans le cas où M est un espace topolgique séparé et connexe alors la condition (2) de la Définition 2.1.3 est trivialement vérifiée.

3) La compatibilité est une relation d'équivalence.

Définition 2.1.4. *Soient M un espace topologique séparé et $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un atlas de dimension n. Une carte (V, ψ) est dite compatible avec l'atlas $\mathcal{U}$ si elle est compatible avec toutes les cartes (U_i, φ_i), $i \in I$.*

Définition 2.1.5. *Soient M un espace topologique séparé, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux atlas de même dimension n. On dit que $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont compatible si toute carte de l'atlas $\mathcal{U}_1$ et compatible avec $\mathcal{U}_2$ ou l'inverse.*

Proposition 2.1.1 (Atlas maximal)**.** *Si $\mathcal{U}$ est un atlas sur un espace topologique séparé M, alors il existe sur M un unique atlas maximal $\mathcal{U}_{max}$ contenant $\mathcal{U}$ définit par*

$$\mathcal{U}_{max} = \{(U, \varphi) \text{ carte sur } M \text{ compatible avec } \mathcal{U}\}.$$

Preuve Soient $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{U}_{max}$ tels que $U \cap V \neq \emptyset$. D'après la Définition 2.1.1 on déduit que

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

est un homéomorphisme. Donc pour démontrer que l'application $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme il suffit qu elle soit un difféomorphisme local.

Soit $x \in U \cap V$, il existe $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U_i$. Comme (U, φ) et (V, ψ) sont compatible avec $\mathcal{U}$ alors $\psi \circ \varphi_i^{-1}$ et $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ sont des difféomorphismes d'où

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \varphi^{-1})$$

est un difféomorphisme au voisinage de $\varphi(x)$. ∎

Définition 2.1.6 (Variété)**.** *Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique séparé M muni d'un atlas différentiable $\mathcal{U}$ de dimension n, on la note par le couple $(M, \mathcal{U})$. Dans le cas général on note*

1) $atl(M) = \mathcal{U}_{max}$ l'atlas maximal de M.

2) $atl(M, x) = \{(U, \varphi) \in \mathcal{U}_{max},\ x \in U\}$.

Remarque 2.1.2. *Toute variété différentiable est un espace topologique localement compact. En effet si $(U, \varphi) \in atl(M)$ alors $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est localement compact.*

Exemples 2.1.1. *:*

1) $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n munie de l'atlas $\mathcal{U} = \{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$.

2) Tout espace vecoriel E de dimension n est une variété de dimension n munie de l'atlas $\mathcal{U} = \{(E, I)\}$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} I^{-1} : \mathbb{R}^n & \to & E \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E.

3) L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) = \{(a_{ij})_{i,j};\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ est une variété de dimension $n \times m$, munie de l'atlas $\mathcal{U} = \{(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), I)\}$ où I désigne l'application canonique définie par

$$I : (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \to (a_{11}, ..., a_{1m}, ..., a_{n1}, ..., a_{nm}) \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

4) Si $(M,\mathcal{U})$ est une variété de dimension n, alors tout ouvert U de M est une variété de dimension n munie de l'atlas :

$$\mathcal{U}_{/U} = \{(U \cap V, \Psi_{/U\cap V});\ (V, \Psi) \in \mathcal{U}\}.$$

5) L'ensemble des matrices carrées inversible $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R});\ det(A) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, donc $GL_n(\mathbb{R})$ est une variété de dimension n^2.

6) La sphère $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ est une variété de dimension 1 munie des projections suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^+ : U_y^+ = \{(x, y) \in S^1;\ y > 0\} & \to &]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_y^+)^{-1} :]-1, 1[& \to & U_y^+ \\ x & \mapsto & (x, \sqrt{1 - x^2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_y^- : U_y^- = \{(x, y) \in S^1;\ y < 0\} & \to &]-1, 1[\subset \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_y^-)^{-1} :]-1, 1[& \to & U_y^- \\ x & \mapsto & (x, -\sqrt{1 - x^2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\varphi_x^+ : U_x^+ == \{(x,y) \in S^1;\ x > 0\} & \to &]-1,1[\subset \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}(\varphi_x^+)^{-1} :]-1,1[& \to & U_x^+ \\ y & \mapsto & (\sqrt{1-y^2}, y)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\varphi_x^- : U_x^- == \{(x,y) \in S^1;\ x < 0\} & \to &]-1,1[\subset \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}(\varphi_x^-)^{-1} :]-1,1[& \to & U_x^- \\ y & \mapsto & (-\sqrt{1-y^2}, y)\end{array}$$

On a :

a) $S^1 = U_y^+ \cup U_y^- \cup U_x^+ \cup U_x^-$

b) $U_y^+ \cap U_y^- = \emptyset$, $U_x^+ \cap U_x^- = \emptyset$

c)

$$\begin{array}{rcl}\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^+)^{-1} :]0,1[& \to &]0,1[\\ z & \mapsto & \sqrt{1-z^2}\end{array}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞.

De la même on démontre que $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$, $\varphi_y^+ \circ (\varphi_x^-)^{-1}$ *et* $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ *sont des difféomorphismes de classe* C^∞.

Donc S^1 *est une variété de dimension* 1 *muni de l'atlas :*

$$\mathcal{U} = \{(U_y^+, \varphi_y^+), (U_y^-, \varphi_y^-), (U_x^+, \varphi_x^+), (U_x^-, \varphi_x^-)\}$$

7) Dans le cas général La sphère $S^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \Sigma_i x_i^2 = 1\}$ *est une variété de dimension n munie des projections suivantes :*

$$\begin{array}{rcl}\varphi_i^\epsilon : U_i^\epsilon & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_0, ..., x_n) & \mapsto & (x_0, ..x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)\end{array}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ *et* $U_i^\epsilon = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \epsilon x_i > 0\}$. *L'atlas* $\mathcal{U}$ *est donné par :*

$$\mathcal{U} = \{(U_i^\epsilon, \varphi_i^\epsilon);\ i = 0, ..., n \text{ et } \varepsilon = \pm 1\}.$$

8) Soient $(M_1,\mathcal{U}_1)$ *et* $(M_2,\mathcal{U}_2)$ *deux variétés de dimensions* n_1 *et* n_2 *respectivement. L'espace topologique produit* $M_1 \times M_2$ *est une variété de dimension* $n_1 \times n_2$ *munie de l'atlas produit suivant :*

$$\mathcal{U} = \{(U \times V, \varphi \times \psi);\ (U,\varphi) \in \mathcal{U}_1 \text{ et } (V,\psi) \in \mathcal{U}_2\}$$

où :

$$\begin{array}{rcl} \varphi \times \psi : U \times V & \rightarrow & \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \\ (x,y) & \mapsto & (\varphi(x), \psi(y)) \end{array}$$

9) Le tore $T^2 = S^1 \times S^1$

10) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^∞*, alors le graphe* $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in I\}$ *est une variété de dimension* 1 *munie de l'atlas* $\mathcal{U} = \{(\Gamma, \varphi)\}$ *où*

$$\varphi : (x,y) \in \Gamma \rightarrow \varphi(x,y) = x \in I$$

.

11) En général soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ *une fonction de classe* C^∞*, alors le graphe* $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m};\ x \in U\}$ *est une variété de dimension* n *munie de l'atlas* $\mathcal{U} = \{(\Gamma, \varphi)\}$ *où*

$$\varphi : (x,y) \in \Gamma \rightarrow \varphi(x,y) = x \in U$$

.

12) Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ 2x, & si\ x < 0 \end{cases} \end{array}$$

φ *est un homéomorphisme d'inverse*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} : \mathbb{R} : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ \frac{x}{2}, & si\ x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Ce qui montre que $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ *est un atlas sur* $\mathbb{R}$*. Comme* φ *n'est pas différentiable en* 0*, on déduit que les cartes* $(\mathbb{R}, \varphi)$ *et* $(\mathbb{R}, Id)$ *ne sont pas compatibles.*

12) Soit

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x^2, & si\ x \geq 0 \\ -x^2, & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

ψ est un homéomorphisme d'inverse

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} : \mathbb{R} : & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x}, & si\ x \geq 0 \\ -\sqrt{x}, & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Ce qui montre que $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$ est un atlas sur $\mathbb{R}$. Comme ψ est de classe C^1 et ψ^{-1} n'est pas différentiable en 0, on déduit que les cartes $(\mathbb{R}, \varphi)$ et $(\mathbb{R}, Id)$ ne sont pas compatibles.

2.2 Construction de variétés

Théorème 2.2.1. *Soient M un ensemble et $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ une famille de cartes. Si $\mathcal{U}$ vérifie les conditions suivantes :*

1. *$M = \cup_{i\in I} U_i$*
2. *$\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\forall i, j \in I$*
3. *$\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ est une bijection, $\forall i \in I$*
4. *$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^∞ difféomorphisme, $\forall i, j \in I$*
5. *Pour tout compact $F \subset \varphi_i(U_i)$, $\varphi_j(U_j \cap \varphi_i^{-1}(F))$ est un férmé de $\varphi_j(U_j)$, $\forall i, j \in I$.*

Alors il existe une unique structure de variété différentiable de classe C^∞ sur M d'atlas $\mathcal{U}$.

Preuve Il suffit de construire une topologie séparée sur M telle que $(M,\mathcal{U})$ soit une variété. On pose :

1. $\mathcal{T}_i = \{\theta \in U_i;\ \varphi_i(\theta)\ \texttt{est un ouvert de}\ \mathbb{R}^n\}$. $\mathcal{T}_i$ est la topologie séparée induite par φ_i sur U_i telle que $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ est un homéomorphisme.
2. $\mathcal{T} = \langle \cup_{i\in I} \mathcal{T}_i \rangle$ la topologie engendré par la famille $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$

On a $\mathcal{T}$ est une topologie sur M telle que laréstriction $\mathcal{T}_{/U_i} = \mathcal{T}_i$ est une toplopgie séparée.

Reste à montrer que s'il existe $x, y \in M$ et $i, j \in I$ tels que :

$$x \neq y, \ \ i \neq j, \quad x \in U_i \cap U_j^c \quad \text{et} \quad y \in U_j \cap U_i^c$$

alors x et y peuvent être séparé par deux voisinages distincts.

Soit $\overline{B}(\varphi_i(x), \varepsilon) \subset \varphi_i(U_i)$ une boule fermé compacte dans $\mathbb{R}^n$, donc $B = \varphi_i^{-1}(\overline{B}(\varphi_i(x), \varepsilon))$ est un fermé pour la topologie $\mathcal{T}_i$. De la condition (5) du Théorème 2.2.1 on déduit que $\varphi_j(B \cap U_j)$ est un fermé de $\varphi_j(U_j)$, ainsi $B \cap U_j$ est un férmé voisinage de x et $(U_j - B) \in \mathcal{T}_j$ est un ouvert voisinage de y tels que $B \cap (U_j - B) = \emptyset$. L'unicité de la structure de variété provient de l'unicité de la topologie initiale.

■

Exemple 2.2.1. *Soient* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ *et* $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ *tels que* $U_1 = S^1 - \{(1, 0)\}$, $U_2 = S^1 - \{(-1, 0)\}$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1} :]0, 2\pi[& \to & U_1 \\ \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2^{-1} :]-\pi, \pi[& \to & U_2 \\ \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} :]0, 2\pi[- \{\pi\} & \to &]-\pi, \pi[- \{0\} \\ \theta & \mapsto & \theta - \pi \end{array}$$

Exemple 2.2.2 (Projection stéréographique)**.** *Soient* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ *et* $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ *tels que* $U_1 = S^1 - \{(0, 1)\}$, $U_2 = S^1 - \{(0, -1)\}$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \dfrac{x}{1 - y} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} & \to & U_1 \\ z & \mapsto & (\dfrac{2z}{1 + z^2}, \dfrac{z^2 - 1}{1 + z^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \dfrac{x}{1 + y} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}$$

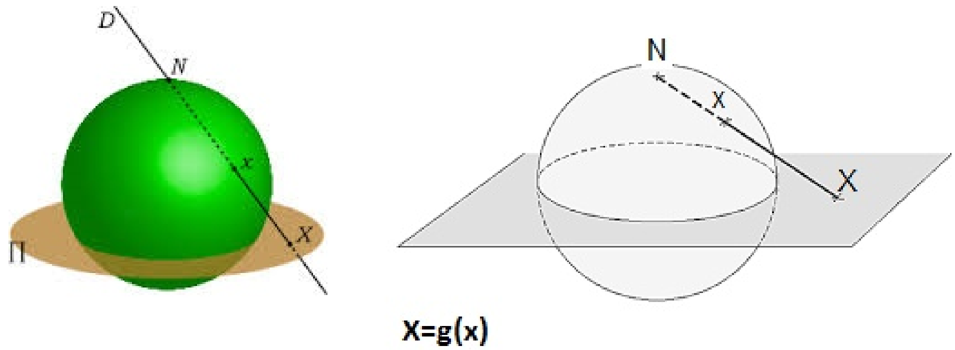


FIG. 2.1 – ([Projection stéréographique)

Exemple 2.2.3 (Projection stéréographique de S^n)**.** *Dans le cas général, soient* $S^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \Sigma_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ *et* $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ *tels que* $U_1 = S^n - \{(0, ..., 0, 1)\}$, $U_2 = S^n - \{(0, ..., 0, -1)\}$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_0, ..., x_n) & \longmapsto & (\frac{x_0}{1 - x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{1 - x_n}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_1 \\ (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & (\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, ..., \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2}) \end{array}$$

où

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1 - x_n^2}{(1 - x_n)^2} = \frac{1 + x_n}{1 - x_n}.$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_0, ..., x_n) & \longmapsto & (\frac{x_0}{1 + x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{1 + x_n}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U_2 \\ (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & (\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, ..., \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}) \end{array}$$

où

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1 - x_n^2}{(1 + x_n)^2} = \frac{1 - x_n}{1 + x_n}.$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n_* & \longrightarrow & \mathbb{R}^n_* \\ (y_1, ..., y_n) & \longmapsto & (\frac{y_1}{\|y\|^2}, ..., \frac{y_n}{\|y\|^2}) \end{array}$$

Exemple 2.2.4 (Projection orthogonale de S^n)**.**

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^+ : U_i^+ = \{x \in S^n,\ x_i > 0\} & \to & D \subset \mathbb{R}^n \\ (x_0, ..., x_n) & \mapsto & (x_0, .., \widehat{x_i}, .., x_n) = (x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^- : U_i^- = \{x \in S^n,\ x_i < 0\} & \to & D \subset \mathbb{R}^n \\ (x_0, ..., x_n) & \mapsto & (x_0, .., \widehat{x_i}, .., x_n) = (x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n) \end{array}$$

où $D = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|z\| = \sum_i z_i^2 < 1\}$. $\{(U_i^\epsilon, \varphi_i^\epsilon);\ \varepsilon = \pm 1,\ i = 0, ..., n\}$ *est un atlas de* S^n*.*

Exemple 2.2.5 (Cylindre)**.** *Soient* $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\} = S^1 \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1} : U_1 =]0, 2\pi[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \to & (\cos(x), \sin(x), y) \\ \varphi_2^{-1} : U_2 =]-\pi, \pi[\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \to & (\cos(x), \sin(x), y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (]0, 2\pi[-\{\pi\}) \times \mathbb{R} & \to & (]-\pi, \pi[-\{0\}) \times \mathbb{R} \\ (\theta, y) & \mapsto & (\theta - \pi, y) \end{array}$$

Exemples 2.2.1. .

1) Le tore $T^n = S^1 \times .... \times S^1$ *produit de* $(n+1)$ *cercle* S^1 *est une variété produit de dimension* $(n+1)$*.*

2) La bande de Mobius est une variété de dimension 2 *plongée dans* $\mathbb{R}^3$*.*

3) La bouteuille de Klein est une variété de dimension 2 *plongée dans* $\mathbb{R}^4$*.*

4) Soient $(M,\mathcal{U})$ *une variété de dimension* n *et* U *un ouvert de* M*. Alors* $(U,\widetilde{\mathcal{U}})$ *est une variété de dimension* n*, où* $\widetilde{\mathcal{U}} = \{(U \cap V, \psi_{/U\cap V}),\ (V, \psi) \in \mathcal{U}\}$*.*

2.3 Applications Différentiables

Dans la suite les variétés considérées sont supposées paracompacts.

Définition 2.3.1. *Soient* $(M^m, atl(M))$, $(N^n, atl(N))$ *deux variétés de dimension* m *et* n *respectivement. Une application* $f : M \to N$ *est dite différentiable de classe* C^k *(resp* C^∞*) en* $x \in M$ *si pour tout* $(U, \varphi) \in atl(M, x)$ *et* $(V, \psi) \in atl(N, f(x))$, *l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

est de de classe C^k *(resp* C^∞*) en* $\varphi(x)$.

Remarque 2.3.1. *En vertu de la compatibilité des cartes, on peut remplacer dans la Définition 2.3.1 le terme "pour tout" par "il existe". En effet, si* $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in atl(M, x)$ *et* $(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2) \in atl(N, f(x))$, *alors*

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$$

Définition 2.3.2. *Soient* $(M^m, atl(M))$, $(N^n, atl(N))$ *deux variétés de dimension* m *et* n *respectivement. Une application* $f : M \to N$ *est dite différentiable de classe* C^k *(resp* C^∞*) en* $x \in M$ *s'il existe* $(U, \varphi) \in atl(M, x)$ *et* $(V, \psi) \in atl(N, f(x))$ *tels que l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

est de de classe C^k *(resp* C^∞*) en* $\varphi(x)$.

Définition 2.3.3. *Soient* $(M^m, atl(M))$, $(N^n, atl(N))$ *deux variétés de dimension* m *et* n *respectivement. Une application* $f : M \to N$ *est dite différentiable de classe* C^k *(resp* C^∞*) sur* M *si elle est de classe* C^k *(resp* C^∞*) en tout point* $x \in M$.

Remarque 2.3.2. *Si* $f : M \to N$ *est une application différentiable ; Alors pour tout* $x \in M$, *il existe une carte* $(W, \varphi) \in atl(M, x)$ *et* $(V, \psi) \in atl(N, f(x))$ *tels que :*

1. $f(W) \subset V$.
2. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \to \psi(V)$ *est différentiable.*

En effet si $(U, \varphi) \in atl(M, x)$ *alors* $(W = U \cap f^{-1}(V), \varphi)$ *est une carte de* $atl(M, x)$ *telle que* $f(W) \subset V$.

Conséquence 2.3.1. *Une application* $f : (M, atl(M)) \to \mathbb{R}^n$ *est différentiable de classe* C^k *(resp* C^∞*) si et seulement si pour toute carte* $(U, \varphi) \in atl(M)$ *la fonction* $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ *est différentiable de classe* C^k *(resp* C^∞*).*

Notations 2.3.1. *Par la suite on utilise les notations suivantes :*

- $C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R}, \quad f \text{ est de classe } C^\infty\}$.
- $C^k(M) = \{f : M \to \mathbb{R}, \quad f \text{ est de classe } C^k\}$.
- $C^\infty(M, x) = \{f : M \to \mathbb{R}, \quad f \text{ est de classe } C^\infty \text{ au vaoisinage de } x\}$.
- $C^k(M, x) = \{f : M \to \mathbb{R}, \quad f \text{ est de classe } C^k \text{ en } x\}$.

Exemples 2.3.1. .

1) Toute fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est diférentiable entre les variétés $(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n}))$ et $(\mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m}))$.

2) Soient S^n muni de l'atlas $\{(U_i^\epsilon, \varphi_i^\epsilon);\ \varepsilon = \pm 1,\ i = 0, ..., n\}$, et $F : R^{n+1} \to R^m$ une fonction différentiable de classe C^k, alors $F : S^n \to R^m$ est différentiable de classe C^k. En effet

$$\begin{array}{rcl} F \circ (\varphi_i^\epsilon)^{-1} : D & \to & \mathbb{R}^m \\ y = (y_1, ...y_n) & \mapsto & F\Big((y_1, ...y_{i-1}, \varepsilon\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_{i-1}, ..., y_n)\Big) \end{array}$$

où $D = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|z\| = \sum_i z_i^2 < 1\}$

) Soient S^n muni de l'atlas défini par la projection stéréographique $\{(U_i, \varphi_i);\ i = 0, 2\}$, et $F : R^{n+1} \to R^m$ une fonction différentiable de classe C^k, alors $F : S^n \to R^m$ est différentiable de classe C^k. En effet

$$\begin{array}{rcl} F \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ y = (y_1, ...y_n) & \mapsto & F\Big((\dfrac{y_1}{1 + \|y\|^2}, ..., \dfrac{y_n}{1 + \|y\|^2}, \dfrac{(3 - 2i)(\|y\|^2 - 1)}{1 + \|y\|^2})\Big) \end{array}$$

Définition 2.3.4. *Soient M^m et N^n deux variétés de dimension m et n respectivement. Une application $f : M^m \to N^n$ est un difféomorphisme de classe C^k si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *f est bijective*
2. *f et f^1 sont différentiables de classe C^k.*

Définition 2.3.5. *Soit $f : M^m \to N^n$ une application différentiable.*

1) On appel matrice jacobienne de f relativement aux cartes $(U, \varphi) \in atl(M)$ et $(V, \psi) \in atl(N)$, la matrice associée à l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$:

$$Jac(f) = Jac(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \begin{bmatrix} \frac{\partial(\psi^1 o f o \varphi^{-1})}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial(\psi^1 o f o \varphi^{-1})}{\partial x^m} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial(\psi^n o f o \varphi^{-1})}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial(\psi^n o f o \varphi^{-1})}{\partial x^m} \end{bmatrix}$$

2) Le rang de l'application f en $x \in M$ est le rang de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x)$:

$$rg_x(f) = rg_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = rg\Big[\frac{\partial(\psi^i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}(x)\Big]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

Remarque 2.3.3. *Le rang d'une application f en un point x est indépendant des cartes choisis, en effet soient $(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\in atl(M)$ et $(V_1,\psi_1),(V_2,\psi_2)\in atl(N)$, alors $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ et $\psi_2\circ\psi_1^{-1}$ sont des difféomorphismes et on a :*

$$\psi_2\circ f\circ\varphi_2^{-1}=(\psi_2\circ\psi_1^{-1})\circ(\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1})\circ(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})$$

Proposition 2.3.1. *Soit $f:M^m\to N^n$ une application différentiable injective, alors f est un difféomorphisme sur $f(M)$ si et sulement si*

$$rg(f)=dim(M)=dim(N).$$

2.4 Théorème du Rang Constant

Théorème 2.4.1. ***Cas réel*** $\mathbb{R}^n$ *(voir [8])*

Soient $U\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:U\to\mathbb{R}^m$ une application différentiable de classe C^1 et $p\leq\min(n,m)$. Si f est de rang p constant sur U (i.e. $\forall x\in U,\quad rang_x(f)=p$), alors pour tout $x_0\in U$ Ils existent un ouvert $V\subset U$ voisinage de x_0, un ouvert W voisinage de $f(x_0)$, un difféomorphisme $\varphi:V\to\varphi(V)\subset\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\psi:W\to\psi(W)\subset\mathbb{R}^m$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi\circ f\circ\varphi^{-1} & \end{array}$$

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}((y_1,...y_p,y_{p+1}....,y_m))=(y_1,...y_p,0....,0)$$

Preuve On a $x=(x_1,...x_p,x_{p+1}....,x_n),\quad(f(x)=(f_1(x),...,f_p(x),f_{p+1(x)},....,f_m(x))$ et

$$D_xf=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}\\ \\ \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}_x.$$

Comme $rang_x f = p$, à des permutations près on peut supposer que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(x_0)} \neq 0.$$

$\forall i = 1, ..., n$ et $\forall j = 1, ..., m$, on a

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_j}{\partial x_p} & \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \end{vmatrix}_{(x_0)} = 0.$$

En utilisant la continuité de l'application multilinéaire det (déterminant), on déduit l'existence d'un ouvert $\overline{V} \subset U$ voisinage de x_0 tel que

$$det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(x)} \neq 0. \qquad (\forall x \in \overline{V})$$

Si on pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \overline{V} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, ..., x_p, ..., x_n) & \mapsto & \varphi(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), x_{p+1}, ..., x_n) \end{array}$$

alors φ est une application différentiable de classe C^1, tel que :

$$D_x\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} & . & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} & . & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_x .$$

$$det(D_{x_0}\varphi) = det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{x_0} \neq 0.$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert $\widetilde{V} \subset \overline{V}$ voisinage de x_0 tel que $\varphi : \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n \to \varphi(\widetilde{V}) \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de classe C^1.

On remarque que si $y = (y_1, ..., y_p, ..., y_n) = \varphi(x) = (f_1(x), ..., f_p(x), x_{p+1}, ..., x_n)$ alors

$$y_i = f_i(x), \qquad (\forall i = 1, ..., p).$$

Si on désigne par $h = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\widetilde{V}) \to \mathbb{R}^m$, alors pour $y = (y_1, ..., y_p, ..., y_n)$ on a

$$\begin{aligned} h(y) &= (h_1(y), ..., h_p(y), h_{p+1}(y), ..., h_m(y)) \\ &= f \circ \varphi^{-1}(y) \\ &= f(x) \\ &= (f_1(x), ..., f_p(x), f_{p+1}(x), ..., f_m(x)) \\ &= (y_1, ..., y_p, h_{p+1}(y), ..., h_m(y)) \end{aligned}$$

$$D_y h = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial hp+1}{\partial y_p} & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_{p+1}} & \dots & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_p} & \frac{\partial h_m}{\partial y_{p+1}} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_n} \end{bmatrix}_y .$$

Comme f est une application de rang p et φ est un difféomorphisme, on déduit que h est une application de rang p, par suite

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_{p+1}}(y) & \dots & \frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_n}(y) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_{p+1}}(y) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial y_n}(y) \end{bmatrix} = 0, \qquad (\forall y \in \varphi(\widetilde{V})).$$

(est une matrice nulle d'ordre $(m-p, n-p)$).

Ce qui montre que $h_{p+1}, ..., h_m$, sont des fonctions indépendantes des variables $(y_{p+1}, ..., y_n)$.

$$h_j(y) = h_j((y_1, ..., y_p)), \qquad p+1 \leq j \leq m.$$

Soient $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert voisinage de $f(x_0)$ tel que $x_0 \in f^{-1}(W) \subset \widetilde{V}$ et ψ une application définie par

$$\begin{array}{rcl} \psi : W & \to & \mathbb{R}^m \\ z = (z_1, ..., z_m) & \mapsto & ((z_1, ..., z_p, z_{p+1} - h_{p+1}(z), ..., z_m - h_m(z)). \end{array}$$

alors

$$D_y\psi = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial h_{p+1}}{\partial y_1} & \dots & -\frac{\partial hp+1}{\partial y_p} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \dots & -\frac{\partial h_m}{\partial y_p} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_z .$$

donc ψ est un difféomorphisme locale, de plus ψ est injective, en effet, si $\psi(z) = \psi(z')$ alors

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & z_1' \\ \vdots & & \\ z_p & = & z_p' \\ z_{p+1} - h_{p+1}(z) & = & z_{p+1}' - h_{p+1}(z') = z_{p+1}' - h_{p+1}(z) \\ \vdots & & \\ z_m - h_m(z) & = & z_m' - h_m(z') = z_m' - h_m(z) \end{array}$$

d'où $z = z'$. Comme ψ est un difféomorphisme locale et une application injective sur W, alors d'après le théorème d'inversion locale ψ est un difféomorphisme sur W.

Si on note par $V = f^{-1}(W)$ alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi\circ f\circ\varphi^{-1} & \end{array}$$

et on a

$$\begin{aligned} \psi\circ f\circ\varphi^{-1}((y_1,...y_p,y_{p+1}....,y_n)) &= \psi((y_1,...y_p,h_{p+1}(y),....,h_m(y))) \\ &= (y_1,...y_p,h_{p+1}(y)-h_{p+1}(y),....,h_m(y)-h_m(y)) \\ &= (y_1,...y_p,0....,0). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4.2. *Soit $f : M^m \to N^n$ une application différentiable. Si $x \in M$ tel que $rg_x(f) = p = min(m,n)$, alors il existe une $(U\varphi) \in atl(M)$ telle que $(\forall y \in U) :\ rg_y(f) = p$.*

Théorème 2.4.3 (Rang constant)**.** *Soit $f : M^m \to N^n$ une application différentiable. Si f est de rang constant $p \leq (m,n)$ sur un ouvert $U \subset M$, (i.e. $\forall x \in U,\ rg_x(f) = p$) , alors pour tout $x \in M$, il existent $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi}) \in atl(M,x)$ et $(\widetilde{V},\widetilde{\psi}) \in atl(N,f(x))$ telles que :*

$$(\forall y = (y_1,...,y_m) \in \widetilde{\varphi}(\widetilde{U})) :\ \widetilde{\psi}\circ f\circ\widetilde{\varphi}^{-1}(y) = ((y_1,...,y_p,0,...,0)$$

.

Preuve Soient $(U_1,\varphi_1) \in atl(M,x)$ et $(V_1,\psi_1) \in atl(N,f(x)$ telles que $f(U_1) \subset V_1$. Par application du Théorème 2.4.1 à l'application

$$\widetilde{f} = \psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1} : U = \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^m \to \psi_1(V_1) \subset \mathbb{R}^n,$$

ils existent un ouvert $V \subset U$ voisinage de $\varphi_1(x)$, un ouvert $W \subset \psi_1(V_1)$ voisinage de $\widetilde{f}(\varphi_1(x))$, un difféomorphisme $\varphi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$ et un difféomorphisme $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathbb{R}^n$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{f} & \\ V & \longrightarrow & W \\ \varphi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\psi \\ \varphi(V) & \longrightarrow & \psi(W) \\ & \psi\circ\widetilde{f}\circ\varphi^{-1} & \end{array}$$

$$\psi \circ \widetilde{f} \circ \varphi^{-1}((y_1, ...y_p, y_{p+1}...., y_m)) = (y_1, ...y_p, 0...., 0)$$

donc

$$(\psi \circ \psi_1) \circ f \circ (\varphi \circ \varphi_1)^{-1}((y_1, ...y_p, y_{p+1}...., y_m)) = (y_1, ...y_p, 0...., 0).$$

Si on note par $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \varphi_1$, $\widetilde{\psi} = \psi \circ \psi_1$, $\widetilde{U} = \varphi_1^{-1}(V)$ et $\widetilde{V} = \psi_1^{-1}(W)$, alors $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}) \in atl(M, x)$ et $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi}) \in atl(N, f(x))$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \xrightarrow{f} & \widetilde{V} \\ \varphi_1 \Big\downarrow & & \Big\downarrow \psi_1 \\ V & \underset{\widetilde{f} = \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}}{\longrightarrow} & W \\ \varphi \Big\downarrow & & \Big\downarrow \psi \\ \varphi(V) & \underset{\psi \circ \widetilde{f} \circ \varphi^{-1}}{\longrightarrow} & \psi(W) \end{array}$$

où $\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \psi \circ \widetilde{f} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Remarque 2.4.1. *En utilisant les translations, on peut supposer que* $\widetilde{\varphi}(x) = 0$ *et* $\widetilde{\psi}(f(x)) = 0$.

■

Définition 2.4.1 (Immersion)**.** *Une application* $f : M^m \to N^n$ *est dite immersion si* $m \leq n$ *et* $rg(f) = m = dim(M)$.

Remarque 2.4.2. *Si* $f : M^m \to N^n$ *est une immersion, d'après le théorème du rang constant, pour tout* $x \in M$ *il existe* $(U, \varphi) \in atl(M, x)$ *et* $(V, \psi) \in atl(N, f(x))$ *tels que :*

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) &\to \psi(V) \\ (y_1, ..., y_m) &\mapsto (y_1, ..., y_m, 0..., 0) \end{aligned}$$

Ce qui montre que f *est localement injective.*

Définition 2.4.2 (Plongement)**.** *Une application* $f : M^m \to N^n$ *est dite plongement si elle est une immersion injective.*

Remarque 2.4.3. *Si $f : M^m \to N^n$ est un plongement, alors $f : M \to f(M)$ est une application bijective qui induit une topologie séparée sur $f(M)$ et une structure différentiable de dimension m, $\mathcal{U} = \{(f(U), \varphi \circ f^{-1});\ (U,\varphi) \in atl(M)\}$ telle que $f : (M, atl(M)) \to (f(M),\mathcal{U})$ est un difféomorphisme.*

Définition 2.4.3 (Plongement régulier)**.** *Une application $f : M^m \to N^n$ est dite plongement régulier si f est un plongement (i.e. immersion injective) tel que $f : (M, \mathcal{T}_M) \to (f(M), \mathcal{T}_{f(M)})$ est un homéomorphisme pour la toplogie induite par N sur $f(M)$*

$$\mathcal{T}_{f(M)} = \{\theta \cap f(M);\ \theta \in \mathcal{T}_N\}.$$

Remarque 2.4.4. *D'après la Remarque 2.4.3, on déduit que si $f : M^m \to N^n$ est un plongement régulier , alors $f : (M, atl(M)) \to (f(M),\mathcal{U})$ est un difféomorphisme, et l'injection canonique $i : (f(M),\mathcal{U}) \to (N, atl(N))$ est un plongement régulier,*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ (M, atl(M) & \longrightarrow & (N, atl(N)) \\ f\downarrow & \nearrow & i \\ f(M) & & \end{array}$$

où

$$\mathcal{U} = \{(f(U), \varphi \circ f^{-1});\ (U,\varphi) \in atl(M)\}.$$

Exemple 2.4.1.

$$\begin{array}{rcl} f :]0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

f est un plongement régulier.

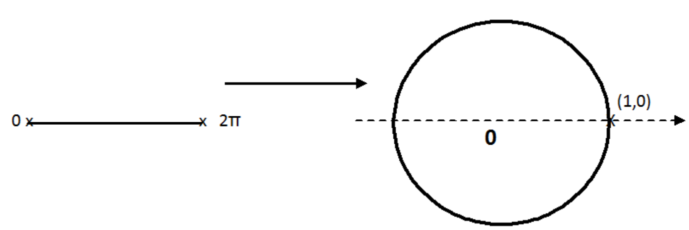


FIG. 2.2 – Plongement régulier

Exemple 2.4.2.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

f est une immersion non injective.

Exemple 2.4.3. *Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 < 1\}$*

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{array}$$

f est un est un plongement régulier sur $S^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad z > 0\}$.

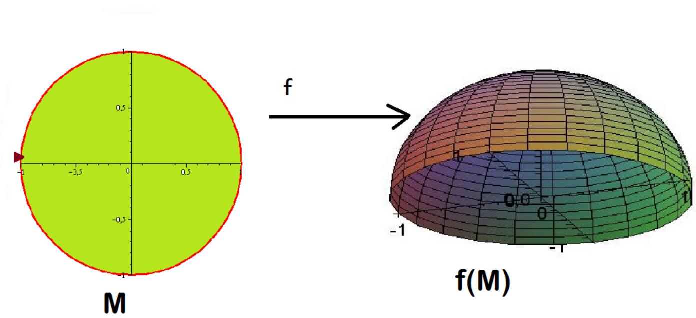


FIG. 2.3 – Plongement régulier

Exemple 2.4.4. *Considérons géométriquement les courbes suivantes :*
a)

$$\begin{array}{rcl} f :]-\pi, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & ((2cos(s) - 1)sin(s), (2cos(s) - 1)cos(s)) \end{array}$$

f est une immersion non injective $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{-\pi}{3}) = (0, 0)$.

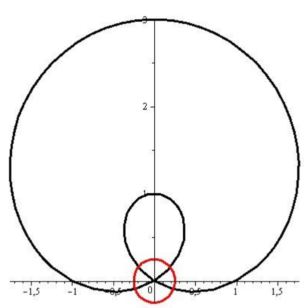


FIG. 2.4 – Immersion non injective

b)

$$\begin{array}{rcl} f :]-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & (10sin(3s)cos(s), 5sin(3s)sin(s)) \end{array}$$

f est un plongement non régulier (f n'est pas ouverte au voisinage de $f(0) = (0,0)$).

Remarque : *$f(]-\varepsilon, +\varepsilon[$ n'est pas un ouvert de $f(]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[)$ pour la topologie induite.*

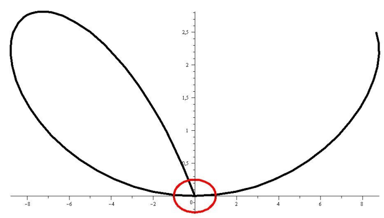


FIG. 2.5 – Plongement non régulier

c)

$$\begin{array}{rcl} f :]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & (sin(2s)cos(s), cos^2(s)) \end{array}$$

f est un plongement régulier.

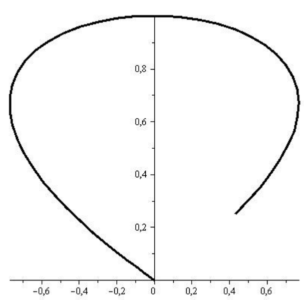


FIG. 2.6 – Plongement régulier

Définition 2.4.4 (Submersion)**.** *Une application differentiable $f : M^m \to N^n$ est dite submersion en $x \in M$ si $rg_x(f) = n$. f est dite submersion si elle submersion en tout point.*

Exemples 2.4.1.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R} \\ (x_0,....,x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{array}$$

f est une submersion sur $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^{3} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y,y+z) \end{array}$$

f est une submersion sur $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^{3} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\cos(x),\sin(x)) \end{array}$$

f n'est pas une submersion.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^{n} & \to & \mathbb{R}^p, \quad (p<n) \\ (x_1,....,x_n) & \mapsto & (x_1,....,x_p) \end{array}$$

Toute projection orthogonale est une submersion.

Définition 2.4.5 (Partition de l'unité)**.** *Une partition de l'unité d'une variété M^m est une famille $\{(U_i,f_i)\}_{i\in I}$ tel que :*

1) $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement localement fini d'ouverts de M.

2) $(\forall i\in I)$, $f_i : M\to\mathbb{R}_+$ est une application continue de classe C^∞ à support compact telle qu supp$(f_i)\subset U_i$.

3) $(\forall x\in M)$, $\sum_i f_i(x)=1$.

Remarque : De la condition (1), on déduit que $\sum_i f_i(x)$ est une somme finie.

Définition 2.4.6. *Une partition de l'unité $\{(U_i,f_i)\}_i$ est dite subordonnée à un atlas $\{(V_j,\psi_j)\}_{j\in J}$, si le recouvrement $\{U_i\}_i$est un refinement du recouvrement $\{V_j\}_{j\in J}$.*

Proposition 2.4.1. *Toute variété différentiable (paracompact) admet une partition de l'unité subordonée à $atl(M)$.*

Preuve Pour $x \in M$ il existent $(U_x, \varphi_x) \in atl(M)$ et $\epsilon_x > 0$ tels que $B(\varphi_x(x), 4\epsilon_x) \subset \varphi_x(U_x)$. Si on pose $B_x = \varphi_x^{-1}(B(\varphi_x(x), \epsilon_x))$, alors $\{B_x\}_{x \in M}$ est un recouvrement ouvert de M, il existe donc un refinement $\{V_i\}_{i \in I}$ d'ouverts localement fini $\{B_x\}_{x \in M}$ verifiant :

$$(\forall i \in I), \quad x_i \in V_i \subset B_i \subset U_i.$$

où $B_i = B_{x_i}$, $\epsilon_i = \epsilon_{x_i}$, $\varphi_i = \varphi_{x_i}$ et $U_i = U_{x_i}$. En vertu de la Proposition 1.5.2, soit $g_\epsilon : \mathbb{R}^n \to R$ de classe C^∞ telle que :

$$\begin{cases} g_\epsilon(z) \leq 1. & si \ z \in \mathbb{R}^n \\ g_\epsilon(z) = 1 & si \ \|z\| < \epsilon \\ g_\epsilon(z) = 0 & si \ \|z\| > 3\epsilon \end{cases}$$

Si on pose

$$g_i : y \in U_i \to g_i(y) = g\Big(\frac{1}{\epsilon_i}\varphi_i(y)\Big) \in \mathbb{R} \quad et \quad f_i = \Big(\sum_{j \in I} g_j\Big)^{-1} g_i$$

alors

1. $\forall \in I$, $g_i \in C^\infty(M)$, $supp(g_i) \subset U_i$ et $g_i = 1$ sur V_i.
2. $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ est une partition de l'unité subordonée à $atl(M)$.

■ De la Proposition 1.5.2 on obtient

Proposition 2.4.2. *Soit $(U, \varphi) \in atl(M)$ est une carte de M, si $x \in U$ alors il existe $\theta \subset U$ voisinage de x et $\lambda \in C^\infty(M)$ tels que*

$$\begin{cases} supp(\lambda) \subset U \\ \lambda_{/\theta} = 1 \end{cases}$$

2.5 Sous Variété.

Définition 2.5.1. *Soient $(M, atl(M))$ et $(N, atl(N))$ deux variétés de dimension m et n respectivement tels que $N \subset M$. On dit que N est une sous variété (réguliére) de M di dimension $n \leq m$, si l'injection canonique $i : (N, atl(N)) \to (M, atl(M))$ est un plongement régulier.*

Remarques 2.5.1. *:*

1) Si N est une sous variété de M, alors pour tout $x \in N$, il existe des cartes $(U, \varphi) \in atl(N)$ et $(V, \psi) \in atl(M)$ telles que $U = V \cap N$ et

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) & \to & \psi(V) \\ (y_1, ..., y_n) & \mapsto & (y_1, ..., y_n, 0..., 0) \end{array}$$

d'où

$$\psi(V \cap N) = \{z \in \psi(V),\ z_{n+1} = ... = z_m = 0\} = \{p \in V,\ \psi_{n+1}(p) = ... = \psi_m(p) = 0\}.$$

2) Si $f : N \to M$ est un plongement régulier, alors d'après la Remarque 2.4.4, $f(N)$ est une sous variété de M.

Théorème 2.5.1. *Soit M une variété de dimension m. N est une sous variété de M de dimension n si et seulement si :*

$$(\forall x \in N), (\exists (U, \varphi) \in atl(M) : \quad (y \in U \cap N) \Leftrightarrow \varphi_{n+1}(y) = ... = \varphi_m(y) = 0 \tag{2.1}$$

i.e.

$$z = (z_1, ..., z_m) \in \varphi(U \cap N) \Leftrightarrow z_{n+1} = ... = z_m = 0$$

Preuve Daprès la Remarque 2.5.1 (1) on déduit que la condition est nécessaire. Inversemnt, soient $\mathcal{T}_N$ la topologie induite par celle de M et

$$\mathcal{U}_N = \{(U, \varphi) \in atl(M),\ (y \in U \cap N) \Leftrightarrow \varphi_{n+1}(y) = ... = \varphi_m(y) = 0\}.$$

Pour $(U, \varphi) \in \mathcal{U}_N$, on pose

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : U \cap N & \to & \mathbb{R}^n \cap \varphi(U) \\ y & \mapsto & \widetilde{\varphi}(y) = (\varphi_1(y), ..., \varphi_n(y)) \end{array}$$

On a :

1) $\widetilde{\varphi}$ est une application bijective.

2) $\widetilde{\varphi}(U \cap N) = \mathbb{R}^n \cap \varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3) Si $(U, \varphi),\ (V, \psi) \in \mathcal{U}_N$ alors pour $(z \in \widetilde{\varphi}(U \cap N)$ on a

$$\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(z) = \widetilde{\psi} \circ \varphi^{-1}(z, 0) = (\widetilde{\psi} \circ \varphi_1^{-1}(z, 0), ..., \widetilde{\psi} \circ \varphi_n^{-1}(z, 0))$$

ce qui montre que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ est une application de classe C^∞. En conséquence, $\mathcal{U}_N$ est un atlas sur N tel que l'injection canonique $i : N \to M$ est un plongement régulier. ■

Théorème 2.5.2. *Soient M^m et N^n deux variétés différentiables. Si $f : M^m \to N^n$ est une application C^∞-différentiable de rang constant k, alors pour tout $p \in f(N)$, l'ensemble $f^{-1}(\{p\}) = \{x \in M,\ f(x) = p\}$ est une sous variété fermer de N de dimension $m - k$.*

Preuve Soit $x \in f^{-1}(\{p\})$, d'après le théorème du rang constant (Théorème 2.4.3), il existent deux cartes $(U, \varphi) \in atl(M)$ et $(V, \psi) \in atl(N)$ tels que $\varphi(U) \subset V$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(f(x)) = 0$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : z \in \varphi(U) \to (z_1, ..., z_k, 0, ..., 0) \in \psi(V)$. On a

$$\begin{aligned}
(\varphi_1(y) = ... = \varphi_k(y) = 0) \ &\Leftrightarrow\ \psi \circ f(y) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ f(y) = f(p)
\end{aligned}$$

d'où

$$y \in U \cap f^{-1}(\{p\} \Leftrightarrow \varphi_1(y) = ... = \varphi_k(y) = 0.$$

D'après le Théorème 2.5.1, on déduit que $f^{-1}(\{p\})$ est une sous variété de dimension $m - k$.

■

Corollaire 2.5.1. *Si $f : M^m \to N^n$ une application surjective C^∞-différentiable de rang n alors pour tout $p \in N$, $f^{-1}(\{p\}$ est une sous variété de dimension $m - n$.*

Corollaire 2.5.2. *Soient M^m et N^n deux variétés de dimension m et n respectivement $n < m$. Si $f : M^m \to N^n$ une application C^∞-différentiable de rang n alors pour tout $p \in N$, $f^{-1}(\{p\} \cap \{x \in M,\ rg_x(f) = n\}$ est une sous variété de dimension $m - n$.*

Remarque 2.5.1. *L'ensemble $\{x \in M,\ rg_x(f) = n\}$ est un ouvert de M.*

Exemple 2.5.1.

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R} \\
(x_0, ..., x_n) &\mapsto \sum_{i=0}^{n} x_i^2
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in S^n = f^{-1}(\{1\})$ on a $rg_x(f) = 1$, donc S^n est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n.

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1. *Démontrer que l'espace topologique discret $(E, \mathcal{P}(E))$ n'a pas de structure d'atlas différentiable.*

Exercice 2.6.2. *Sur $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$, déterminer les cartes compatible avec l'atlas $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$. Déduire une caractérisation de l'atlas maximal associé.*

Exercice 2.6.3. *Soient $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$ et*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & si\ x \geq 0 \\ 2x & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1) Déterminer la classe de différentiabilité de φ.

2) Démontrer que $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ est un atlas sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

3) les cartes $(\mathbb{R}, \varphi)$ et $(\mathbb{R}, Id)$ sont elles compatibles.

4) Déterminer toute les cartes compatible avec la carte $(\mathbb{R}, \varphi)$. Déduire une caractérisation de l'atlas maximal associé.

Exercice 2.6.4. *Soient $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$ et*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 & si\ x \geq 0 \\ -x^2 & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

mêmes questions que l'exercice (2.6.3).

Exercice 2.6.5. *Soient $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$ et*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi((x,y)) = \left\{ \begin{array}{ll} (x^n, y^m) & si\ x \geq 0 \\ (-x^n, y^m) & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

mêmes questions que l'exercice (2.6.3).

Exercice 2.6.6. *Soient* $\mathbb{R}^n$ *muni de la topologie usuelle* $\mathcal{T}_u$ *et* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un homéomorphisme. Déterminer toute les cartes compatible avec la carte* $(\mathbb{R}^n, \varphi)$*. Déduire une caractérisation de l'atlas maximal associé.*

2.7 Solutions

Solution 2.7.1. *Soit* U *un ouvert de* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(R))$ *et* $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *une application in jective. On a :*

1) Comme $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(R))$ *est un espace topologique discret on déduit que* φ *est une application continue.*

2) Si $x \in U$ *alors* $\{x\}$ *est un ouvert de* $\mathcal{P}(R)$ *et* $\varphi(\{x\}) = \{\varphi(x)\}$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}^m$ *muni de la topologie usuelle* $\mathcal{T}_u$ *donc* φ *n'est pas une application ouverte, par suite* φ *ne peut pas être un homéomorphisme de* U *vers un ouvert de* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{T}_u)$*.*

Solution 2.7.2. *Une carte* (U, φ) *est compatible avec* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ *si et seulement si*

$$\varphi = \varphi \circ Id^{-1} : U \longrightarrow \varphi(U)$$

est un difféomorphisme de classe C^∞*. d'où*

$$\mathcal{U}_{max} = \{(U, \varphi); \quad U \in \mathcal{T}_u, \text{ et } \varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \ \texttt{difféomorphisme de classe}\ C^\infty\}$$

Solution 2.7.3. *:*

1) φ *est une application continue, bijective et d'inverse continue*

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x & si\ x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

donc φ *est un homéomorphisme, par suite* $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ *est un atlas de dimension* 1*.*

2) Puisque φ *n'est pas différentiable et* $\varphi = \varphi \circ Id^{-1}$*, alors les cartes* $(\mathbb{R}, \varphi)$ *et* $(\mathbb{R}, Id)$ *ne sont pas compatibles.*

3) Une carte (U, ψ) *est comaptible avec* $(\mathbb{R}, \varphi)$ *si et seulement si l'application* $f = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(U)$ *est un difféomorphisme de class* C^∞*, d'où*

$$\begin{array}{rcl} \psi = f \circ \varphi : U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \psi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & si\ x \geq 0 \\ f(2x) & si\ x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On déduit que l'atlas maximal est donné par

$$\mathcal{U}_{max} = \{(U, f \circ \varphi),\ U \in \mathcal{T}_u \text{ et } f \texttt{ est un difféomorphisme de classe } C^\infty.\}$$

Chapitre 3

Espace Tangent à une Variété.

3.1 Espace Tangent

on note par

- $C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R}, \quad \texttt{f est de classe } C^\infty\}$, germe de fonctions.
- $C^\infty(M, x) = \{f : M \to \mathbb{R}, \quad \texttt{f est de classe } C^\infty \texttt{ au voisnage de } x\}$, germe de fonctions en x.
- $(C^\infty(M), +\times, \cdot)$ est une algèbre.

Définition 3.1.1. *Soit M^m une variété de dimension m. Une courbe passant par $x \in M$ est une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ d'un interval $I \subset \mathbb{R}$ à image dans la variété M, tel que $0 \in I$ et $\gamma(0) = x$.*

On note par $\mathcal{K}_x = \{\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M, \;\; \gamma(0) = x\}$. On définit sur $\mathcal{K}_x$ une relation d'équivalence par :

$$(\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_x), \quad \gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U, \varphi) \in atl(M, x) : \frac{d(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(0). \tag{3.1}$$

Remarque : En vertu de la compatibilté des cartes, la relation (3.1) est indépendante de la carte choisie.

Définition 3.1.2. *:*

- *L'ensemble quotient $T_xM = (\mathcal{K}_x)_{/\mathcal{R}}$ est appelé espace tangent à la variété M en x.*
- *La classe d'équivalence $\dot\gamma(0)$ est dite vecteur tangent à la variété M en x.*

♦ Structure vectoriel sur T_xM

Soit $(U,\varphi) \in atl(M)$, on pose

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}_x : T_xM & \to & \mathbb{R}^n \\ \dot{\gamma}(0) & \mapsto & \dfrac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0). \end{array} \tag{3.2}$$

De la définition de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ (formule (3.1)), on déduit que $\widetilde{\varphi}$ est une application injective.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\epsilon, +\epsilon[$ on a $\varphi(x) + ty \in \varphi(U)$. Si on note $\gamma : t \in]-\epsilon, +\epsilon[\to \varphi^{-1}(\varphi(x) + ty) \in U$, alors γ est une courbe passant par x telle que $\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}(0)) = y$, en déduit que $\widetilde{\varphi}_x$ est surjective. Donc $\widetilde{\varphi}$ est une application bijective.

Si $(U,\varphi), (V,\psi) \in atl(M,x)$ alors

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi}_x \circ \widetilde{\psi}_x^{-1}(y) & = & \dfrac{d}{dt}[\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x) + ty)]_{t=0} \\ & = & J_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}).y \end{array}$$

est une application linéaire bijective, ce nous permet de transporter d'une manière indépendante de la carte choisie, la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à T_xM par les formules suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\gamma}_1(0) + \dot{\gamma}_2(0) & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\Big(\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_1(0)) + \widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_2(0))\Big) \\ & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\Big(\dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{t=0} + \dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{t=0}\Big) \\ \lambda.\dot{\gamma}_1(0) & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\Big(\lambda.\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_1(0))\Big) \\ & = & \widetilde{\varphi}_x^{-1}\Big(\lambda.\dfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{t=0}\Big). \end{array}$$

$(T_xM, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $dim(T_xM) = m = dim(M)$.

Remarques 3.1.1. *:*

1) Si $(U,\varphi), (V,\psi) \in atl(M,x)$ alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_x^{-1}\Big(\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_1(0)) + \lambda.\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_2(0))\Big) &= \widetilde{\psi}_x^{-1} \circ (\widetilde{\psi}_x \circ \widetilde{\varphi}_x^{-1})\Big(\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_1(0)) + \lambda.\widetilde{\varphi}_x(\dot{\gamma}_2(0))\Big) \\
&= \widetilde{\psi}_x^{-1} \circ (\widetilde{\psi}_x \circ \widetilde{\varphi}_x^{-1})\Big((\widetilde{\varphi}_x \circ \widetilde{\psi}_x^{-1}) \circ \widetilde{\psi}_x(\dot{\gamma}_1(0)) \\
&\qquad + \lambda.(\widetilde{\varphi}_x \circ \widetilde{\psi}_x^{-1}) \circ \widetilde{\psi}_x(\dot{\gamma}_2(0))\Big) \\
&= \widetilde{\psi}_x^{-1} \circ (\widetilde{\psi}_x \circ \widetilde{\varphi}_x^{-1}) \circ (\widetilde{\varphi}_x \circ \widetilde{\psi}_x^{-1})\Big(\widetilde{\psi}_x(\dot{\gamma}_1(0)) + \lambda.\widetilde{\psi}_x(\dot{\gamma}_2(0))\Big) \\
&= \widetilde{\psi}_x^{-1}\Big(\widetilde{\psi}_x(\dot{\gamma}_1(0)) + \lambda.\widetilde{\psi}_x(\dot{\gamma}_2(0))\Big)
\end{aligned}$$

2) $\widetilde{\varphi}_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ *est un isomorphisme d'espaces vecoriels.*

Notations 3.1.1. *:*

1) Relativement à une carte $(U,\varphi) \in atl(M,x)$ *on a* $\varphi(x) = (\varphi^1(x), ..., \varphi^m(x)) \in \mathbb{R}^m$*. On note alors* $x^i = \varphi^i(x)$ $(1 \leq i \leq m)$*.*

2) Une carte $(U,\varphi) \in atl(M)$ *sera noté* $(U, x^i,\ 1 \leq i \leq m)$*.*

3) Si $(e_1, ..., e_m)$ *est la base canonique de l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^m$ *alors* $\widetilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)$ *est noté par* $\frac{\partial}{\partial x_i}_{/x}$ *ou* $\partial_{i/x}$*.*

4)$(\frac{\partial}{\partial x_1}_{/x}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}_{/x})$ *est une base locale relativement à la carte* (U, x^i)*.*

5) $\frac{\partial}{\partial x_i}_{/x}$ *est le vecteur associé à la courbe* $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t.e_i)$*.*

6) Si $v \in T_xM$ *tel que* $\widetilde{\varphi}(v) = y = (y^1, ..., y^m) \in \mathbb{R}^m$*, alors (par Convention d'Einstein), on obtient*

$$v = \sum_{i=1}^{m} y^i \frac{\partial}{\partial x_i}_{/x} = y^i \frac{\partial}{\partial x_i}_{/x} = \dot{\gamma}(0)$$

où $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t.y)$*.*

Définition 3.1.3. *[Action d'un vecteur] Une action d'un vecteur* $v = \dot{\gamma}(0) \in T_xM$ *sur le germe des fonctions* $\mathcal{C}^\infty(M,x)$ *est l'application définie par*

$$\begin{aligned}
v : \mathcal{C}^\infty(M,x) &\to \mathbb{R} \\
f &\mapsto v(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)
\end{aligned}$$

Propriétés 3.1.1 (Locales)**.** *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *relativement à une carte*

(U,φ), alors

- $$v(f) = \frac{d(f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x)+t(v^1,...,v^m))}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x))v^i = v^i\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x)) \qquad \texttt{(Convention d'Einstein)}.$$
- $v(\varphi^i) = v^i.$
- $\lambda.v + w = (\lambda v^i + w^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}.$
- $(\lambda.v+w)(f) = \lambda v(f) + w(f).$

Propriétés 3.1.2.

1) $v(f+g) = v(f)+v(g).$
2) $v(\lambda.f) = \lambda.v(f).$
3) $v(f.g) = f(x)v(g)+g(x)v(f)$ (Formule de Leibnitz).
4) $v(Const) = 0.$

Théorème 3.1.1. *Si $L : T_xM \to R$ est une application qui vérifie les Propriétés 3.1.2 précédentes, alors il existe un unique vecteur $v \in T_xM$ tel $L = v$.*

Preuve Soit $(U,\varphi)\in atl(M,x_0)$, d'après la formule de développement limité, on a

$$\begin{aligned}
f\circ\varphi^{-1}(y) &= f(x_0) + (y^i-\varphi^i(x_0))\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x_0)) + (y^i-\varphi^i(x_0))(y^j-\varphi^j(x_0))a_{ij}(x_0)\\
f(x) &= f(x_0) + (x^i-\varphi^i(x_0))\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x_0)) + (x^i-\varphi^i(x_0))(x^j-\varphi^j(x_0))a_{ij}(x_0)\\
f(x) &= f(x_0) + (\varphi^i(x)-\varphi^i(x_0))\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x_0)) +\\
&\qquad (\varphi^i(x)-\varphi^i(x_0))(\varphi^j(x)-\varphi^j(x_0))a_{ij}(x_0)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
L(f) &= L(\varphi^i)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(x_0))\\
&= L(\varphi^i)\frac{\partial}{\partial x^i}_{/x_0}(f)\\
&= v(f)
\end{aligned}$$

où $v = L(\varphi^i)\frac{\partial}{\partial x^i}_{/x_0}$. De la fomule $v^i = L(\varphi^i)$ $(1 \leq i \leq m)$, on déduit l'unicité du vecteur v.

■

Définition 3.1.4. *Soit M^m une variété de dimension m. L'ensemble $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ est dit espace tangent à la variété M.*

Remarques 3.1.2. *:*

1) Si $x \neq x'$ alors $T_xM \bigcap T_{x'}M = \emptyset$.

2) Soit $\mathcal{K} = \{\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M\ C^\infty,\ 0 \in I\}$ l'ensemble des courbes de classe C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{K}$ par :

$$\gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2 \Leftrightarrow \quad \Big(\gamma_1(0) = \gamma_2(0)\Big) \quad et \quad \Big(\frac{d(\varphi\circ\gamma_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi\circ\gamma_2)}{dt}(0)\Big)$$

où $(U,\varphi) \in atl(M)$, alors $\mathcal{TM} = \mathcal{K}_{/\mathcal{R}} = \{\dot\gamma(0),\ \gamma \in \mathcal{K}\}$.

En vertu de la compatibilité des cartes, la relation $\mathcal{R}$ est indépendante de la carte choisie.

3) Si U est un ouvert de M, alors $T_xU = T_xM$ et $TU = \cup_{x\in U} T_xM$.

3.2 Structure de variété sur TM.

Soit $\pi : \dot\gamma(0) \in TM \to \gamma(0) \in M$ la projection canonique sur M. Si $(U,\varphi) \in atl(M)$ est une carte sur M alors

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x\in U} T_xM,$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \quad &\to \quad U \times \mathbb{R}^m \\ \dot\gamma(0) \quad &= \quad \Big(\gamma(0), \frac{d(\varphi\circ\gamma)}{dt}(0)\Big) \end{aligned} \tag{3.3}$$

est une application bijective telle que $\widetilde{\varphi}(v) = (\pi(v), \widetilde{\varphi}_{\pi(v)}(v))$. De plus si $(V,\psi) \in atl(M)$ alors

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1} : (U\cap V)\times\mathbb{R}^m \quad &\to \quad (U\cap V)\times\mathbb{R}^m \\ (x,y) \quad &\mapsto \quad \Big(x, \widetilde{\psi}_x \circ \widetilde{\varphi}_x^{-1}(y)\Big) \\ &\mapsto \quad \Big(x, J_{\varphi(x)}(\psi_x\circ\varphi_x^{-1}).y\Big) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞. Du théorème de construction de variétés (Théorème 2.2.1) on déduit l'existence d'une structure de variété différentiable de dimension $2m$ et d'atlas

$$\mathcal{U} = \{(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}),\ (U, \varphi) \in atl(M)\}.$$

Remarques 3.2.1. *Soient $(U, x^i)_{i=1,..,m} \in atl(M)$ et $(\partial_{1/x}, ..., \partial_{m/x})$ la base canonique associée sur T_xM.*

1) Si $v = y^i \partial_{i/x} \in T_xM$ alors $\widetilde{\varphi}(v) = (x, y^1, ..., y^m)$.

2) On note par $(\pi^{-1}(U), x^1, ..., x^m, y^1, ..., y^m)$ la carte sur TM induite par la carte $(U, x^i)_{i=1,..,m}$.

Définition 3.2.1 (Application tangente)**.** *Soient M^m, N^n deux variétés et $f : M^m \to N^n$ une appication différentiable. On appelle application tangente associée à f, l'application définie par*

$$\begin{aligned} df : TM &\to TN \\ \dot{\gamma}(0) &\mapsto \dot{\overbrace{(f \circ \gamma)}}(0) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Expression locale :

Si $(U, \varphi) \in atl(M)$ et $(V, \psi) \in atl(N)$ tel que $\varphi(U) \subset V$, alors

$$\begin{array}{ccc} \pi_M^{-1}(U) & \xrightarrow{df} & \pi_N^{-1}(V) \\ \widetilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\psi} \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\widetilde{\psi} \circ df \circ \widetilde{\varphi}^{-1}]{} & \psi(V) \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} \circ df \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(z, y) &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z), D_z(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(y)) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z), J_z(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}).y \end{aligned}$$

Ce qui montre que df est une application différentiable.

Remarques 3.2.2. *:*

1) Si f est de classe C^k alors df est de classe C^{k-1}.

2) Si $f : M^m \to N^n$ et $g : N^n \to E^p$ sont différeniables alors $g \circ f$ est une application différentiable et on a $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$.

3) Si $\mathbb{R}^n$ muni de l'atlas usuelle $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$, alors $T\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{Id}^{-1} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T\mathbb{R}^n \\ (a,b) & \longmapsto & \dot{\gamma}_{(a,b)}(0) \end{array}$$

où $\gamma_{(a,b)} : t \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \gamma_{(a,b)}(t) = a + bt \in \mathbb{R}^n$. On identifie alors $T\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

3.3 Champ de vecteurs.

Définition 3.3.1. *Un champ de vecteurs (ou section) sur une variété M est une application $X : M \to TM$ telle que $\pi \circ X = Id_M$*

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & M & \rightarrow & TM & \\ Id_M & \searrow & & \swarrow & \pi \\ & & M & & \end{array}$$

On note par $\mathcal{H}(M)$ ou $\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M.

Propriétés 3.3.1. *:*

1) $(\forall X \in \Gamma(TM)$, $\forall x \in M$ on a $X(x) = X_x \in T_x M$.

2) Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha \in C^\infty(M)$, on définit $X + Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha X \in \Gamma(TM)$ par les formules

$$\begin{array}{rcl} (X+Y)(x) & = & X(x) + Y(x) \in T_x M. \\ (\alpha X)(x) & = & \alpha(x) X(x) \in T_x M. \end{array}$$

3) Soit U est un ouvert de M, on a TU est un ouvert de TM tel que si $X \in \Gamma(M)$ alors $X_{/U} : x \in U \to X_x \in TU$ est champ de vecteurs sur U.

4) Soit $(U, \varphi) \in atl(M)$ une carte locale, si on pose

$$\begin{array}{rcl} \partial_i : U & \to & TU \subset TM, \qquad (1 \leq i \leq m) \\ x & \mapsto & \partial_i(x) = \partial_{i/x} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}_{/x} \end{array}$$

alors $(\partial_1, ..., \partial_m)$ est une base champs de vecteurs sur U.

5) Soit $(U, \varphi) \in atl(M)$ une carte locale, si $X \in \Gamma(U)$ alors $X = X^i \partial_i$ tels que $X^i(x) = \pi_i(\widetilde{\varphi}_x(X_x))$ où $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est la i-ème projection. On déduit que l'expression locale de $\widetilde{\varphi} \circ X$ est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} \circ X : U & \to & U \times \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & (x, X^1, ..., X^m) \end{array}$$

Les fonctions $X^1, ..., X^m$ sont appelés composantes locale de X relativement à la carte (U, φ).

6) Si $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^i \partial_i$ relativement à la carte (U, φ) et $\alpha \in C^\infty(U)$ alors $X + \alpha Y = (X^i + \alpha Y^i)\partial_i$.

7) Si $\mathbb{R}^m$ est muni de l'atlas usuelle alors $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ s'identifie à $(C^\infty(\mathbb{R}^m))^m$.

Théorème 3.3.1. *Une section $X : M \mapsto TM$ est de classe C^k si et seulement si relativement à toute carte $(U, \varphi) \in atl(M)$, les composantes $(X^1, ..., X^m)$ sont de classe C^k (i.e. $X^i \in C^k(U)$, $1 \leq i \leq m$).*

Preuve En effet, toute carte $(U, \varphi) \in atl(M)$ induit une carte $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \in atl(TM)$ et on a

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ U & \to & \pi^{-1}(U) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \widetilde{\varphi} \\ \varphi(U) & \to & \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \\ & \widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1} & \end{array}$$

D'après (5) du Propriétés 3.3.1, on obtient

$$\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(z) = \Big(z, X^1 \circ \varphi^{-1}(z), ..., X^m \circ \varphi^{-1}(z)\Big).$$

■

Théorème 3.3.2. *Soient M^m une variété de dimension m et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ est une famille de Champs de vecteurs différentiables telle que*

$$\begin{array}{rcl}(\forall i \in I) & : & X_i \in \mathcal{H}(U_i) \\ (\forall i, j \in I) & : & X_i = X_j \quad sur\ U_i \cap U_j,\end{array}$$

alors il existe un unique champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}(M)$ tel que

$$(\forall i \in I) : X_{/U_i} = X_i. \tag{3.5}$$

Preuve De la formule (3.5) en obtient l'unicité du champ de vacteurs X.

Soit $\{\theta_j, \alpha_j\}_{j\in J}$ une partition de l'unité subordonée à $\{U_i\}_{i\in I}$. Pour $j \in J$ il existe $k_j \in I$ tel que $\theta_j \subset U_{k_j}$, si on pose :

$$\begin{array}{rcl}\overline{X}_j & = & \alpha_j X_{k_j}, \qquad j \in J \\ X & = & \displaystyle\sum_{j\in J} \overline{X}_j = \sum_{j\in J} \alpha_j X_{k_j}\end{array}$$

alors

1) $\overline{X}_j \in \mathcal{H}(M)$ tel que $supp(\overline{X}_j) \subset \theta_j \subset U_{k_j}$.

2) $X \in \mathcal{H}(M)$ tel que pour $x \in U_i$, on a

$$X(x) = \sum_{j\in J} \alpha_j(x) X_{k_j}(x) = \sum_{j\in J} \alpha_j(x) X_i(x) = X_i(x). \tag{3.6}$$

■

3.4 Groupe à un paramètre.

Théorème 3.4.1 ([2],[7], [13]). ***(Théorème d'existence, unicité et différentiabilité).***

Soient $J \subset \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ sont des ensembles ouverts. Si $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k et $(t_0, x_0) \in J \times U$, alors il existent deux ouverts J_0 et U_0 tels que $(t_0, x_0) \in J_0 \times U_0 \subset J \times U$ et $\Phi : J_0 \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k solution de l'equation

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x) = f(t, \Phi(t, x)) \\ \Phi(t_0, x) = x\end{array}\right.$$

Définition 3.4.1. *Un groupe à 1-paramètre sur une variété M^m est une application $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ de classe C^∞ telle que :*

1. $(\forall x \in M)$: $\quad \Phi(0, x) = x$
2. $(\forall s, t \in \mathbb{R})$, $(\forall x \in M)$: $\quad \Phi(s, (\Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$

Propriétés 3.4.1. *Soit $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un groupe à 1-paramètre, on a*

1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_t : M & \to & M \\ x & \mapsto & \Phi_t(x) = \phi(t, x) \end{array} \tag{3.7}$$

   un difféomorphisme tel que $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$
2. $\Phi_0 = Id_M$
3. $(\forall s, t \in \mathbb{R})$: $\quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{s+t}$
4. $\Big(\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \circ\Big)$ *est un groupe commutatif, muni de la loi de composition des applications.*
5. *Pour tout $x \in M$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_x : \mathbb{R} & \to & M \\ x & \mapsto & \Phi_x(t) = \phi(t, x) \end{array} \tag{3.8}$$

   est une courbe de classe C^∞ passant par x (i.e. $\Phi_x(0) = \phi(0, x) = x$).

Théorème 3.4.2. *Si $\Phi : \mathbb{R} \times M^m \to M^m$ est un groupe à 1-paramètre sur M, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \sigma : M & \to & TM \\ x & \mapsto & \dot{\Phi}_x(0) \in T_xM \end{array} \tag{3.9}$$

est un champ de vecteurs sur M.

Preuve Il suffit de démontrer que σ est une application de classe C^∞. Soit $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \in atl(TM)$ induite par la carte $(U, \varphi) \in atl(M)$. En vertu de la continuité de Φ en déduit l'existence de $\epsilon > 0$ et $V \subset U$ un voisinage de x tels que $\Phi(]-\epsilon, +\epsilon[\times V) \subset U$. on a

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(\sigma(x)) &= \widetilde{\varphi}(\dot{\Phi}_x(0)) \\ &= (\varphi(x), \frac{d(\varphi \circ \Phi_x)}{dt}(0) \\ &= (\varphi(x), \frac{d(\varphi(\Phi(t, x))}{dt}(0)) \end{aligned}$$

d'où

$$\widetilde{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}(y) = (y, \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial t}(0, y))$$

tel que $\widehat{\Phi}$ est une application de classe C^∞ définie au voisinage $(0,\varphi(x))$ par

$$\widehat{\Phi}:(t,y)\in]-\epsilon,\epsilon[\times\varphi(V)\to\varphi(\Phi(t,\varphi^{-1}(y)))\in\varphi(U).$$

■

Remarque 3.4.1. *Soit $(U,\varphi)\in atl(M,x)$, on a :*

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{\varphi}_{\Phi_s(x)}(\dot{\Phi}_x(s)) & = & \frac{d}{dt}(\varphi\circ\Phi_x(t))_{/t=s} \\
 & = & \frac{d}{dt}(\varphi\circ\Phi_x(t+s))_{/t=0} \\
 & = & \frac{d}{dt}(\varphi\circ\Phi_{t+s}(x))_{/t=0} \\
 & = & \frac{d}{dt}(\varphi\circ\Phi_t\circ\Phi_s(x))_{/t=0} \\
 & = & \frac{d}{dt}(\varphi\circ\Phi_t(\Phi_s(x)))_{/t=0} \\
 & = & \frac{d}{dt}(\varphi\circ\Phi_{\Phi_s(x)}(t))_{/t=0} \\
 & = & \widetilde{\varphi}_{\Phi_s(x)}(\dot{\Phi}_{\Phi_s(x)}(0)) \\
 & = & \widetilde{\varphi}_{\Phi_s(x)}(\sigma(\Phi_s(x)) \\
 & = & \widetilde{\varphi}_{\Phi_s(x)}(\sigma(\Phi_x(s))
\end{array}$$

d'où

$$\dot{\Phi}_x(s)=\sigma(\Phi_x(s))$$

Ce qui montre que Φ est une solution de l'équation différentielle

$$\dot{\Phi}=\sigma(\Phi).$$

Définition 3.4.2. *Soient M une variété de dimension m, U un ouvert de M et $I\subset\mathbb{R}$ un interval tel que $0\in I$. Un groupe à un paramètre local définit sur U est une application $\Phi:I\times U\to U$ de classe C^∞ telle que :*

1. $(\forall x\in U):\quad \Phi(0,x)=x$
2. $(\forall s,t,s+t\in I)$, $(\forall x\in U):\quad \Phi(s,(\Phi(t,x))=\Phi(s+t,x)\in U$

Remarque 3.4.2. *Si $X\in\Gamma(TM)$ est un champ de vacteurs, alors la théorie des équations différentielle montre l'existence d'un groupe à un paramètre local ϕ au voisinage de $(0,x)\in\mathbb{R}\times M$ tel que $\dot{\Phi}=X(\Phi)$.*

Définition 3.4.3. *Soit M une variété de dimension m. Un champ de vaecteur $X \in \Gamma(TM)$ est dit complet s'il admet un groupe à un paramètre globale $\Phi : \mathbb{R}\times M \to M$ tel que $\dot{\Phi} = X(\Phi)$.*

Théorème 3.4.3. *Si M est une variété compacte, alors tout champ de vecteurs sur M est un champ complet.*

Preuve Soit $X \in \mathcal{H}(M)$, si $x \in M$ il existe un groupe à un paramètre locale $\Phi^x : I^x \times U^x \to U^x$ associé à X au voisinage de x. De la compacité de la variété M on peut extraire un sous recouvrement fini $(U^i)_{1\leq i\leq n} \subset (U^x)_{x\in m}$. En vertu de l'unicité du groupe à un paramètre locale, on a $\Phi^i = \Phi^j$ sur $I \times U^i \cap U^j$ où $I = \bigcap_{1\leq k\leq n} U^k$. Si on pose :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\Phi} : I \times M & \to & M \\ (t,x) & \mapsto & \Phi^i(t,x), \qquad x \in U^i. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times M & \to & M \\ (t,x) & \mapsto & \widehat{\Phi}_{\frac{t}{p}} \circ \ldots \circ \widehat{\Phi}_{\frac{t}{p}}(x), \qquad p - fois. \end{array}$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{t}{p} \in I$. Alors Φ est un groupe à un paramètre globale associé à X. ∎

Définition 3.4.4. *Soit $X \in \mathcal{H}(M)$ un champ de vecteurs sur M. Le champ X induit un opérateur différentielle sur le module $C^\infty(M)$:*

$$\begin{array}{rcl} X : C^\infty(M) & \to & C^\infty(M) \\ f & \mapsto & X(f) \end{array}$$

tel que

$$X(f)(x) = X_x(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(x))_{/t=0} \tag{3.10}$$

où ϕ désigne le groupe à 1-parmèttre associé à X au voisinage de x.

Des propriétés (3.1.1) et (3.1.2), on obtient

Propriétés 3.4.2. *Si $X = X^i\partial_i$ relativement à une carte (U,φ), alors*

$$
\begin{array}{rcl}
\bullet \quad X(f) & = & \dfrac{d(f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x)+t(X^1,...,X^m))}{dt}(0) \\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\circ\varphi \\
& = & X^i \dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\circ\varphi \qquad \textit{(Convention d'Einstein)}. \\
\bullet \quad X(\varphi^i) & = & X^i. \\
\bullet \quad \partial_{x^k}(f) & = & \dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^k}\circ\varphi \qquad (1\leq k\leq m). \\
\bullet \quad \partial_{x^k}(\varphi^i) & = & \delta^i_k \qquad (1\leq i,k\leq m).
\end{array}
$$

Propriétés 3.4.3.

1) $X(f+g) = X(f) + X(g)$.
2) $X(\lambda.f) = \lambda.X(f)$.
3) $X(f.g) = fX(g) + gX(f)$ *(Formule de Leibnitz)*.
4) $X(Const) = 0$.

Théorème 3.4.4. *Si $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ est opérateur différentielle sur M verifiant les propriétés (3.4.3), alors il existe un unique champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}(M)$ tel que $L = X$.*

Lemme 3.4.1. *Soit L un opérateur tel que le Théorème 3.4.4. si $f, g \in C^\infty(M)$ et U un ouvert de M tels que $f_{/U} = g_{/U}$ alors $L(f)_{/U} = L(g)_{/U}$.*

Preuve Soit $x \in U$, il existe une fonction $\alpha \in C^\infty(M)$ telle que $supp(\alpha) \subset U$ et $\alpha(x) = 1$. D'après l'égalité $f_{/U} = g_{/U}$, on déduit :

$$\alpha f = \alpha g$$

doù

$$
\begin{array}{rcl}
L(\alpha f) & = & L(\alpha)f + \alpha L(f) \\
& = & L(\alpha)g + \alpha L(g)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
L(\alpha f)(x) & = & L(\alpha)(x)f(x) + \alpha(x)L(f)(x) \\
& = & L(\alpha)(x)g(x) + \alpha(x)L(g)(x)
\end{array}
$$

comme $f(x) = g(x)$ et $\alpha(x) = 1$, on obtient $L(f)(x) = L(g)(x)$.

■

Preuve Du Theoreme3.4.4.

Soit $x \in M$, on pose

$$\begin{array}{rcl} L_x : C^\infty(M,x) & \rightarrow & C^\infty(M,x) \\ f & \mapsto & L_x(f) = L(\alpha f)(x) \end{array}$$

où $\alpha \in C^\infty(M)$ tel que $supp(\alpha) \subset Dom(f)$ et $\alpha = 1$ sur un ouvert V voisinage de x. On a :

1. $\alpha f \in C^\infty(M), \quad (\alpha f)_{/V} = f_{/V}$.
2. $$\begin{array}{rcl} L_x(f+g) & = & L(\alpha(f+g))(x) \\ & = & L(\alpha f))(x) + L(\alpha g))(x) \\ & = & L_x(f) + L_x(g) \end{array}$$
3. $$\begin{array}{rcl} L_x(fg) & = & L(\alpha(fg))(x) \\ & = & L(\alpha^2(fg))(x) \\ & = & L((\alpha f)(\alpha g))(x) \\ & = & (\alpha g)(x)L((\alpha f)(x) + (\alpha f)(x)L(\alpha g))(x) \\ & = & g(x)L_x(f) + f(x)L_x(g) \end{array}$$

Du Théorème 3.1.1, on déduit l'existence d'un unique vecteur $v_x \in T_xM$ tel que $L_x = v_x$. On définit alors une section X sur M par

$$\begin{array}{rcl} X : M & \rightarrow & TM \\ x & \mapsto & X(x) = v_x \end{array}$$

Soient $(U,\varphi) \in atl(M,x)$, $W \subset M$ un ouvert voisinage de x tel que $\overline{W}$ compact et $x \in W \subset \overline{W} \subset U$. Si $\alpha \in C^\infty(M)$ tel que $\alpha_{/W} = 1$ et $supp(\alpha) \subset U$, alors pour tout $y \in W$ on a

$$\begin{array}{rcl} X_y & = & X_y(\varphi^i)\partial_{i/y} \\ & = & L_y(\varphi^i)\partial_{i/y} \\ & = & L_y(\alpha\varphi^i)\partial_{i/y} \\ & = & L(\alpha\varphi^i)(y)\partial_{i/y} \end{array}$$

Ce qui montre que X est une section de classe C^∞ tel que $X_{/W} = L(\alpha\varphi^i)\partial_i$.

■

3.5 Algèbre de Lie des champs de vecteurs.

Définition 3.5.1. *Soient $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. Le crochet de Lie de X, Y est un champ de vecteurs $[X, Y]$ definit par*

$$\begin{array}{rcl} [X,Y] : C^\infty(M) & \to & C^\infty(M) \\ f & \mapsto & [X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \end{array}$$

Propriétés 3.5.1. *:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$.
2. $[f.X, g.Y] = f.X(g).Y - g.Y(f).X + (fg).[X, Y]$.
3. $[X, Y]_{/U} = [X_{/U}, Y_{/U}]$.
4. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, *(identité de Jacobi).*

$$\begin{array}{rcl} [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] & + & [[Z,X],Y] \\ & = & X\circ Y\circ Z - Z\circ X\circ Y - Y\circ X\circ Z + Z\circ Y\circ X \\ & & +Y\circ Z\circ X - X\circ Y\circ Z - X\circ Z\circ Y + Y\circ X\circ Z \\ & & +Z\circ X\circ Y - Y\circ Z\circ X - Z\circ Y\circ X + X\circ Z\circ Y \\ & = & 0. \end{array}$$

5. *Relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M)$ on a $[\partial_i, \partial_j] = 0$. En effet*

$$\begin{array}{rcl} [\partial_i,\partial_j](f) & = & \partial_i(\partial_j(f)) - \partial_j(\partial_i(f)) \\ & = & \partial_i(\dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\circ\varphi) - \partial_j(\dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\circ\varphi) \\ & = & \dfrac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j}\circ\varphi) - \dfrac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}\circ\varphi) \\ & = & 0. \end{array}$$

6. *Si $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M)$,alors*

$$[X, Y] = \Big(X^i\partial_i(Y^j) - Y^i\partial_i(X^j)\Big)\partial_j$$

Définition 3.5.2. *Soit $f : M^m \to N^n$ une application différentiable. Deux champs de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$ sont dit f-équivalent si $df \circ X = Y \circ f$, i.e. le diagramme* *suivant est commutatif :*

$$
\begin{array}{ccc}
 & df & \\
TM & \longrightarrow & TN \\
X \downarrow & & \downarrow Y \\
M & \longrightarrow & N \\
 & f &
\end{array}
$$

On note alors $X \sim_f Y$.

Propriétés 3.5.2. *Soient* $f : M^m \to N^n$ *une application de classe* C^∞, $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(TN)$ *et* $h \in C^\infty(N)$, *on a*

1. $h \circ f \in C^\infty(M)$.
2. *Si* $v = \dot{\gamma}(0) \in T_xM$ *alors* $d_x(v) = \overline{\dot{(f \circ \gamma)}}(0)$.
3. $d_xf(X_x)(h) = X_x(h \circ f)$.
4. $(df \circ X)(h) = X(h \circ f)$.
5. $(Y \circ f)_x(h) = Y_{f(x)}(h) = Y(h)(f(x)) = (Y(h) \circ f)(x)$.
6. $(Y \circ f)(h) = Y(h) \circ f$.

Théorème 3.5.1. *Soient* $f : M^m \to N^n$ *une application de classe* C^∞, $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ *et* $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$. *Si*

$$X_1 \sim_f Y_1 \quad et \quad X_2 \sim_f Y_2,$$

alors

1) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) : \quad (\lambda X_1 + X_2) \sim_f (\lambda Y_1 + Y_2)$.

2) $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$.

Preuve De la formule (Propriétés 3.5.2 (6)), on obtient :

$$
\begin{aligned}
df \circ [X_1, X_2] &= [X_1, X_2](h \circ f) \\
&= X_1(X_2(h \circ f)) - X_2(X_1(h \circ f)) \\
&= X_1(df \circ X_2(h)) - X_2(df \circ X_1(h)) \\
&= X_1((Y_2 \circ f)(h)) - X_2((Y_1 \circ f)(h)) \\
&= X_1(Y_2(h) \circ f) - X_2((Y_1(h) \circ f) \\
&= df \circ X_1(Y_2(h)) - df \circ X_2(Y_1(h)) \\
&= Y_1(Y_2(h)) - Y_2(Y_1(h)) \\
&= [Y_1, Y_2](h) \circ f \\
&= ([Y_1, Y_2] \circ f)(h)
\end{aligned}
$$

■

Définition 3.5.3. *Soit $f : M^m \to N^n$ une application de classe C^∞. On appel image in verse de fonctions par f l'application :*

$$\begin{array}{rcl} f^* : C^\infty(N) & \to & C^\infty(M) \\ h & \mapsto & f^*(h) = h \circ f \end{array}$$

Théorème 3.5.2. *Soient $f : M^m \to N^n$ un difféomorphisme de classe C^∞. Si $X \in \Gamma(TM)$ alors $Y = df(X) \circ f^{-1}$ est un champ de vecteurs sur N tels que*

$$\begin{array}{rcl} Y : N & \longrightarrow & TN \\ y & \longmapsto & Y_y = df(X) \circ f^{-1}(y) \\ & & \quad = d_{f^{-1}(y)} f(X_{f^{-1}(y)}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & df & \\ TM & \longrightarrow & TN \\ X \downarrow & & \downarrow Y \\ M & \to & N \\ & f & \end{array}$$

Définition 3.5.4. *Soit $f : M^m \to N^n$ un difféomorphisme de classe C^∞. On appel image directe de champs de vecteurs par f l'application :*

$$\begin{array}{rcl} f_* : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(N) \\ X & \longmapsto & f_*(X) = df(X) \circ f^{-1} \end{array}$$

Définition 3.5.5. *Soit $f : M^m \to N^n$ un difféomorphisme de classe C^∞. On appel image inverse de champs de vecteurs par f l'application :*

$$\begin{array}{rcl} f^* : \mathcal{H}(N) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M) \\ Y & \longmapsto & f^*(Y) = f_*^{-1}(Y) \\ & & \qquad = df^{-1}(Y) \circ f \end{array}$$

Propriétés 3.5.3. *Soit $f : M^m \to N^n$ un difféomorphisme de classe C^∞. On a :*

1. *f_* est bijective tel que $(f_*)^{-1} = f^* = (f^{-1})_*$.*
2. *X et $f_*(X)$ sont f-équivalent.*
3. *Y et $f^*(Y)$ sont f^{-1}-équivalent.*

4. $f_*(\lambda X_1 + \beta X_2) = \lambda f_*(X_1) + \beta f_*(X_2)$.
5. $f_*(h.X) = h \circ f^{-1}.f_*(X)$.
6. $f_*([X_1, X_2]) = [f_*(X_1), f_*(X_2)]$.
7. $f^*(g.Y) = g \circ f.f^*(Y)$.
8. $f^*([Y_1, Y_2]) = [f^*(Y_1), f^*(Y_2)]$.
9. f_* *et* f^* *sont des isomorphismes linéaire.*

où $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $h \in C^\infty(M)$, $g \in C^\infty(N)$, $X, X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ *et* $Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$.

3.6 Dérivée de Lie.

Définition 3.6.1. *Soient* $X \in \mathcal{H}(M)$ *et* $h \in C^\infty(M)$. *La dérivée de Lie* h *par rapport à* X *est une fonction de classse* C^∞ *noté* $L_X(h)$ *et définie par :*

$$L_X(h)(x) = \frac{d}{dt}(h \circ \varphi_t(x))_{/t=0} \tag{3.11}$$

où $\varphi_t(x)$ *est le groupe à un paramètre local associé à* X *au voisinage de* $(0, x) \in \mathbb{R} \times M$.

Remarques 3.6.1. *:*

1) D'après l'unicité du groupe à un paramètre φ, *on déduit que* $L_X(h)$ *est bien définie. Comme* φ *est de classe* C^∞ *au voisinage de* $(0, x)$ *on déduit que* $L_X(h)$ *de classe* C^∞.

2) $L_X(h) = X(h) = dh(X)$.

3) $L_X(h_1.h_2) = h_1.L_X(h_2) + h_2.L_X(h_1)$.

4) $L_X(a.h_1 + b.h_2) = a.L_X(h_1) + b.L_X(h_2)$.

5) $L_{\alpha.X+\beta.Y}(h) = \alpha.L_X(h) + \beta.L_X(h)$.

où $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, h, h_1, h_2 \in C^\infty(M)$ *et* $X, Y \in \mathcal{H}(M)$.

Définition 3.6.2. *Soient* $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. *On appel dérivée de Lie* Y *par rapport à* X *le champ de vecteurs est une noté* $L_X(Y)$ *et définie par :*

$$L_X(Y) = \frac{d}{dt}\Big(\varphi_t\Big)^*(Y)_{/t=0} = \frac{d}{dt}\Big[d\varphi_{-t} \circ Y \circ \varphi_t\Big]_{/t=0}. \tag{3.12}$$

où φ_t *est le groupe à un paramètre local associé à* X *au voisinage de* $0 \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.6.1. *Si* $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ *alors :*

1. $L_X(Y) = [X, Y]$.

2. $\frac{d}{dt}(\varphi_t)^*(Y) = (\varphi_t)^*(L_X Y) = (\varphi_t)^*([X, Y])$.

où φ_t *est le groupe à un paramètre local associé à* X *au voisinage de* $0 \in \mathbb{R}$.

Preuve Soit $f \in C^\infty(M)$, $x \in M$ et $\varphi_t(x)$ le groupe à un paramètre local associé à X au voisinage de $(0, x) \in \mathbb{R} \times M$.

1) Si on note

$$\alpha(t, s) = Y(\varphi(t, x)(f \circ \varphi_s)$$

alors

$$\begin{aligned} \alpha(t, 0) &= Y(\varphi(t, x))(f) \\ \alpha(0, s) &= Y(x)(f \circ \varphi_s) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(0,0) & = & \dfrac{\partial}{\partial t}[Y(f)(\varphi(t,x))]_{t=0} \\ & = & X_x(Y(f)) \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial s}(0,0) & = & \dfrac{\partial}{\partial s}[Y_x(f \circ \varphi_s)]_{s=0} \\ & = & Y_x[\dfrac{\partial}{\partial s}(f \circ \varphi_s)_{s=0}], \quad (Y_x \textit{ est linaire}) \\ & = & Y_x(X(f)). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}[\alpha(t,-t)]_{/t=0} & = & \dfrac{\partial}{\partial t}[Y(f)(\varphi(t,x))(f \circ \varphi_{-t}]_{t=0} \\ & = & \dfrac{d}{dt}[Y(f)(\varphi(t,x))(f \circ \varphi_{-t}]_{t=0} \\ & = & \dfrac{d}{dt}[(d\varphi_{-t} \circ Y \circ \varphi_t)_x(f)]_{t=0} \\ & = & \dfrac{d}{dt}[(d\varphi_{-t} \circ Y \circ \varphi_t)_x]_{t=0}(f) \\ & = & [L_X Y]_x(f) \end{array} \tag{3.13}$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}[\alpha(t,-t)]_{/t=0} & = & \dfrac{\partial}{\partial t}\alpha(0,0) - \dfrac{\partial}{\partial s}\alpha(0,0) \\ & = & X_x(Y(f)) - Y_x(X(f)) \\ & = & [X,Y](f)). \end{array} \tag{3.14}$$

des formules (3.13) et (3.14), on obtient $L_X Y = [X, Y]$.

2) On a :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dt}\varphi_t^*(Y) & = & \frac{d}{ds}\varphi_{t+s}^*(Y)_{/s=0} \\
& = & \frac{d}{ds}[d\varphi_{-t-s} \circ Y \circ \varphi_{t+s}]_{/s=0} \\
& = & \frac{d}{ds}[d\varphi_{-t} \circ d\varphi_{-s} \circ Y \circ \varphi_s \circ \varphi_t]_{/s=0} \\
& = & d\varphi_{-t}\Big(\frac{d}{ds}[d\varphi_{-s} \circ Y \circ \varphi_s]_{/s=0}\Big) \circ \varphi_t \\
& = & d\varphi_{-t}\Big(L_X Y\Big) \circ \varphi_t \\
& = & \varphi_t^*(L_X Y) \\
& = & \varphi_t^*([X, Y])
\end{array}$$

■

Théorème 3.6.2. *Soient $f : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe C^∞ et $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. Si X et Y sont f-équivalent, alors*

$$f \circ \varphi_t^X = \varphi_t^Y \circ f.$$

où φ_t^X (resp. φ_t^Y) désigne le groupe à un paramètre associé à X (resp. Y). De plus si f est un difféomorphisme alors

$$\varphi_t^{f^*(Y)} = f^{-1} \circ \varphi_t^Y \circ f.$$

Preuve Soit $x \in M$, on a

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t^X(x))_{t=0} & = & d_x f(X_x) \\
& = & Y_{f(x)}.
\end{array}$$

Ce qui montre que $f \circ \varphi_t^X(x)$ et $\varphi_t^Y(f(x))$ sont deux courbes intégrale de Y passant par $f(x)$, en vertu de l'unicité de la solution de l'équation :

$$\left\{\begin{array}{c}
\dot{\Phi} = Y(\Phi) \\
\\
\Phi(0, f(x)) = f(x)
\end{array}\right.$$

en déduit que $(f \circ \varphi_t^X)(x) = \varphi_t^Y(f(x)) = (\varphi_t^Y \circ f)(x))$.

■

Théorème 3.6.3. *Si $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $L_X Y = [X, Y] = 0$.

2. $(\varphi_t^X)^*(Y) = Y$.

3. $\varphi_t^X \circ \varphi_t^Y = \varphi_t^Y \circ \varphi_t^X$.

Preuve :

•(1 ⇒ 2) Si $[X, Y] = 0$, du Théorème 3.6.1, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^X)^*(Y) = \varphi_t^X)^*([X, Y]) = 0.$$

d'où

$$\varphi_t^X)^*(Y) = \varphi_0^X)^*(Y) = Id^*(Y) = Y.$$

•(2 ⇒ 3) On a

$$\varphi_t^Y = \varphi_t^{(\varphi_t^X)^*(Y))} = \varphi_{-t}^X \circ \varphi_t^Y \circ \varphi_t^X$$

d'après le Théorème 3.6.2, on obtient

$$\varphi_t^X \circ \varphi_t^Y = \varphi_t^Y \circ \varphi_t^X$$

•(3 ⇒ 1) On a

$$\begin{array}{rcl} [X, Y](f) & = & X(Y(f)) - Y(X(f)) \\ & = & \dfrac{d}{dt}[Y(f) \circ \varphi_t^X]_{t=0} - \dfrac{d}{ds}[X(f) \circ \varphi_s^Y]_{s=0} \\ & = & \dfrac{\partial^2}{\partial t \partial s}[f \circ \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X - f \circ \varphi_t^X \circ \varphi_s^Y]_{t,s=0} \\ & = & 0. \end{array}$$

■

Théorème 3.6.4. *Soit M une variété de dimension m. Si $X_1, ..., X_m$ sont des champs de vecteurs définis sur un ouvert $V \subset M$ tels que :*

1. $(\forall x \in V)$, $(X_1(x), ..., X_m(x))$*est base de* T_xM.

2. $(\forall i, j = 1, .., m)$, $[X_i, X_j] = 0$.

Alors il existe une carte $(U, x^i)_i \in atl(M)$ *tel que* $(\forall i = 1, ..., m)$, $X_i = \partial_i$.

Preuve Soient $x_0 \in M$ et $\varphi_{t_1}^{X_1}, ..., \varphi_{t_m}^{X_m}$ des groupes à 1-paramèttre associés à $X_1, ..., X_m$ respectivement au voisinage de $(0, x_0)$. Du Théorème 3.6.3 on déduit que $\varphi_{t_1}^{X_1}, ..., \varphi_{t_m}^{X_m}$ commute entre eux (i.e. $\varphi_{t_i}^{X_i} \circ \varphi_{t_j}^{X_j} = \varphi_{t_j}^{X_j} \circ \varphi_{t_i}^{X_i}$, $i, j = 1, ..., m$). Si on note

$$f(t_1, ..., t_m) = \varphi_{t_1}^{X_1} \circ ..... \circ \varphi_{t_m}^{X_m}(x)$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_k}(t_1, ..., t_m) &= \frac{\partial}{\partial t_k}[\varphi_{t_1}^{X_1} \circ ...\varphi_{t_k}^{X_k} \circ ... \circ \varphi_{t_m}^{X_m}(x)] \\
&= \frac{\partial}{\partial t_k}\varphi_{t_k}^{X_k} \circ [\varphi_{t_1}^{X_1} \circ ...\varphi_{t_{k-1}}^{X_{k-1}} \circ \varphi_{t_{k+1}}^{X_{k+1}} \circ ... \circ \varphi_{t_m}^{X_m}(x)] \\
&= X_k[\varphi_{t_k}^{X_k} \circ \varphi_{t_1}^{X_1} \circ ...\varphi_{t_{k-1}}^{X_{k-1}} \circ \varphi_{t_{k+1}}^{X_{k+1}} \circ ... \circ \varphi_{t_m}^{X_m}(x)] \\
&= X_k[\varphi_{t_1}^{X_1} \circ ... \circ \varphi_{t_k}^{X_k} \circ ... \circ \varphi_{t_m}^{X_m}(x)]
\end{aligned}$$

ce qui montre que f est une application de classe C^∞ telle que

$$d_0 f(e_k) = \frac{\partial f}{\partial t_k}(0, ..., 0) = X_k(x)$$

comme $(X_1(x), ..., X_m(x))$ est une base de $T_x M$, on déduit que f est un difféomorphisme locale au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^m$. Il existent donc un ouvert $W \subset V$ voisinage de x et I un ouvert voisinage de $0 \in \mathbb{R}^m$ tels que $f^{-1} : W \longrightarrow I$ est un difféomorphisme, d'où (W, f^{-1}) est une carte de M telle que :

$$d_t f(e_k) = \frac{\partial f}{\partial t_k}(t) = X_k(f(t))$$

$$d_{f(t)} f^{-1}(X_k(f(t))) = e_k$$

ce qui prouve que $X_k = \partial_k$ $(k = 1, ..., m)$ relativement à la carte (W, f^{-1}).

■

3.7 Exercices

Exercice 3.7.1. *Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = (\cos(t_0), \sin(t_0)) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ et*

$$\begin{aligned}
\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\
t &\longmapsto \gamma(t) = (\cos(at + t_0), \sin(at + t_0))
\end{aligned}$$

Calculer $\frac{d\gamma}{dt}(0)$. Déduire $T_{x_0}S^1$.

Exercice 3.7.2. *Sur la variété $M = \mathbb{R}^2$ on considère le champ de vecteurs $X = \partial_1 + 2\partial_2$. Déterminer le groupe à 1-paramèttre associé à X.*

Exercice 3.7.3. *Sur la variété $M = \mathbb{R}^2$ on considère le champ de vecteurs $X = y\partial_1 + \partial_2$. Déterminer le groupe à 1-paramèttre associé à X.*

Exercice 3.7.4. *Sur la variété* $M = \mathbb{R}^3$ *on considère le champ de vecteurs* $X = y\partial_2 - 2\partial_3$. *Déterminer le groupe à 1-paramèttre associé à* X.

Exercice 3.7.5. *Sur la variété* $M = \mathbb{R}^2$ *on considère le champ de vecteurs* $X = y\partial_1 + x\partial_2$. *Déterminer le groupe à 1-paramèttre associé à* X.

Exercice 3.7.6. *Sur la variété* $M = \mathbb{R}^2$ *on considère le champ de vecteurs* $X = y\partial_1 - x\partial_2$. *Déterminer le groupe à 1-paramèttre associé à* X.

Exercice 3.7.7. *Sur la variété* $M = S^2$ *on considère le champ de vecteurs* $X = y\partial_1 - x\partial_2$. *Déterminer le groupe à 1-paramèttre associé à* X.

Exercice 3.7.8. *Sur* $\mathbb{R}^3$, *on considère les champs de vecteurs*

$$\begin{aligned} X &= -y\partial_x + x\partial_y \\ Y &= -z\partial_y + y\partial_z \end{aligned}$$

1) Calculer $Z = [X, Y]$.

2) $X, Y, Z? \in \mathcal{H}(S^2)$.

3.8 solutions

Solution 3.8.1. *On a*

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = (-a\sin(t_0), a\cos(t_0)) \in T_{x_0}S^1$$

Comme $T_{x_0}S^1$ *est un espace vectoriel de dimension* 1 *on déduit que*

$$T_{x_0}S^1 = \{a\big(-\sin(t_0), \cos(t_0)\big);\ a \in \mathbb{R}\}.$$

Solution 3.8.2. *Le groupe à* 1*-paramèttre* $\varphi_t(x, y) = (x(t), y(t))$ *est solution du système :*

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x, y) = X(\varphi_t(x, y))$$

i.e :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 1 \\ \frac{d}{dt}y(t) = 2 \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases}$$

Donc

$$\varphi_t(x,y) = (x(t), y(t)) = (t + x,\ 2t + y).$$

Solution 3.8.3. *La solution du système :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = 1 \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases}$$

est donnée par :

$$\varphi_t(x,y) = (x(t), y(t)) = (\frac{1}{2}t^2 + ty + x,\ t + y).$$

Solution 3.8.4. *la solution du système :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 0 \\ \frac{d}{dt}y(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) = -2 \\ x(0) = x \\ y(0) = y \\ z(0) = z \end{cases}$$

est donnée par :

$$\varphi_t(x,y) = (x(t), y(t)) = (x, ye^t, -2t + z).$$

Solution 3.8.5. *Le système :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = x(t) \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases}$$

s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $A^2 = Id$ *on déduit*

$$\begin{aligned} \varphi_t(x,y) &= e^{A.t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0} \frac{1}{k!} t^k A^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (a(t)x + b(t)y,\ b(t)x + a(t)y) \end{aligned}$$

où $a(t) = \sum_{p=0} \frac{1}{2p!} t^{2p}$ *et* $b(t) = \sum_{p=0} \frac{1}{(2p+1)!} t^{(2p+1)}$.

Solution 3.8.6. *Le système :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases}$$

s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ x(0) = x \\ y(0) = y \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $A^2 = -Id$, $A^3 = -A$ on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_t(x,y) & = & e^{A.t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 & = & \displaystyle\sum_n \frac{t^n}{n!}A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 & = & \displaystyle\sum_p (-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sum_p (-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 & = & \cos(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \\
 & = & (x\cos(t) + y\sin(t), y\cos(t) - x\sin(t)).
\end{array}$$

Solution 3.8.7. *Sur $\mathbb{R}^3$ le système*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) = 0 \\ x(0) = x \\ y(0) = y \\ z(0) = z \end{cases}$$

admet pour solution (voir exercice précédent)

$$\varphi_t(x,y,z) = (x\cos(t) + y\sin(t),\ y\cos(t) - x\sin(t),\ z)$$

De plus, on remarque que si $(x,y,z) \in S^2$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_t(x,y,z) \in S^2$

i.e. $\big(x\cos(t) + y\sin(t)\big)^2 + \big(y\cos(t) - x\sin(t)\big)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solution 3.8.8. *:*

1) $Z = X \circ Y - Y \circ X = -z\partial_x + x\partial_z$.

2) $X, Y, Z \in \mathcal{H}(S^2)$ puisque $< X, N >=< Y, N >=< Z, N >= 0$, où $N = x\partial_x + y\partial_z + z\partial_z$ désigne le champ normal à la sphère S^2 .

Chapitre 4

Espace Cotangent à une Variété.

4.1 Espace Cotangent

Notations et propriétés :

Soient M une variété de dimension m et $x \in M$, on note

$$T_x^*M = (T_xM)^* \tag{4.1}$$

espace dual de l'espace vectoriel tangent T_xM.

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M \tag{4.2}$$

dual de l'espace tangent TM.

Si U est un ouvert de M, on note

$$T^*U = \bigcup_{x \in U} T_x^*M \tag{4.3}$$

dual de l'espace tangent TU.

Soient $(U, \varphi) \in atl(M)$ une carte de M et $(\partial_1, ..., \partial_m)$ la base locale de champs de vecteurs associée. On note par $(dx^1, ..., dx^n)$ la base locale de formes linéaires définies par

$$\begin{array}{rcl} dx^i : U & \longrightarrow & T^*U \\ x & \longmapsto & dx^i_{/x} = (\partial_{i/x})^* \end{array}$$

$$dx^i_{/x}(\partial_{j/x}) = \delta^i_j, \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

Si $(V,\psi) \in atl(M)$ et $(\overline{\partial}_1, ..., \overline{\partial}_m)$ la base locale de champs de vecteurs associée, alors

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_j &= a^i_j \partial_i \;=\; (\frac{\partial \varphi^i \circ \psi^{-1}}{\partial x^j} \circ \psi)\, \partial_i && (4.4)\\
a^i_j(x) &= \frac{\partial \varphi^i \circ \psi^{-1}}{\partial x^j}(\psi(x)) \\
\partial_j &= \overline{a}^i_j \overline{\partial}_i \;=\; (\frac{\partial \psi^i \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j} \circ \varphi)\, \overline{\partial}_i \\
(\overline{a}^i_j)_{ij} &= {}^t[(a^i_j)_{ij}]^{-1} \\
dx^i_{/x} &= dx^i_{/x}(\partial_{i/x}) d\,\overline{x}^i_{/x} = a^i_j(x) d\,\overline{x}^j_{/x} \\
d\,\overline{x}^i_{/x} &= \overline{a}^i_j(x) dx^j_{/x} && (4.5)
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_x : T^*_x M &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
\omega &\longmapsto (\omega(\partial_1), ..., \omega(\partial_m))
\end{aligned}$$

un isomorphisme linéaire tel que

$$\begin{aligned}
(\overline{\varphi}_x)^{-1} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow T^*_x M \\
(y_1, ..., y_m) &\longmapsto y_i dx^i_{/x}
\end{aligned}$$

Si on note

$$\begin{aligned}
\overline{\pi} : T^* M &\longrightarrow M \\
\omega &\longmapsto \pi(\omega), \quad \omega \in T_{\pi(\omega)} M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi} : \overline{\pi}^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^m \\
\omega &\longmapsto (\overline{\pi}(\omega), \overline{\varphi}_{\overline{\pi}(\omega)}(\omega))
\end{aligned}$$

alors $\overline{\mathcal{U}} = \{(\overline{\pi}^{-1}(U), \overline{\varphi}), \quad (U,\varphi) \in atl(M)\}$ est un atlas de T^*M, en effet si $(V,\psi) \in atlas(M)$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_x \circ (\overline{\psi}_{/x})^{-1}(y) &= \overline{\varphi}_x(y_i d\,\overline{x}^i_{/x}) \\
& \quad \overline{\varphi}_x(y_i \overline{a}^i_j(x) dx^j_{/x}) \\
&= {}^t(\overline{a}^i_j(x)).y \\
&= {}^t\Big(\frac{\partial \psi^i \circ \varphi}{\partial x^j}(x)\Big).y \\
\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1}(x,y) &= (x, {}^t\Big(\frac{\partial \psi^i \circ \varphi}{\partial x^j}(x)\Big).y)
\end{aligned}$$

d'où $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^m \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^m$ est une application de classe C^∞.

Définition 4.1.1. *La variété* $(T^*M,\overline{\mathcal{U}})$ *est dite espace cotangent à la variété* M.

T^*M est une variété de dimension $2m$.

4.2 Forme différentielle

Définition 4.2.1. *Une forme différentielle sur la variété* M^m *est une section*

$$\begin{array}{rccl} \omega: & M & \longrightarrow & T^*M \\ & x & \longmapsto & \omega_x \in T_x^*M \end{array}$$

de classe C^∞ *qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \omega : M & \longrightarrow & T^*M \\ Id \searrow & & \swarrow \overline{\pi} \\ & M & \end{array}$$

L'ensemble des formes différentielle est noté $\mathcal{H}^*(M)$ *ou* $\Gamma(T^*M)$.

Remarques 4.2.1. *Soit* $(U,\varphi) \in atl(M)$, *on a :*

1) $dx^1, ..., dx^m \in \mathcal{H}^*(U)$.

2) Si $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$ *alors relativement à la carte* $(\overline{\pi}^{-1}(U),\overline{\varphi})$ *on a*

$$\omega(x) = \omega_i(x)dx^i$$

$$\overline{\varphi}_x(\omega_x) = (\omega_1(x), ..., \omega_m(x))$$

on déduit que ω *est différentiable de classe* C^∞ *si et seulement si* ω_i, $(1 \leq i \leq m)$ *sont des fonctions de classe* C^∞.

Proposition 4.2.1. *Soit* $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$ *une forme différentielle. Alors*

$$\begin{array}{rcl} A_\omega : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ X & \longmapsto & \longmapsto \omega(X) \end{array}$$

définie par

$$\begin{array}{rcl} A_\omega(X) = M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \longmapsto \omega(X)(x) = \omega_x(X_x) \end{array}$$

est un opérateur $C^\infty(M)$-linéaire.

Preuve :

1) Si $\omega = \omega_i dx^i$ et $X = X^j \partial_j$ relativement à une carte (U, φ) alors $\omega(X) = X^i \omega_i \in C^\infty(U)$, ce prouve que A est une application bien définie.

2) Soient $f \in C^\infty(M)$ et $X, Y \in \mathcal{H}(M)$, pour toutn$x \in M$ on a

$$A_\omega(fX + Y)_x = \omega_x(f(x)X_x + Y_x) = f(x)\omega_x(X_x) + \omega_x(Y_x),$$

d'où

$$A_\omega(fX + Y) = \omega(fX + Y) = f\omega(X) + \omega(Y) = fA_\omega(X) + A_\omega(Y).$$

■

Proposition 4.2.2. *Soit $A : \mathcal{H}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ une application $C^\infty(M)$-linéaire, alors il existe une forme différentielle unique $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$ telle que $A = A_\omega$.*

Lemme 4.2.1. *Soient $X \in \mathcal{H}(M)$ et U un ouvert de M. Si $X_{/U} = 0$ alors $A(X)_{/U} = 0$.*

Preuve Soit $x \in U$, il existe $\theta \subset U$ un voisinage ouvert de x et $\lambda \in C^\infty(M)$ tels que

$$\begin{cases} supp(\lambda) \subset U \\ \lambda_{/\theta} = 1 \\ \lambda(x) = 1 \\ \lambda_{/U^c} = 0 \end{cases}$$

(voir Proposition 2.4.2), comme $\lambda X = 0$ alors

$$A(\lambda X)(x) = 0 = \lambda(x)A(X)(x)$$

d'où $A(X)(x) = 0$ et ce ci pour tout $x \in U$, donc $A_{/U} = 0$.
■

Du Lemme 4.2.1 on obtient :

Lemme 4.2.2. *Soient $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. On a*

$$(X_{/U} = Y_{/U}) \Longrightarrow (A(X)_{/U} = A(Y)_{/U}).$$

Lemme 4.2.3. *Soient* $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ *et* $x \in M$. *Si* $X_x = Y_x$ *alors* $A(X)(x) = A(Y)(x)$.

Preuve Soit $(U,\varphi) \in atl(M)$. De la Proposition 2.4.2 on déduit l'existence d'un ouvert θ voisinage de x et $\lambda \in C^\infty(M)$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{c} x \in \theta \subset U \\ \lambda_{/\theta} = 1 \\ \lambda_{/U^C} = 0 \end{array} \right)$$

Relativement à la carte (U,φ), si $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^i\partial_i$ alors

$$X_{/\theta} = (\lambda X)_{/\theta} = (\lambda X^i)_{/\theta}(\lambda\partial_i)_{/\theta}$$

$$Y_{/\theta} = (\lambda Y)_{/\theta} = (\lambda Y^i)_{/\theta}(\lambda\partial_i)_{/\theta}$$

du Lemme 4.2.2 on obtient

$$A(X)_{/\theta} = A(\lambda X)_{/\theta} = (\lambda X^i)_{/\theta}A(\lambda\partial_i)_{/\theta}$$

$$A(Y)_{/\theta} = A(\lambda Y)_{/\theta} = (\lambda Y^i)_{/\theta}A(\lambda\partial_i)_{/\theta}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} A(X)(x) & = & (\lambda X^i)(x)A(\lambda\partial_i)(x) \\ & = & X^i(x)A(\lambda\partial_i)(x) \\ & = & Y^i(x)A(\lambda\partial_i)(x) \\ & = & (\lambda Y^i)(x)A(\lambda\partial_i)(x) \\ & = & A(Y)(x) \end{array}$$

■

Preuve [de la Proposition 4.2.1]

Du Lemme 4.2.3 on déduit que A induit sur tout ouvert $U \subset M$ une application $C^\infty(U)$-linéaire

$$\begin{array}{rcl} A : \mathcal{H}(U) & \to & C^\infty(U) \\ Y & \mapsto & A(Y) \end{array}$$

définie par

$$(x \in U) : \quad A(Y)(x) = A(\widetilde{Y})(x)$$

où $\widetilde{Y} \in \mathcal{H}(M)$ tel que $\widetilde{Y}_x = Y_x$.

Si $X = X^i\partial_i$ relativement à une carte $(U,\varphi) \in atl(M)$ alors $A(X) = X^iA(\partial_i)$. Localement on définit une forme linéaire $\omega \in \mathcal{H}^*(U)$ d'une manière unique par la formule

$$\omega = A(\partial_i)dx^i \tag{4.6}$$

et on a

$$A(X) == X^i A(\partial_i) = A(\partial_i)dx^i(X) = \omega(X)$$

La formule (4.6) est indépendante de la carte choisie, en effet si $(V, \psi) \in atl(M)$ alors des formules (4.4) et (4.5) on a

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_j &= a^i_j \partial_i = (\frac{\partial \varphi^i \circ \psi^{-1}}{\partial x^j} \circ \psi)\, \partial_i \\ d\,\overline{x}^i = \overline{a}^i_j dx^j &= (\frac{\partial \psi^i \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j} \circ \psi)\, dx^j \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A(\overline{\partial}_i) d\overline{x}^i(X) &= A(a^s_i \partial_s) \overline{a}^i_j dx^j \\ &= a^s_i \overline{a}^i_j A(\partial_s) dx^j \\ &= \delta^s_j A(\partial_s) dx^j \\ &= A(\partial_j) dx^j \end{aligned}$$

Ce qui montre que la formule (4.6) définit globalement une forme linéaire unique $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$.

■

Remarque 4.2.1. *La Proposition 4.2.1 nous permet d'identifier une forme linéaire* $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$ *à l'opérateur* A_ω.

4.3 Image inverse

Définition 4.3.1. *Soient* M^m, N^n *deux variétés et* $f : M \longrightarrow N$ *une application de classe* C^∞. *L'application*

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{H}(N) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ \omega &\longmapsto f^*\omega = \omega \circ df \end{aligned}$$

est dite image inverse de f. $f^*\omega$ *est appelé transposée (pull-back) de la forme* ω *par* f.

Si $X \in \mathcal{H}(M)$ *et* $x \in M$ *alors*

$$(f^*\omega)(X)_x = \omega_{f(x)} \circ d_x f(X_x).$$

Définition 4.3.2. *Soient M^m, N^n deux variétés et $f : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme de classe C^∞. L'application*

$$\begin{array}{rcl} f_* : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(N) \\ \omega & \longmapsto & f_*\omega = (f^{-1})^*\omega = \omega \circ df^{-1} \end{array}$$

est dite image directe. Si $Y \in \mathcal{H}(N)$ et $y \in N$ alors

$$(f_*\omega)(Y)_y = \omega_{f^{-1}(y)} \circ d_y f^{-1}(Y_y).$$

Proposition 4.3.1. *Soit $f : M^m \longrightarrow N^n$ un difféomorphisme de classe C^∞. Si $X \in \mathcal{H}(M)$ et $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$ alors*

$$(f_*\omega)(f_*(X)) = \omega(X) \circ f^{-1}$$

i.e.

$$(y \in N), \quad (f_*\omega)(f_*(X))_y = \omega_{f^{-1}(y)}(X_{f^{-1}(y)}).$$

Preuve

$$\begin{array}{rcl} (f_*\omega)(f_*(X))(y) & = & \omega_{f^{-1}(y)} \circ d_y f^{-1}(d_{f^{-1}(y)} f(X_{f^{-1}(y)}) \\ & = & \omega_{f^{-1}(y)}(X_{f^{-1}(y)}). \end{array}$$

■

Chapitre 5

ProduitTensoriel

5.1 Complément algébrique

Théorème 5.1.1 (Factorisation)**.** *Soient E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective. Si $f : E \longrightarrow G$ est une application linéaire, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $Ker(g) \subset Ker(f)$.
2) il existe une unique application $h : F \longrightarrow G$ tel que $f = h \circ g$.

Preuve :

- $(2 \Longrightarrow 1)$

On a $x \in ker(g) \Rightarrow f(x) = h(g(x)) = 0$ d'où $Ker(g) \subset Ker(f)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & F \arrow[dl, "h"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

- $(1 \Longrightarrow 2)$

En vertu de la surjection de g, on pose

$$\begin{array}{rcl} h : F & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & h(y) = f(x) \quad (\text{où } y = g(x)) \end{array}$$

Si $x, x' \in E$ tel que $y = g(x) = g(x')$ alors $x - x' \in ker(g) \subset ker(f)$, d'où $f(x) = f(x')$ ce qui montre que h est une application linéaire bien définie telle que $f = h \circ g$. De la surjection de g on déduit que h est unique.

■

Définition 5.1.1. *Soient $E_1, ..., E_n$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Un produit tensoriel est un couple (E, α) où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\alpha : E_1 \times .... \times E_n \longrightarrow E$ est une application n-linéaire, telle que pour toute application n-linéaire $\beta : E_1 \times .... \times E_n \longrightarrow F$ il y a une unique application $f : E \longrightarrow F$ qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times & .... & \times E_n \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ E & \longrightarrow & F \\ & f & \end{array} \tag{5.1}$$

i.e. $f \circ \alpha = \beta$.

Le diagramme 5.1 est appelé deuxième propriété de factorisation unique noté PFU.

Notations 5.1.1. *:*

1) L'esapce vectoriel E est noté $E = E_1 \otimes .... \otimes E_n$.

2) Si $(v_1, ..., v_n) \in E_1 \times .... \times E_n$ on note $\alpha((v_1, ..., v_n)) = v_1 \otimes .... \otimes v_n$.

Théorème 5.1.2. *Le produit tensoriel existe et est unique dans le sens si (E', α') est un produit tensoriel, alors il existe un unique isomorphisme $g : E \longrightarrow E'$ tel que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times & .... & \times E_n \\ \alpha \swarrow & & \searrow \alpha' \\ E & \longrightarrow & E' \\ & g & \end{array}$$

Preuve :

• Unicité :

D'après la Définition 5.1.1, il existe une unique application linéaire $g : E \longrightarrow E'$ (resp $g' : E' \longrightarrow E$) qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} E_1\times & & .... & & \times E_n \\ \alpha \swarrow & & \downarrow & & \searrow \alpha' \\ E & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E \\ & g & & g' & \end{array}$$

d'où $g \circ g' = Id$, donc g est un isomorphisme linéaire.

- Existence :

Soient I un ensemble et

$$\mathcal{F}(I) = \{h : I \longrightarrow \mathbb{R},\ h\ \texttt{est nulle sauf sur un nombre fini}\}$$

on a $(\mathcal{F}(I), +, ., \times)$ est un $\mathbb{R}$-module unitaire. Si $i \in I$ on pose :

$$\begin{array}{rcl} < i >: I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ j & \longmapsto & < i > (j) = \delta_i^j = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ j = i \\ 0 & si\ j \neq i \end{array} \right. \end{array}$$

On remarque que si $h \in \mathcal{F}(I)$ alors il existent $j_1, ..., j_m$ tels que

$$h = \sum_{k=1}^{m} h(j_k) < j_k >$$

on déduit que $\mathcal{B} = \{< i >,\ i \in I\}$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}(I), +, .)$.

Soient $I = E_1 \times .... \times E_m$ et $\mathcal{N}(I)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(I)$ engendré par les élèments de la forme

$$< v_1, ..., av_i + bv'_i, ...v_m > -a < v_1, ..., v_i, ...v_m > -b < v_1, ..., v'_i, ...v_m > \tag{5.2}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(v_1, ..., v_i, ...v_m), (v_1, ..., v'_i, ...v_m) \in I$ $(1 \leq i \leq m)$. On désigne par :

- $\widetilde{E} = \mathcal{F}(I)_{/\mathcal{N}(I)}$ l'espace vectoriel quotient,
- P la surjection canonique déinie par

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{F}(I) & \longrightarrow & \widetilde{E} \\ h & \longmapsto & < h > \end{array}$$

P est est une application linéaire surjective.

- L'application ψ définie par

$$\begin{array}{rcl}\Psi : E_1 \times .... \times E_m & \longrightarrow & \mathcal{F}(I) \\ (v_1, ..., v_m) & \longmapsto & < v_1, ..., v_m >\end{array}$$

Ψ n'est ni linéaire ni multilinéaire.

- L'application $\widetilde{\alpha}$ définie par

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\alpha} : E_1 \times .... \times E_m & \longrightarrow & \widetilde{E} \\ (v_1, ..., v_m) & \longmapsto & \widetilde{\alpha}(v_1, ..., v_m) = [\Psi((v_1, ..., v_m))] \\ & & \qquad\qquad\quad = [< v_1, ..., v_m >] \\ & & \qquad\qquad\quad = P(< v_1, ..., v_m >)\end{array}$$

où $[< v_1, ..., v_m >]$ désigne la classe d'équivalence de $< v_1, ..., v_m >$.

De l'equation 5.2 on déduit que

$$\begin{array}{rcl}[< 0 >] & = & [< v_1, .., av_i + bv'_i, ..v_m > -a < v_1, .., v_i, ..v_m > -b < v_1, .., v'_i, ..v_m >] \\ & = & [< v_1, .., av_i + bv'_i, ..v_m >] - a[< v_1, .., v_i, ..v_m >] - b[< v_1, .., v'_i, ..v_m >] \\ & = & \widetilde{\alpha}(v_1, .., av_i + bv'_i, ..v_m) - a\widetilde{\alpha}(v_1, .., v_i, ..v_m) - b\widetilde{\alpha}(v_1, .., v'_i, ..v_m)\end{array}$$

d'où

$$\widetilde{\alpha}(v_1, .., av_i + bv'_i, ..v_m) = a\widetilde{\alpha}(v_1, .., v_i, ..v_m) + b\widetilde{\alpha}(v_1, .., v'_i, ..v_m).$$

Donc $\widetilde{\alpha}$ est une application m-linéaire qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & E_1 & \times .... \times & E_m & \\ \Psi \swarrow & & & \searrow \widetilde{\alpha} & \\ \mathcal{F}(I) & & \longrightarrow & & \widetilde{E} \\ & & P & & \end{array} \qquad (5.3)$$

Soit (F, t) est un couple tel que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $t : E_1 \times .... \times E_m \longrightarrow F$ une application m-linéaire. On défini sur $\mathcal{F}(I)$ une application linéaire $f : \mathcal{F}(I) \longrightarrow F$ telle que sa valeur sur la base $\mathcal{B}$ est donnée la formule :

$$f(< v_1, ..., v_m >) = t(v_1, ..., v_m)$$

si

$$h = \sum_{k=1}^{p} a_k < v_1^k, ..., v_m^k > \in \mathcal{F}(I)$$

alors

$$f(h) = \sum_{k=1}^{p} a_k t(v_1^k, ..., v_m^k)$$

tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \times ....\times & E_m \\ \Psi \swarrow & & \searrow t \\ \mathcal{F}(I) & \longrightarrow & F \\ & f & \end{array} \tag{5.4}$$

On a

$$\begin{array}{cl} f & (< v_1, .., av_i + bv'_i, ..v_m > -a < v_1, .., v_i, ..v_m > -b < v_1, .., v'_i, ..v_m >) \\ = & f(< v_1, .., av_i + bv'_i, ..v_m >) - af(< v_1, .., v_i, ..v_m >) - bf(< v_1, .., v'_i, ..v_m >) \\ = & t(v_1, .., av_i + bv'_i, ..v_m) - at(v_1, .., v_i, ..v_m) - bt(< v_1, .., v'_i, ..v_m) \\ = & 0 \end{array}$$

On déduit que $ker(P) = \mathcal{N} \subset ker(f)$. Du théorème de factorisation (Théorème 5.1.1), on déduit l'existence d'une unique application linéaire $\widetilde{g} : \widetilde{E} \longrightarrow F$ telle que $f = \widetilde{g} \circ P$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}(I) & \\ P \swarrow & & \searrow f \\ \widetilde{E} & \longrightarrow & F \\ & \widetilde{g} & \end{array} \tag{5.5}$$

De la commutativité des diagramme (5.3), (5.4) et (5.5) on obtient la commutativité du diagramme globale suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & E_1 \times .... \times E_m & & \\ & & \downarrow \Psi & & \\ \widetilde{\alpha} \swarrow & & \mathcal{F}(I) & & \searrow t \\ & P \swarrow & & \searrow f & \\ \widetilde{E} & & \longrightarrow & & F \\ & & \widetilde{g} & & \end{array} \tag{5.6}$$

i.e. $\quad t = f \circ \Psi = \widetilde{g} \circ P \circ \Psi = \widetilde{g} \circ \widetilde{\alpha}.$

$$\begin{array}{ccc} & E_1 \quad \times....\times \quad E_m & \\ \widetilde{\alpha} \swarrow & & \searrow t \\ \widetilde{E} & \longrightarrow & F \\ & \widetilde{g} & \end{array} \tag{5.7}$$

Si on note par $E = < \widetilde{\alpha}(E_1 \times .... \times E_m) >$ le sous-espace vectoriel engendré par $\widetilde{\alpha}(E_1 \times .... \times E_m)$, $\alpha = \widetilde{\alpha} : E_1 \times .... \times E_m \longrightarrow E$ et $g = \widetilde{g}_{/E} : E \longrightarrow F$ la restriction de $\widetilde{g}$ à E, alors

$$\begin{array}{ccc} & E_1 \quad \times....\times \quad E_m & \\ \alpha \swarrow & & \searrow t \\ E & \longrightarrow & F \\ & g & \end{array} \tag{5.8}$$

est un diagramme commutatif.

■

De la propriété PFU (5.1) on déduit le théorème suivant

Théorème 5.1.3. *Soient $E_1, ..., E_m$, $F_1, ..., F_m$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $\alpha_1 : E_1 \longrightarrow F_1$, ...,$\alpha_m : E_m \longrightarrow F_m$ des applications linéaires, alors il existe une unique application linéaire*

$$\alpha_1 \otimes ..... \otimes \alpha_m : E_1 \otimes .... \otimes E_m :\longrightarrow F_1 \otimes .... \otimes F_m$$

qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & \times.....\times & \alpha_m \\ E_1 \times .... \times E_m : & \longrightarrow & F_1 \times .... \times F_m \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ E_1 \otimes .... \otimes E_m : & \longrightarrow & F_1 \otimes .... \otimes F_m \\ \alpha_1 & \otimes.....\otimes & \alpha_m \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 \times ..... \times \alpha_m : E_1 \times .... \times E_m : & \longrightarrow & F_1 \times .... \times F_m \\ (v_1, ..., v_m) & \longmapsto & (\alpha_1(v_1), ..., \alpha_m(v_m)) \end{array}$$

est une application linéaire.

Remarque 5.1.1. *Si les applications $\alpha_1, ..., \alpha_m$ sont des isomorphismes, alors $\alpha_1 \otimes ..... \otimes \alpha_m$ est un isomorphisme linéaire.*

De la Définition 5.1.1, on obtient :

Théorème 5.1.4. *Si $(e_1^1, ..., e_{n_1}^1), ..., (e_1^m, ..., e_{n_m}^1)$ est une base de $E_1, ..., E_m$ respectivement alors*

$$\{e_{i_1}^1 \otimes .... \otimes e_{i_m}^m\}_{i_i,...,i_m}$$

est une base $E_1 \otimes .... \otimes E_m$.

Théorème 5.1.5. *Si $E_1, ..., E_m$ sont des espaces vevtoriels de dimensions finies, alors $E_1^* \otimes .... \otimes E_m^*$ est un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(E_1, ..., E_m)$ espace des applications m-linéaires de $E_1 \times ... \times E_m$ sur $\mathbb{R}$.*

Preuve Si on pose

$$\begin{array}{rcl} t : E_1^* \times .... \times E_m^* & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1, ..., E_m) \\ (h_1, ..., h_m) & \longmapsto & h_1...h_m \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} h_1...h_m : E_1 \times .... \times E_m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, ..., v_m) & \longmapsto & h_1(v_1)...h_m(v_m) \end{array}$$

alors t est une application m-linéaire. De la propriété PFU (5.1), on déduit l'existence d'une unique application linéaire $g : E_1^* \otimes .... \otimes E_m^* \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, ..., E_m)$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & E_1^* & \times .... \times & E_m^* & \\ & \alpha \swarrow & & \searrow t & \\ E_1^* \otimes .... \otimes E_m^* & & \underset{g}{\longrightarrow} & & \mathcal{L}(E_1, ..., E_m) \end{array}$$

Par construction g est une application surjective. Si

$$\eta = \sum \lambda_{i_1,...,i_m} e_{i_1}^* \otimes ... \otimes e_{i_m}^* \in E_1^* \times .... \times E_m^*$$

tel que $g(\eta) = 0$ alors

$$\sum \lambda_{i_1,...,i_m} e_{i_1}^* ... e_{i_m}^* = 0$$

d'où

$$\lambda_{i_1,...,i_m} = 0, \qquad (\forall i_1, ..., i_m$$

ce qui montre que g est injective, donc un isomorphisme linéaire.

■

Conséquences 5.1.1. *Soient $E_1, ..., E_m$ des espaces vectoriels de dimensions finis $n_1, ..., n_m$ et de base $(e_1^1, ..., e_{n_1}^1), ..., (e_1^m, ..., e_{n_m}^m)$ respectivement, alors*

1) $dim(E_1^* \otimes .... \otimes E_m^*) = dim(\mathcal{L}(E_1, ..., E_m)) = n_1 \times .... \times n_m$.

2) Si $\alpha_k : E_{i_k} \longrightarrow E_{i_k}^*$ désigne l'isomorphisme canonique $(1 \leq k \leq m)$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \alpha_1 \times ... \times \alpha_m & \\ E_1 \times .... \times E_m & \longrightarrow & E_1^* \times .... \times E_m^* \\ \alpha \downarrow & & \downarrow t \\ E_1 \otimes .... \otimes E_m & \longrightarrow & E_1^* \otimes .... \otimes E_m^* \\ & \alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_m & \end{array}$$

tel que $\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_m$ est un isomorphisme linéaire.

3) $dim(E_1 \otimes .... \otimes E_m) = dim(E_1^* \otimes .... \otimes E_m^*) = n_1 \times .... \times n_m$.

4) $\mathcal{B}^* = \{(e_{i_1}^1)^* \otimes ... \otimes (e_{i_m}^m)^*,\ 1 \leq i_1 \leq n_1, ..., 1 \leq i_m \leq n_m\}$ est une base de $E_1^* \otimes .... \otimes E_m^*$.

5) $\mathcal{B} = \{e_{i_1}^1 \otimes ... \otimes e_{i_m}^m,\ 1 \leq i_1 \leq n_1, ..., 1 \leq i_m \leq n_m\}$ est une base de $E_1 \otimes .... \otimes E_m$.

6) $(\lambda_1 v_1) \otimes ..... \otimes (\lambda_m v_m) = (\lambda_1 .... v \lambda_m) v_1 \otimes ..... \otimes v_m$.

7) $v_1 \otimes ... \otimes (v_i + v_i') \otimes ... \otimes v_m = v_1 \otimes ... \otimes v_i \otimes ... \otimes v_m + v_1 \otimes ... \otimes v_i' \otimes ... \otimes v_m$.

8) Si $(h_1, ..., h_m) \in E_1^* \times .... \times E_m^*$ alors $h_1 \otimes ... \otimes h_m$ est identifier à l'application m-linéaire

$$\begin{array}{rcl} h_1 \otimes ... \otimes h_m : E_1 \times .... \times E_m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, ..., v_m) & \longmapsto & h_1(v_1)...h_m(v_m) \end{array}$$

Définition 5.1.2. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et $p, q \in \mathbb{N}$. Le produit tensoriel*

$$T_p^q(E) = \underbrace{E \otimes .... \otimes E}_{p-fois} \otimes \underbrace{E^* \otimes .... \otimes E^*}_{q-fois}$$

est dit produit tensoriel d'ordre (p, q). On a :

$$T_0^0 = \mathbb{R}, \quad T_1^0 = E, \quad T_0^1 = E^*, \quad T_1^1 = E \otimes E^*$$

Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, on défini une application bilinéaire

$$\Phi : T_p^q(E) \times T_{p'}^{q'}(E) \longrightarrow T_{p+p'}^{q+q'}(E)$$

par

$$\begin{aligned}\Phi \quad & (e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*,\ e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_{p'}} \otimes e_{s_1}^* \otimes ... \otimes e_{s_{q'}}^*) = \\ & e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_{p'}} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* \otimes e_{s_1}^* \otimes ... \otimes e_{s_{q'}}^*\end{aligned}$$

On note

$$\prod_p^q (E) = \underbrace{E \times .... \times E}_{p-fois} \times \underbrace{E^* \times .... \times E^*}_{q-fois}$$

Si

$$\alpha : \prod_p^q (E) \to T_p^q(E) \quad (resp \quad \alpha : \prod_{p'}^{q'} (E) \to T_{p'}^{q'}(E))$$

est une application $(p+q)$-linéaire (resp. $(p'+q')$-linéaire) telle que la propriété PFU alors

$$\Phi \circ (\alpha, \alpha) : \prod_{p+p'}^{q+q'} (E) \to T_{p+p'}^{q+q'}(E)$$

est une application $(p+p'+q+q')$-linéaire telle que la propriété (PFU), où

$$\begin{array}{rcl}(\alpha, \alpha) : \prod_{p+p'}^{q+q'} (E) & \to & T_p^q(E) \times T_{p'}^{q'}(E) \\ (v_1, .., v_p, w_1, .., w_{p'}, h_1, .., h_q, h'_1, .., h'_{q'}) & \mapsto & (v_1 \otimes ..v_p \otimes h_1.. \otimes h_q,\ w_1 \otimes ..w_{p'} \otimes h'_1.. \otimes h'_{q'})\end{array}$$

Ce qui nous permet d'identifier $T_p^q(E) \otimes T_{p'}^{q'}(E)$ à $T_{p+p'}^{q+q'}(E)$.

Remarques 5.1.1. *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.*

1) Si $t \in T_p^q$ alors l'expression de t est donnée par :

$$t = t_{j_1 .. j_q}^{i_1, ..., i_p} e_{i_1} \otimes .... \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} ... \otimes e^{j_q}$$

où $e^{j_k} = (e_{j_k})^*$, $(1 \leq k \leq q)$.

2) Si $(\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n)$ *est une autre base de* E *tel que* $e_i = A_i^j \overline{e}_j$ *alors*

$$t = t_{l_1 ... l_q}^{s_1,...,s_p} A_{s_1}^{i_1} ... A_{s_p}^{i_p} B_{j_1}^{l_1} ... B_{j_q}^{l_q} \overline{e}_{i_1} \otimes .... \otimes \overline{e}_{i_p} \otimes \overline{e}^{j_1} ... \otimes \overline{e}^{j_q}$$

où $(B_j^i)_{i,j}$ *est la matrice inverse de* $(A_j^i)_{i,j}$.

Proposition 5.1.1. *Il existe une unique application* $C_r^s : T_p^q \longrightarrow T_{p-1}^{q-1}$ *vérifiant*

$$C_r^s(v_1 \otimes ..v_r \otimes ..v_p \otimes \omega^1 ..\omega^s .. \otimes \omega^q) = \omega^s(v_r) v_1 \otimes ..v_{r-1} \otimes v_{r+1} \otimes ..v_p \otimes \omega^1 \otimes ..\omega^{s-1} \otimes \omega^{s+1} \otimes ..\omega^q$$

$(1 \leq s \leq q)$ *et* $(1 \leq r \leq p)$.

Preuve Soit

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_r^s : \prod_p^q (E) & \rightarrow & T_{p-1}^{q-1}(E) \\ (v_1, ...v_p, \omega^1 ... \omega^q) & \mapsto & \omega^s(v_r) v_1 \otimes ..v_{r-1} \otimes v_{r+1} \otimes ..v_p \otimes \omega^1 \otimes ..\omega^{s-1} \otimes \omega^{s+1} \otimes ..\omega^q \end{array}$$

Λ_r^s est une application $(p+q)$-linéaire, en vertu de la propriété PFU, on déduit l'existence d'une unique application linéaire $C_r^s : T_p^q \longrightarrow T_{p-1}^{q-1}$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \prod_p^q(E) & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \Lambda_r^s \\ T_p^q(E) & \underset{C_r^s}{\longrightarrow} & T_{p-1}^{q-1}(E) \end{array}$$

■

Définition 5.1.3. *[Contraction] L' application linéaire* $C_r^s : T_p^q \longrightarrow T_{p-1}^{q-1}$ *est dite contraction.*

Propriétés 5.1.1. *:*

1) $C_r^s(v_1 \otimes ..v_r \otimes ..v_p \otimes \omega^1 ..\omega^s .. \otimes \omega^q) = \omega^s(v_r) v_1 \otimes ..v_{r-1} \otimes v_{r+1} \otimes ..v_p \otimes \omega^1 \otimes ..\omega^{s-1} \otimes \omega^{s+1} \otimes ..\omega^q$.

2) Si $t = t_{j_1 ... j_q}^{i_1 ... i_p} e_{i_1} \otimes .... \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} ... \otimes e^{j_q}$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} C_r^s(t) & = & e^{j_s}(e_{i_r}) t_{j_1 ... j_q}^{i_1 ... i_p} e_{i_1} \otimes ..\widehat{e_{i_r}} .. \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} .. \widehat{e^{j_s}} .. \otimes e^{j_q} \\ & = & t_{j_1 .. j_{s-1} \, k \, j_{s+1} .. j_q}^{i_1,..i_{r-1} \, k \, i_{r+1} ..,i_p} e_{i_1} \otimes ..\widehat{e_{i_r}} .. \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} .. \widehat{e^{j_s}} .. \otimes e^{j_q} \end{array}$$

3) $C_1^1 : v \otimes \omega \in T_1^1 \longrightarrow C_1^1 : (v \otimes \omega) = \omega(v) \in \mathbb{R}$.

4) $C_1^1 : v \otimes \omega \in T_1^2 \longrightarrow C_1^1(v_1 \otimes v_2 \otimes \omega) = \omega(v_1)v \in E$.

Théorème 5.1.6. *Soit E un espace vevtoriel de dimension finie n, On a*

1) T_0^q est isomrphe à $\mathcal{L}_q(E)$ espace vectoriel des applications q-linéaires de $\prod_q(E)$ sur $\mathbb{R}$.

2 T_1^q est isomrphe à $\mathcal{L}_q(E,E)$ espace vectoriel des applications q-linéaires de $\prod_q(E)$ sur E.

Preuve Du Théorème 5.1.5, on obtient (1).

Soit $\mathcal{U}$ l'application $(q+1)$-linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} : \prod_1^q (E) & \longrightarrow & \mathcal{L}_q(E,E) \\ (v, \omega^1, ..., \omega^q) & \longmapsto & \omega^1 .... \omega^q . v \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \omega^1 .... \omega^q . v : \prod_q (E) & \longrightarrow & E \\ (v_1, ..., v_q & \longmapsto & \omega^1(v_1) .... \omega^q(v_q) . v \end{array}$$

De la propriété PFU on déduit l'existentce d'une unique application linéaire g qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \prod_1^q(E) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\mathcal{U}"] & \\ T_1^q(E) \arrow[rr, mapsto, "g"'] & & \mathcal{L}_q(E,E) \end{tikzcd}$$

par construction g est une application linéaire surjective, comme

$$dim(T_1^q(E)) = dim(\mathcal{L}_q(E,E)) = n^{q+1}$$

on déduit que g est un isomorphisme linéaire.

■

5.2 Champ de tenseurs

Soit M^m une variété de dimension m. On note

$$\begin{array}{rcl}(T_p^q M)_x & = & T_p^q(T_xM) \\ T_p^q M & = & \bigcup_{x\in M} T_p^q(T_xM)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\pi_p^q : T_p^q M & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & \pi_p^q(t) = x, \quad t \in T_p^q(T_xM).\end{array}$$

Définition 5.2.1. *$T_p^q M$ est dit espace des tenseurs de type (p,q).*

Un élément $t \in T_p^q M$ est dit de tenseur de type (p,q).

Soit $(U,\varphi) \in atl(M)$ une carte sur M. Si $(\partial_1,...,\partial_m)$ (resp. $(dx^1,...,dx^m)$) désigne la base locale de $\mathcal{H}(M)$ (resp. $\mathcal{H}^*(M)$) alors le tenseur $t \in T_p^q M$ est donné par la formule

$$t = t_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} \partial_{i_1/x} \otimes ... \otimes \partial_{i_p/x} \otimes dx_{/x}^{i_1} \otimes ... \otimes dx_{/x}^{i_q} \tag{5.9}$$

Si $(V,\psi) \in atl(M)$ alors des formules (4.4) et (4.5) on a

$$\begin{array}{rcl}\overline{\partial}_j & = & a_j^i \partial_i \;=\; (\dfrac{\partial \varphi^i \circ \psi^{-1}}{\partial x^j} \circ \psi)\, \partial_i \\ d\,\overline{x}^i & = & \overline{a}_j^i dx^j \;=\; (\dfrac{\partial \psi^i \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j} \circ \varphi)\, dx^j\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}t & = & \overline{t}_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} \overline{\partial}_{i_1/x} \otimes ... \otimes \overline{\partial}_{i_p/x} \otimes d\,\overline{x}_{/x}^{i_1} \otimes ... \otimes d\,\overline{x}_{/x}^{i_q} \\ & = & \overline{t}_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} a_{i_1}^{s_1}(x)...a_{i_p}^{s_p}(x).\overline{a}_{r_1}^{j_1}(x)...\overline{a}_{r_q}^{j_q}(x) \partial_{s_1/x} \otimes ... \otimes \partial_{s_p/x} \otimes dx_{/x}^{r_1} \otimes ... \otimes dx_{/x}^{r_q}\end{array}$$

d'où

$$t_{r_1...r_q}^{s_1...s_p} = \overline{t}_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} a_{i_1}^{s_1}(x)...a_{i_p}^{s_p}(x).\overline{a}_{r_1}^{j_1}(x)...\overline{a}_{r_q}^{j_q}(x) \tag{5.10}$$

Définition 5.2.2. *Une section sur $T_p^q M$ est une application*

$$\begin{array}{rcl}\sigma : M & \longrightarrow & T_p^q M \\ x & \longmapsto & \sigma_x \in T_p^q(T_xM)\end{array}$$

telle que $\pi_p^q \circ \sigma = Id_M$ *i.e. le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \sigma : M & \longrightarrow & T_p^q M \\ Id_M \searrow & & \swarrow \pi_p^q \\ & M & \end{array}$$

Relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M)$, une section σ s'crit :

$$\sigma(x) = \sigma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) \partial_{i_1/x} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p/x} \otimes dx_{/x}^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{/x}^{i_q} \tag{5.11}$$

Définition 5.2.3. *Une section* $\sigma : M \longrightarrow T_p^q M$ *est dite de classe* C^∞ *si pour toute carte* $(U, \varphi) \in atl(M)$*, les composantes* $\sigma_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ *sont des fonctions de classe* C^∞.

Définition 5.2.4. *Un champ de tenseurs de type* (p, q) *est ne section* $\sigma : M \longrightarrow T_p^q M$ *de classe* C^∞.

L'ensemble des champs de tenseurs de type (p, q) *est noté* $\mathcal{T}_p^q(M)$.

Propriétés 5.2.1. *Soient* $t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}_p^q(M)$, $\bar{t} \in \mathcal{T}_{p'}^{q'}(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$. *On a :*

1. $(t_1 + t_2)(x) = t_1(x) + t_2(x), \quad (t_1 + t_2) \in \mathcal{T}_p^q(M)$
2. $(ft_1)(x) = f(x)t_1(x), \quad (ft_1) \in \mathcal{T}_p^q(M)$
3. $(t_1 \otimes \bar{t})(x) = t_1(x) \otimes \bar{t}(x), \quad (t_1 \otimes \bar{t}) \in \mathcal{T}_{p+p'}^{q+q'}(M)$.
4. *Soit* $(U, \varphi) \in atl(M)$ *une carte sur* M. *Si* $(\partial_1, \dots, \partial_m)$ *(resp.* $(dx^1, \dots, dx^m)$*) désigne la base locale de* $\mathcal{H}(M)$ *(resp.* $\mathcal{H}^*(M)$*) alors* $\{\partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}\}$ *est une base locale de* $\mathcal{T}_p^q(M)$ *(i.e. base de* $\mathcal{T}_p^q(U)$*).*
5. *Si*

$$\begin{array}{rcl} t & = & t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) \partial_{i_1/x} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p/x} \otimes dx_{/x}^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{/x}^{i_q} \\ \bar{t} & = & \bar{t}_{r_1 \dots r_{q'}}^{s_1 \dots s_{p'}}(x) \partial_{s_1/x} \otimes \dots \otimes \partial_{s_{p'}/x} \otimes dx_{/x}^{r_1} \otimes \dots \otimes dx_{/x}^{r_{q'}} \end{array}$$

relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M)$*, alors*

$$t \otimes \bar{t} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \bar{t}_{r_1 \dots r_{q'}}^{s_1 \dots s_{p'}} \partial_{i_1} \otimes \dots \partial_{i_p} \otimes \partial_{s_1} \otimes \dots \partial_{s_{p'}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots dx^{i_q} \otimes dx^{r_1} \otimes \dots \otimes dx^{r_{q'}}.$$

6. $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.
7. $\mathcal{T}_1^0(M) = \mathcal{H}(M)$.
8. $\mathcal{T}_0^1(M) = \mathcal{H}^*(M)$.
9. $\mathcal{T}_1^1(M)$ *s'identifie à l'espace des applications* $C^\infty(M)$*-linéaire de* $\mathcal{H}(M)$ *dans* $\mathcal{H}(M)$.

10. $\mathcal{T}_0^q(M)$ *s'identifie l'espace des applications* $C^\infty(M)-q$*-linéaire de* $\mathcal{H}(M)$ *dans* $C^\infty(M)$.
11. $\mathcal{T}_1^q(M)$ *s'identifie l'espace des applications* $C^\infty(M)-q$*-linéaire de* $\mathcal{H}(M)$ *dans* $\mathcal{H}(M)$.
12. $\mathcal{T}_0^2(M)$ *s'identifie l'espace des applications* $C^\infty(M)$*-bilinéaire de* $\mathcal{H}(M)$ *dans* $C^\infty(M)$.

5.3 Contraction de Champ de tenseurs

De la Propsition 5.1.1, on obtient

Proposition 5.3.1. *Il existe une unique application* $C^\infty(M)$*-linéaire* $C_r^s : \mathcal{T}_p^q(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(M)$ *vérifiant*

$$C_r^s(X_1 \otimes .. X_r \otimes .. X_p \otimes \omega^1 .. \omega^s .. \otimes \omega^q) = \omega^s(X_r) X_1 \otimes .. X_{r-1} \otimes X_{r+1} \otimes .. X_p \otimes \omega^1 \otimes .. \omega^{s-1} \otimes \omega^{s+1} \otimes .. \omega^q$$

pour tout $X_1, .., X_p \in \mathcal{H}(M)$ *et* $\omega^1, .., \omega^q \in \mathcal{H}^*(M)$, $(1 \leq s \leq q)$ *et* $(1 \leq r \leq p)$.

Définition 5.3.1. *[Contraction] L' application* $C^\infty(M)$*-linéaire* $C_r^s : \mathcal{T}_p^q(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{p-1}^{q-1}(M)$ *est dite contraction de champs de tenseurs.*

Chapitre 6

Connexion linéaire

6.1 Dérivée covariante de fonction

Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$. soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t) = f(tu + y), \ (y \in \mathbb{R}^n) \end{array}$$

La dérivée de g en t_0 est dite dérivée de la fonction f suivant la direction du vecteur u, elle est dite aussi dérivée covariante de f par rapport à u en y, on a

$$\begin{array}{rcl} g'(0) & = & \frac{df(tu+y)}{dt}_{|t=0} \\ & = & \frac{\partial f}{\partial x^i}(y).u^i \\ & = & d_y f(u). \end{array}$$

On note alors

$$(\nabla_u f)(y) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(y).u^i \tag{6.1}$$

On remarque que si f est une application de classe C^k alors $\nabla_u f$ est une application de classe C^{k-1}.

Définition 6.1.1. *Soit $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$. La dérivée covariante sur $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par rapport à u est définie par*

$$\begin{array}{rcl} \nabla_u : C^\infty(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ f & \longmapsto & \nabla_u f \end{array}$$

De même on définit la dérivée covariante

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathbb{R}^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ (v, f) & \longmapsto & \nabla_v f \end{array}$$

Propriétés 6.1.1. *Soient $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$, on a :*

1. $\nabla_u(\lambda f + g) = \lambda \nabla_u f + \nabla_u + g \quad (\mathbb{R} - linaire)$.
2. $\nabla_u(f.g) = g.\nabla_u f + f \nabla_u + g$ *(Identité de Leibnitz).*
3. $\nabla_{u+\lambda v} f = \nabla_u f + \lambda \nabla_v f \quad (\mathbb{R} - linaire)$.

Définition 6.1.2. *Soient M^m une variété, $u \in TM$ et $X \in \mathcal{H}(M)$. La dérivée covariante par rapport à u (resp. au champ de vecteurs X) est une application notée ∇_u (resp ∇_X), définie par*

$$\begin{array}{rcl} \nabla_u : C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ f & \longmapsto & \nabla_u f = u(f) = d_{\pi(u)} f(u) \end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X : C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ f & \longmapsto & \nabla_X f = X(f) = df \circ X \end{array}$$

(voir Définition 3.4.4).

Remarques 6.1.1. *:*

1) Si $X = X^i \partial_i$ relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M)$, alors

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X f & = & X^i \partial_i(f) \\ & = & X^i \dfrac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \circ \varphi \end{array}$$

2) Si $\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow M$ *est une courbe de classe* C^∞*, alors*

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot\gamma(t)} f &= d_{\gamma(t)} f(\dot\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \end{aligned}$$

3) Si $M = \mathbb{R}^m$ *alors* $X = (X^1, ..., X^m)$ *et* $\nabla_X f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

6.2 Connexion linéaire

Définition 6.2.1. *Soient* M^m *une variété de dimension* m*. Une connexion linéaire sur* M *(ou derivée covariante de champs de vacteurs) est une application*

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

qui verifie les conditions suivantes :

1. $\nabla_{X + fX'} Y = \nabla_X Y + f \nabla_{X'} Y \quad (C^\infty(M) - linaire).$
2. $\nabla_X (Y + \lambda Y') = \nabla_X Y + \lambda \nabla_X Y' \quad (\mathbb{R} - linaire).$
3. $\nabla_X f Y = (\nabla_X f) Y + f \nabla_X Y = X(f) Y + f \nabla_X Y.$

Exemple 6.2.1. *:*

1) Soit $\mathbb{R}^m$ *muni de l'atlas usuelle* $\{(\mathbb{R}^m, Id)\}$*, si* $X = (X^1, ..., X^m) \in (C^\infty(\mathbb{R}^m))^m$ *et* $Y = (Y^1, ..., Y^m) \in (C^\infty(\mathbb{R}^m))^m$ *alors*

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= (\frac{\partial Y^1}{\partial x^i} X^i, ..., \frac{\partial Y^m}{\partial x^i} X^i) \\ &= (X(Y^1), ..., X(Y^m)) \\ &= (\nabla_X Y^1, ..., \nabla_X Y^m) \end{aligned}$$

est une connexion linéaire sur $\mathbb{R}^m$.

Proposition 6.2.1. *Soient* M^m *une variété et* $X, Y \in \mathcal{H}(M)$*. Si* U *un ouvert de* M *tel que* $X_{/U} = 0$ *alors* $(\nabla_X Y)_{/U} = 0$.

Preuve Soient $V \subset U$ ouvert voisinage de x et $f \in C^\infty(M)$ tels que $f_{/V} = 1$ et $f_{/U^c} = 0$, on a

$$\begin{aligned} fX &= 0 \\ \nabla_{fX} Y &= 0, \end{aligned}$$

d'où $(\nabla_{fX} Y)_x = f(x)(\nabla_X Y)_x = 0$, comme $f(x) = 1$ on déduit que $(\nabla_X Y)_x = 0$. ■

De la Propodsition 6.2.1 et de la linéairité de la connexion ∇ par rapport à X, on déduit

Corollaire 6.2.1. *Soient M^m une variété et $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$. Si U est un ouvert de M tel que $X_{1/U} = X_{2/U}$ alors*

$$(\forall Y \in \mathcal{H}(M)) : \quad (\nabla_{X_1} Y)_{/U} = (\nabla_{X_2} Y)_{/U}.$$

Proposition 6.2.2. *Soient M^m une variété et $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. Si U est un ouvert de M tel que $Y_{/U} = 0$ alors $(\nabla_X Y)_{/U} = 0$.*

Preuve Soient $x \in U$, $V \subset U$ ouvert voisinage de x et $f \in C^\infty(M)$ tels que $f_{/V} = 1$ et $f_{/U^c} = 0$, on a

$$\begin{aligned} fY &= 0 \\ \nabla_X fY &= 0 = X(f)Y + f\nabla_X Y, \end{aligned}$$

d'où

$$(\nabla_X fY)_x = X(f)(x)Y_x + f(x)(\nabla_X Y)_x = f(x)(\nabla_X Y)_x = 0$$

comme $f(x) = 1$ on déduit que $(\nabla_X Y)_x = 0$. ■

Corollaire 6.2.2. *Soient M^m une variété et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(M)$. Si U est un ouvert de M tel que $Y_{1/U} = Y_{2/U}$ alors*

$$(\forall X \in \mathcal{H}(M)) : \quad (\nabla_X Y_1)_{/U} = (\nabla_X Y_2)_{/U}.$$

Du Corollaire 6.2.1 et Corollaire 6.2.2, on obtient

Proposition 6.2.3. *Soient M^m une variété et ∇ une connexion linéaire sur M. Si U est un ouvert de M alors ∇ induit une connexion linéaire sur U définie par*

$$\begin{array}{rcl}\nabla : \mathcal{H}(U)\times\mathcal{H}(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}(U) \\ (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y\end{array}$$

telle que

$$(\nabla_X Y)_x = (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_x$$

où $\widetilde{X} = X$ et $\widetilde{Y} = Y$ sur un voisinage de x, i.e. il existe $V \subset U$ un ouvert voisinage de x tel que $\widetilde{X}_{/V} = X_{/V}$ et $\widetilde{Y}_{/V} = Y_{/V}$.

Proposition 6.2.4. *Soient M^m une variété, ∇ une connexion linéaire sur M et $X, Y \in \mathcal{H}(M)$. Si $x \in M$ tel que $X_x = 0$ alors $(\nabla_X Y)_x = 0$.*

Preuve : Relativement à une carte $(U,\varphi) \in atl(M,x)$ on a $X = X^i\partial_i$ et $Y = X^j\partial_j$, de la Proposition 6.2.3, ∇ in duit une connexion sur U et on a

$$\begin{array}{rcl}(\nabla_X Y)_x & = & X^i(x)\partial_i(Y^j)\partial_j + X^i(x)Y^j(x)(\nabla_{\partial_i}\partial_j)_x \\ & = & X^i(x)\Big[\partial_i(Y^j)\partial_j + Y^j(x)(\nabla_{\partial_i}\partial_j)_x\Big] \\ & = & 0.\end{array}$$

■

Corollaire 6.2.3. *Soient M^m une variété, ∇ une connexion linéaire sur M et $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$. Si $x \in M$ tel que $X_x = Y_x$ alors $(\nabla_X Z)_x = (\nabla_Y Z)_x$.*

Le Corollaire 6.2.3 nous permet de poser la définition suivante :

Définition 6.2.2. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Si $x \in M$ alors ∇ induit une dérivée covariante par rapport au vecteurs tangents définie par :*

$$\begin{array}{rcl}\nabla : T_xM \times \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \nabla : T_xM \\ (v,Y) & \longmapsto & \nabla_v Y = (\nabla_X Y)_x\end{array}$$

où $X \in \mathcal{H}(M)$ tel que $X_x = v$.

Définition 6.2.3. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Soit $(\partial_1, ..., \partial_m)$ la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U,φ). On a*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k, \quad (1 \leq i, j \leq m) \tag{6.2}$$

où $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty$ appelé coefficient de Christoffel.

Si $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ relativement à la carte (U, φ), alors

$$\nabla_X Y = X^i\Big[\partial_i(Y^k) + Y^j\Gamma_{ij}^k\Big]\partial_k. \tag{6.3}$$

Proposition 6.2.5. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Si $(\partial_1, ..., \partial_m)$ (resp. $(\overline{\partial}_1, ..., \overline{\partial}_m)$) désigne la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, φ) (resp. (V, ψ)) alors*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^t = a_i^s\overline{a}_k^t[\partial_s(a_j^k) + a_j^l\Gamma_{ls}^k] \tag{6.4}$$

où

$$\begin{aligned} a_j^i &= \frac{\partial\varphi^i \circ \psi^{-1}}{\partial x^j} \circ \psi \\ \overline{a}_j^i &= \frac{\partial\psi^i \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j} \circ \varphi \\ (\overline{a}_j^i)_{ij} &= (a_j^i)_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

Preuve On a $\overline{\partial}_k = a_k^i\partial_i$ (resp. $\partial_k = \overline{a}_k^i\overline{\partial}_i$),

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{\partial}_i}\overline{\partial}_j &= \nabla_{a_i^s\partial_s} a_j^l\partial_l \\ &= a_i^s[\partial_s(a_j^l)\partial_l + a_j^l\Gamma_{ls}^k\partial_k] \\ &= a_i^s[\partial_s(a_j^k) + a_j^l\Gamma_{ls}^k]\partial_k \\ &= a_i^s[\partial_s(a_j^k) + a_j^l\Gamma_{ls}^k]\overline{a}_k^t\overline{\partial}_t \end{aligned}$$

■

Proposition 6.2.6. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Si $(\partial_1, ..., \partial_m)$ (resp. $(\overline{\partial}_1, ..., \overline{\partial}_m)$) désigne la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, φ) (resp. (V, ψ)) alors*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^t = \overline{a}_k^t A_{ij}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{ls}^k \tag{6.5}$$

où

$$A_{ij}^k = \frac{\partial^2\varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^j\partial x^i} \circ \psi$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} \partial_s(a_j^k) &= \frac{\partial}{\partial x^s}\Big(\frac{\partial\varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^j} \circ (\psi \circ \varphi^{-1})\Big) \\ &= \Big(\frac{\partial^2(\varphi^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^l\partial x^j} \circ \psi\Big)\Big(\frac{\partial\psi^l \circ \varphi^{-1}}{\partial x^s} \circ \varphi\Big) \\ &= \overline{a}_s^l\frac{\partial^2(\varphi^k \circ \psi^{-1})}{\partial x^l\partial x^j} \circ \psi \\ &= \overline{a}_s^l A_{lj}^k \end{aligned}$$

De la formule (6.5) on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_{ij}^{t} &= a_i^s \overline{a}_k^t [\partial_s(a_j^k) + a_j^l \Gamma_{ls}^k] \\
&= \overline{a}_k^t a_i^s \overline{a}_s^l A_{lj}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{ls}^k \\
&= \overline{a}_k^t \delta_i^l A_{lj}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{ls}^k \\
&= \overline{a}_k^t A_{ij}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{ls}^k
\end{aligned}$$

■

Définition 6.2.4. *Une connexion ∇ sur une variété M^m est dite localement plate au voisinage de $x \in M$, s'il existe une carte $(U,\varphi) \in atl(M,x)$ tel que $(\forall 1 \leq i,j,k \leq m) :\ \Gamma_{ij}^k = 0$.*

Remarque 6.2.1. *Si $(\forall 1 \leq i,j,k \leq m) :\ \Gamma_{ij}^k = 0$ relativement à la carte $(U,\varphi) \in atl(M,x)$, alors pour toute carte $(V,\psi) \in atl(M,x)$, on a d'après la formule (6.5)*

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{t} = \overline{a}_k^t A_{ij}^k = \overline{a}_k^t \frac{\partial^2 \varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^j \partial x^i} \circ \psi. \tag{6.6}$$

Définition 6.2.5. *Une connexion ∇ sur une variété M^m est dite localement symétrique au voisinage de $x \in M$, s'il existe une carte $(U,\varphi) \in atl(M,x)$ tel que*

$$(\forall 1 \leq i,j,k \leq m) :\ \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Remarques 6.2.1. *:Soit $(U,\varphi) \in atl(M)$ une carte de symétrie pour la connexion ∇.*

1) Si $(\partial_1, ..., \partial_m)$ désigne la base locale de champs de vecteurs relativement à la carte de symétrie (U,φ), alors

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k = 0.$$

2) Si $X = X^i\partial_i \in \mathcal{H}(U)$ et $Y = Y^j\partial_j \in \mathcal{H}(U)$, alors

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y - \nabla_Y X &= X^i\partial_i(Y^j)\partial_j - Y^j\partial_j(X^i)\partial_i + X^iY^j\nabla_{\partial_i}\partial_j - Y^jX^i\nabla_{\partial_j}\partial_i \\
&= [X,Y] + X^iY^j(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k \\
&= [X,Y]
\end{aligned}$$

3) Si $(V,\psi) \in atl(M,x)$, de la formule (6.5), on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_{ij}^{t} &= \overline{a}_k^t A_{ij}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{ls}^k \\ &= \overline{a}_k^t A_{ji}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{sl}^k \\ &= \overline{a}_k^t A_{ji}^k + a_j^l a_i^s \overline{a}_k^t \Gamma_{sl}^k \\ &= \overline{\Gamma}_{ij}^{t} \end{aligned}$$

On déduit que la symétrie est in dépendante de la carte choisie.

Définition 6.2.6. *Une connexion linéaire ∇ est dite symétrique si et seulement si*

$$(\forall X, Y \in \mathcal{H}(M) : \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \tag{6.7}$$

i.e.

$$(\forall (U,\varphi) \in atl(M) : \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (1 \leq i,j,k \leq m). \tag{6.8}$$

Définition 6.2.7. *Un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{H}(M)$ est dit parallèl relativement à une connexion ∇ si et seulement si*

$$(\forall X \in \mathcal{M}) : \quad \nabla_X Y = 0.$$

Localement, de la formule (6.3), on déduit que Y est parallèl si et seulement si

$$\partial_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad (1 \leq i,k \leq m). \tag{6.9}$$

Si ∇ est plate sur une carte (U,φ) (i.e. $\Gamma_{ij}^k = 0$) alors Y est parallèl si et seulement si Y est constant $Y = Y^j \partial_j$, où Y^j $(1 \leq i \leq m)$ sont des fonctions constantes.

6.3 Tenseur de torsion

Proposition 6.3.1. *Soient M^m une variété et ∇ une connexion linéaire sur M, alors l'application*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ (X,Y) &\longmapsto T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

est un tenseur de type $(1,2)$.

Preuve : Soient $f, g \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{array}{rcl} T(fX,Y) & = & \nabla_{fX}Y - \nabla_Y fX - [fX,Y] \\ & = & f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X + Y(f)X - f[X,Y] \\ & = & f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f[X,Y] \\ & = & fT(X,Y) \end{array}$$

Comme T est antisymétrique (i.e. $T(X,Y) = -T(Y,X)$) alors

$$\begin{array}{rcl} T(X,gY) & = & -T(gY,X) \\ & = & -T(Y,X) \\ & = & gT(X,Y) \end{array}$$

De la $\mathbb{R}$-bilinéarité de ∇ et $[,]$, on déduit que T est $\mathbb{R}$-bilinéaire.

■

Définition 6.3.1. *Soient M^m une variété et ∇ une connexion linéaire sur M. Le tenseur*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}$$

est dit tenseur de torsion associé à la connexion ∇.

Propriétés 6.3.1. *:*

1) La connexion ∇ est symétrique si et seulement si elle est sans torsion i.e. $T = 0$.

2) Toute connexion ∇ localement plate est sans torsion.

3) Si $(\partial_1, ..., \partial_m)$ désigne la base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, φ), alors

$$T = T^k_{ij}\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j \tag{6.10}$$

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}, \quad (1 \leq i,j,k \leq). \tag{6.11}$$

Théorème 6.3.1. *Soient M^m une variété, ∇ une connexion linéaire sur M et $p \in M$, alors $T_p = 0$ si et seulement si il existe une carte $(U, \varphi) \in atl(M,p)$ telle que*

$$\Gamma^k_{ji}(p) = 0, \quad (\forall\ 1 \leq i,j,k \leq m).$$

Preuve De la formule (6.11) on déduit que la condition est suffisante.

Réciproquement : Relativement à une carte $(V, \psi) \in atl(M, p)$ on a $T_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k - \overline{\Gamma}_{ji}^k = 0$. soit l'application $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$\varphi^k(q) = [\psi^k(q) - \psi^k(p)] + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{ij}^k(p)[\psi^i(q) - \psi^i(p)][\psi^j(q) - \psi^j(p)]$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^s} \circ \psi(q) &= \delta_s^k + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{sj}^k(p)[\psi^j(q) - \psi^j(p)] + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}_{is}^k(p)[\psi^i(q) - \psi^i(p)] \\
&= \delta_s^k + \frac{1}{2}[\overline{\Gamma}_{sj}^k(p) + \overline{\Gamma}_{js}^k(p)][\psi^j(q) - \psi^j(p)] \\
\frac{\partial \varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^s} \circ \psi(q) &= \delta_s^k + \overline{\Gamma}_{js}^k(p)[\psi^j(q) - \psi^j(p)] \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que φ est un difféomorphisme au voisinage de p (puisque $[\frac{\partial \varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^s} \circ \psi(p)]_{ks} = [\delta_s^k]_{ks}$ est une matrice inversible), donc il existe un ouvert U tel que $(U, \varphi) \in atl(M, p)$.

De la formule (6.12) on obtient

$$A_{sr}^k(q) = \frac{\partial^2 \varphi^k \circ \psi^{-1}}{\partial x^s \partial x^r} \circ \psi(q) = \overline{\Gamma}_{rs}^k(p) = \overline{\Gamma}_{sr}^k(p) \qquad (6.13)$$

$$a_s^k(p) = \delta_s^k, \quad [a_s^k(p)]_{sk} = Id = [\overline{a}_s^k(p)]_{sk}. \qquad (6.14)$$

En substituant les formules (6.13) et (6.14) dans la formule (6.5)

$$\overline{\Gamma}_{ij}^t = \overline{a}_k^t A_{ij}^k + a_i^s a_j^l \overline{a}_k^t \Gamma_{ls}^k.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_{ij}^t(p) &= \overline{a}_k^t(p) A_{ij}^k(p) + a_i^s(p) a_j^l(p) \overline{a}_k^t(p) \Gamma_{ls}^k(p) \\
&= A_{ij}^t(p) + \Gamma_{ij}^t(p) \\
&= \overline{\Gamma}_{ij}^t(p) + \Gamma_{ij}^t(p)
\end{aligned}$$

d'où

$$(\forall\ 1 \leq i, j, t \leq m) : \quad \Gamma_{ij}^t(p) = 0.$$

■

6.4 Tenseur de courbure

Soient ∇ une connexion linéaire sur une variété M^m et $f \in C\infty(M)$. Relativement à une carte (U, φ) on a

$$\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} f = \frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i \partial x^j} \circ \varphi$$

d'où

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}](f) &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j} f - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i} f \\
&= \frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i \partial x^j} \circ \varphi - \frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^j \partial x^i} \circ \varphi \\
&= 0 \\
&= \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}(f).
\end{aligned}$$

En général si $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ alors

$$\begin{aligned}
[\nabla_X, \nabla_Y](f) &= \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_Y \nabla_X f \\
&= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\
&= \nabla_{[X,Y]}(f).
\end{aligned}$$

Proposition 6.4.1. *Si ∇ est une connexion linéaire sur une variété M^m, alors l'application*

$$\begin{aligned}
R : \mathcal{H}(M)^3 &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\
(X, Y, Z) &\longmapsto R(X, Y, Z) = [\nabla_X, \nabla_Y](Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z) \\
&\qquad = \nabla_X \circ \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \circ \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z)
\end{aligned}$$

est un tenseur de type $(1, 3)$.

Preuve :

1) On remarque que R est une application 3-linéaire sur $\mathbb{R}$ telle que

$$R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z).$$

$$R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z). \tag{6.15}$$

2) Si $f \in C\infty(M)$ alors

$$\begin{aligned}
R(fX, Y, Z) &= \nabla_{fX} \circ \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \circ \nabla_{fX}(Z) - \nabla_{[fX,Y]}(Z) \\
&= f\nabla_X \circ \nabla_Y(Z) - Y(f)\nabla_X(Z) - f\nabla_Y \circ \nabla_X(Z) - f\nabla_{[X,Y]}(Z) + Y(f)\nabla_X(Z) \\
&= f\nabla_X \circ \nabla_Y(Z) - f\nabla_Y \circ \nabla_X(Z) - f\nabla_{[X,Y]}(Z) + \\
&= f.R(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

De la formule (6.15) on obtient $R(X, fY, Z) = f.R(X,Y,Z)$.

3)

$$\begin{aligned}
R(X,Y,fZ) &= \nabla_X \circ \nabla_Y(fZ) - \nabla_Y \circ \nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ)\\
&= \nabla_X Y(f)Z + \nabla_X(f\nabla_Y(Z)) - \nabla_Y X(f)Z - \nabla_Y(f\nabla_X(Z))\\
&\quad -f\nabla_{[X,Y]}(Z) - [X,Y](f)Z\\
&= Y(f)\nabla_X Z + X(Y(f))Z + f\nabla_X\nabla_Y(Z) + X(f)\nabla_Y(Z))\\
&\quad -X(f)\nabla_Y Z - Y(X(f))Z - f\nabla_Y\nabla_X(Z) - Y(f)\nabla_X(Z))\\
&\quad -f\nabla_{[X,Y]}(Z) - [X,Y](f)Z\\
&= f.R(X,Y,Z) + X(Y(f))Z - Y(X(f))Z - [X,Y](f)Z\\
&= f.R(X,Y,Z)
\end{aligned}$$

■

Définition 6.4.1. *Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. Le tenseur de type $(1,3)$ défini par*

$$\begin{aligned}
R : \mathcal{H}(M)^3 &\longrightarrow \mathcal{H}(M)\\
(X,Y,Z) &\longmapsto R(X,Y,Z) = [\nabla_X, \nabla_Y](Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z)\\
&\qquad = \nabla_X \circ \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \circ \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z)
\end{aligned}$$

est dit tenseur de courbure associé à la connexion ∇.

Relativement à une carte $(U,\varphi) \in atl(M)$ on a

$$\begin{aligned}
R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k\\
&= \nabla_{\partial_i}(\Gamma^s_{jk}\partial_s) - \nabla_{\partial_j}(\Gamma^s_{ik}\partial_s)\\
&= \partial_i(\Gamma^s_{jk})\partial_s - \partial_j(\Gamma^s_{ik})\partial_s + \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{jk}\partial_t - \Gamma^t_{js}\Gamma^s_{ik}\partial_t\\
&= \Big(\partial_i(\Gamma^t_{jk}) - \partial_j(\Gamma^t_{ik}) + \Gamma^t_{is}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^t_{js}\Gamma^s_{ik}\Big)\partial_t
\end{aligned}$$

d'où les composantes du tenseur de courbure relativement à la carte (U,φ) sont donsées par la formule

$$R^t_{ijk} = [\partial_i(\Gamma^t_{jk}) - \partial_j(\Gamma^t_{ik})] + [\Gamma^s_{jk}\Gamma^t_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^t_{js}] \tag{6.16}$$

Remarque 6.4.1. *Soit $(U,\varphi) \in atl(M)$, on a*

1) $R^t_{ijk} = -R^t_{jik}$, $(1 \leq i, j, k \leq m)$.

2) Si $\Gamma^k_{ij} = 0$ $(1 \leq i, j, k \leq m)$ *alors* $T = 0$ *et* $R = 0$ *sur* U.

6.5 Connexion des champs de tenseurs

On note l'ensemble des champs de tenseurs par

$$\mathcal{T}(M) = \bigoplus_{pq} \mathcal{T}_p^q(M) = \bigcup_{pq} \mathcal{T}_p^q(M).$$

Proposition 6.5.1. *Soient* M^m *une variété de dimension* m *et* ∇ *est une connexion linéaire sur* M *, alors il existe une et une seule 'application*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\nabla} : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{T}(M) & \longrightarrow & \mathcal{T}(M) \\ (X, t) & \longmapsto & \widetilde{\nabla}_X t \end{array}$$

telle que

1) Si $t \in \mathcal{T}_p^q(M)$ *et* $X \in \mathcal{H}(M)$ *alors* $\widetilde{\nabla}_X t \in \mathcal{T}(M)_p^q$.

2) Si $t \in \mathcal{T}_1^0(M) = \mathcal{H}(M)$ *et* $X \in \mathcal{H}(M)$ *alors* $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$.

3) Si $f \in \mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$ *et* $X \in \mathcal{H}(M)$ *alors* $\widetilde{\nabla}_X f = \nabla_X f = X(f)$.

4) Si $t_1 \in \mathcal{T}_p^q(M)$, $t_2 \in \mathcal{T}_{p'}^{q'}(M)$ *et* $X \in \mathcal{H}(M)$ *alors*

$$\widetilde{\nabla}_X t_1 \otimes t_2 = (\widetilde{\nabla}_X t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes \widetilde{\nabla}_X t_2 \in \mathcal{T}(M)_{p+p'}^{q+q'}.$$

5) $\widetilde{\nabla}$ *commute avec toute contraction* C_s^r *i.e.* $\widetilde{\nabla} \circ C_s^r = C_s^r \circ \widetilde{\nabla}$.

Preuve :

1) ***Unicité :*** On a

i) Des condition (2),(3) et (4) on déduit que si $\omega \in \mathcal{T}_0^1(M)$, $t \in \mathcal{T}(M)$, $X, Y \in \mathcal{T}_1^0(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, alors

$$(\widetilde{\nabla}_X \omega)(Y) \;=\; X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

ii) Si $t \in \mathcal{T}(M)$, $X \in \mathcal{H}(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\widetilde{\nabla}_X(ft) \;=\; X(f)\widetilde{\nabla}_X f.$$

iii) Si $t \in \mathcal{T}(M)$, U un ouvert de M tels que $t_{/U} = 0$ alors pour tout $X \in \mathcal{H}(M)$ on a $(\widetilde{\nabla}_X t)_{/U} = 0$.

iv) De l'expression locale de t et les conditions (2) et (4) de la proposition, on déduit l'unicité de $\widetilde{\nabla}$.

2) ***Existence :*** Soient $\omega \in \mathcal{T}_0^1(M)$ et $X, Y \in \mathcal{T}_1^0(M)$, on pose

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y \\
(\widetilde{\nabla}_X \omega)(Y) &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \\
\widetilde{\nabla}_X Y \otimes \omega &= (\nabla_X Y) \otimes \omega + Y \otimes \widetilde{\nabla}_X \omega \\
\widetilde{\nabla}_X (Y_1 \otimes ... Y_p \otimes \omega_1 ... \omega_q) &= \sum_{i=1}^{p} Y_1 \otimes ...(\nabla_X Y_i) \otimes ... Y_p \otimes \omega_1 ... \omega_q \\
&\quad + \sum_{j=1}^{q} Y_1 \otimes ... Y_p \otimes \omega_1 ...(\widetilde{\nabla}_X \omega_j) \otimes ... \omega_q
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de définir localement $\widetilde{\nabla}$ par

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X (t^{i_1..p_p}_{j_1..j_q} \partial_{i_1} \otimes ... \partial_{i_p} \otimes dx^{j^1} ... \otimes dx^{j^q}) &= X(t^{i_1..p_p}_{j_1..j_q})\, \partial_{i_1} \otimes ... \partial_{i_p} \otimes dx^{j^1} ... \otimes dx^{j^q} \\
&\quad + t^{i_1..p_p}_{j_1..j_q}\, \widetilde{\nabla}_X (\partial_{i_1} \otimes ... \partial_{i_p} \otimes dx^{j^1} ... \otimes dx^{j^q})
\end{aligned}$$

De la propriété (iii) on déduit que la définition de la connexion $\widetilde{\nabla}$ est indépéndante de la carte choisie. De la condition (2), $\widetilde{\nabla}$ est une extension de la connexion ∇, on note alors $\widetilde{\nabla}$ par
nabla. ■

Propriétés 6.5.1 (Expression locale). *Soient $X = X^i\partial_i \in \mathcal{H}(M)$ relativement à une carte (U,φ). On a*

1) Si $Y = Y^j\partial_j \in \mathcal{H}(M)$ alors

$$\nabla_X Y = X^i[\partial_i(Y^k) + Y^j\Gamma_{ij}^k]\partial_k \tag{6.17}$$

$$(\nabla_X Y)^k = X^i[\partial_i(Y^k) + Y^j\Gamma_{ij}^k] \tag{6.18}$$

2) Si $\omega = \omega_j dx^j \in \mathcal{H}^*(M)$ alors

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(\partial_j) &= X(\omega(\partial_j)) - \omega(\nabla_X\partial_j)\\ &= X^i[\partial_i(\omega_j) - \omega(\nabla_{\partial_i}\partial_j)\\ &= X^i[\partial_i(\omega_j) - \Gamma_{ij}^k\omega_k]\end{aligned}$$

d'où

$$(\nabla_X\omega)_k = X^i[\partial_i(\omega_k) - \omega_j\Gamma_{ik}^j] \tag{6.19}$$

$$(\nabla_{\partial_i} dx^j)_k = -\Gamma_{ik}^j \tag{6.20}$$

3) Si $t = t_j^i\partial_i \otimes dx^j \in \mathcal{T}_1^1(M)$ alors

$$\begin{aligned}\nabla_X t &= \nabla_{X^i\partial_i} t_j^s\partial_s \otimes dx^j\\ &= X^i[\partial_i(t_j^s)\partial_s \otimes dx^j + t_j^s(\nabla_{\partial_i}\partial_s)\otimes dx^j + t_j^s\partial_s\otimes(\nabla_{\partial_i}dx^j)]\\ &= X^i[\partial_i(t_j^s)\partial_s\otimes dx^j + t_j^s\Gamma_{is}^k\partial_k\otimes dx^j + t_j^s\Gamma_{ik}^j\partial_s\otimes dx^k]\\ &= X^i[\partial_i(t_k^s) + t_k^j\Gamma_{ij}^s + t_j^s\Gamma_{ik}^j]\partial_s\otimes dx^k\end{aligned}$$

d'où

$$(\nabla_X t)_k^s = X^i[\partial_i(t_k^s) + t_k^j\Gamma_{ij}^s + t_j^s\Gamma_{ik}^j] \tag{6.21}$$

4) Si $t = t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}\partial_{i_1}\otimes\ldots\partial_{i_p}\otimes dx^{j_1}\ldots\otimes dx^{j_q} \in \mathcal{T}_p^q(M)$ alors

$$(\nabla_X t)_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} = X^k\Big[\partial_k(t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}) + \sum_{r=1}^p \Gamma_{ks}^{i_r} t_{j_1\ldots\ldots j_q}^{i_1\ldots s\ldots i_p} + \sum_{r=1}^q \Gamma_{ks}^{i_r} t_{j_1\ldots s\ldots j_q}^{i_1\ldots\ldots i_p}\Big] \tag{6.22}$$

où "s" est mis dans la position "r".

Définition 6.5.1. *Soit E un ensemble muni d'une lois intene commutatif $+$. Un cycle d'une application $f : E^3 \longrightarrow E$ est définit par la formule*

$$Cycle f(x,y,z) = f(x,y,z) + f(z,x,y) + f(y,z,x).$$

Proposition 6.5.2. *[Identités de Bianchi] Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion sur M. On a*

1) $CycleR(X,Y,Z) = Cycle\Big(T(T(X,Y),Z) + (\nabla_X T)(Y,Z)\Big)$.

2) $Cycle\Big((\nabla_X R)(Y,Z,*) + R(T(X,Y),Z)*\Big) = 0$.

Preuve On a :
1)

$$\begin{array}{rcl} R(X,Y)Z &=& \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ R(Z,X)Y &=& \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\ R(Y,Z)X &=& \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} CycleR(X,Y)Z &=& R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X \\ &=& \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y Z) \\ && -(\nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_{[Z,X]}Y + \nabla_{[Y,Z]}X) \\ &=& \nabla_X(T(Y,Z)) + \nabla_Y(T(Z,X)) + \nabla_Z(T(X,Y)) + \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] \\ && +\nabla_Z[X,Y] - (\nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_{[Z,X]}Y + \nabla_{[Y,Z]}X) \\ &=& Cycle\nabla_X(T(Y,Z)) + Cycle\nabla_X[Y,Z] - Cycle\nabla_{[X,Y]}Z \end{array}$$

comme

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X(T(Y,Z)) &=& (\nabla_X T)(Y,Z) + T(\nabla_X Y, Z) + T(Y, \nabla_X, Z) \\ &=& (\nabla_X T)(Y,Z) + T(\nabla_X Y, Z) - T(\nabla_X, Z, Y) \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} Cycle\nabla_X(T(Y,Z)) &=& Cycle(\nabla_X T)(Y,Z) + [T(\nabla_X Y, Z) - T(\nabla_X, Z, Y)] \\ && +[T(\nabla_Z X, Y) - T(\nabla_Z, Y, X)] + [T(\nabla_Y Z, X) - T(\nabla_Y, X, Z)] \\ &=& Cycle(\nabla_X T)(Y,Z) + [T(\nabla_X Y, Z) - T(\nabla_Y, X, Z)] \\ && +[T(\nabla_Z X, Y) - T(\nabla_X, Z, Y)] + [T(\nabla_Y Z, X) - T(\nabla_Z, Y, X)] \\ &=& Cycle(\nabla_X T)(Y,Z) + CycleT(T(X,Y),Z) + CycleT([X,Y],Z) \end{array}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
CycleT([X,Y],Z) &+ Cycle\nabla_X[Y,Z] - Cycle\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= Cycle\Big\{\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Z[X,Y] - [[X,Y],Z] + \nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[X,Y]}Z\Big\} \\
&= Cycle\Big\{\nabla_X[Y,Z] - \nabla_Z[X,Y] - [[X,Y],Z]\Big\} \\
&= -Cycle[[X,Y],Z] \\
&= 0 \quad (IdentitdeJacobi).
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
CycleR(X,Y,Z) &= Cycle\nabla_X(T(Y,Z)) + Cycle\nabla_X[Y,Z] - Cycle\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= Cycle(\nabla_X T)(Y,Z) + CycleT(T(X,Y),Z) + CycleT([X,Y],Z) \\
&\quad + Cycle\nabla_X[Y,Z] - Cycle\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= Cycle(\nabla_X T)(Y,Z) + CycleT(T(X,Y),Z).
\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z,U) &= \nabla_X(R(Y,Z),U) - R(\nabla_X Y,Z)U) - R(Y,\nabla_X Z)U) - R(Y,Z)\nabla_X U \\
&= \Big\{\nabla_X \circ \nabla_Y \circ \nabla_Z U - \nabla_X \circ \nabla_Z \circ \nabla_Y U - \nabla_X \circ \nabla_{[Y,Z]}U\Big\} \\
&- \Big\{\nabla_{\nabla_X Y} \circ \nabla_Z U - \nabla_Z \circ \nabla_{\nabla_X Y}U - \nabla_{[\nabla_X Y,Z]}U\Big\} \\
&+ \Big\{\nabla_{\nabla_X Z} \circ \nabla_Y U - \nabla_Y \circ \nabla_{\nabla_X Z}U - \nabla_{[\nabla_X Z,Y]}U\Big\} \\
&- \Big\{\nabla_Y \circ \nabla_Z \circ \nabla_X U - \nabla_Z \circ \nabla_Y \circ \nabla_X U - \nabla_{[Y,Z]} \circ \nabla_X U\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(T(X,Y),Z)U &= R(\nabla_X Y,Z)U - R(\nabla_Y X,Z)U - R([X,Y],Z)U \\
&= \Big\{\nabla_{\nabla_X Y} \circ \nabla_Z U - \nabla_Z \circ \nabla_{\nabla_X Y}U - \nabla_{[\nabla_X Y,Z]}U\Big\} \\
&- \Big\{\nabla_{\nabla_Y X} \circ \nabla_Z U - \nabla_Z \circ \nabla_{\nabla_Y X}U - \nabla_{[\nabla_Y X,Z]}U\Big\} \\
&- \Big\{\nabla_{[X,Y]} \circ \nabla_Z U - \nabla_Z \circ \nabla_{[X,Y]}U - \nabla_{[[X,Y],Z]}U\Big\}
\end{aligned}$$

On remarque que

$$Cycle\nabla_{[[X,Y],Z]}U = \nabla_{Cycle[[X,Y],Z]}U = 0 \quad (\texttt{Identité de Jacobi})$$

$$\begin{aligned}
&Cycle\Big\{\nabla_X \circ \nabla_Y \circ \nabla_Z U - \nabla_X \circ \nabla_Z \circ \nabla_Y U - \nabla_Y \circ \nabla_Z \circ \nabla_X U + \nabla_Z \circ \nabla_Y \circ \nabla_X U\Big\}\\
&\quad = \Big\{\nabla_X \circ \nabla_Y \circ \nabla_Z U - \nabla_X \circ \nabla_Z \circ \nabla_Y U - \nabla_Y \circ \nabla_Z \circ \nabla_X U + \nabla_Z \circ \nabla_Y \circ \nabla_X U\Big\}\\
&\quad +\Big\{\nabla_Y \circ \nabla_Z \circ \nabla_X U - \nabla_Z \circ \nabla_Y \circ \nabla_X U - \nabla_Z \circ \nabla_X \circ \nabla_Y U + \nabla_Y \circ \nabla_X \circ \nabla_Z U\Big\}\\
&\quad +\Big\{\nabla_Z \circ \nabla_X \circ \nabla_Y U - \nabla_Y \circ \nabla_X \circ \nabla_Z U - \nabla_X \circ \nabla_Y \circ \nabla_Z U + \nabla_X \circ \nabla_Z \circ \nabla_Y U\Big\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Cycle\Big\{\nabla_{\nabla_X Z} \circ \nabla_Y U - \nabla_Y \circ \nabla_{\nabla_X Z} U - \nabla_{\nabla_Y X} \circ \nabla_Z U + \nabla_Z \circ \nabla_{\nabla_Y X} U\Big\}\\
&\quad = \Big\{\nabla_{\nabla_X Z} \circ \nabla_Y U - \nabla_Y \circ \nabla_{\nabla_X Z} U - \nabla_{\nabla_Y X} \circ \nabla_Z U + \nabla_Z \circ \nabla_{\nabla_Y X} U\Big\}\\
&\quad +\Big\{\nabla_{\nabla_Z Y} \circ \nabla_X U - \nabla_X \circ \nabla_{\nabla_Z Y} U - \nabla_{\nabla_X Z} \circ \nabla_Y U + \nabla_Y \circ \nabla_{\nabla_X Z} U\Big\}\\
&\quad +\Big\{\nabla_{\nabla_Y X} \circ \nabla_Z U - \nabla_Z \circ \nabla_{\nabla_Y X} U - \nabla_{\nabla_Z Y} \circ \nabla_X U + \nabla_X \circ \nabla_{\nabla_Z Y} U\Big\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Cycle\Big\{\nabla_X \circ \nabla_{[Y,Z]} U - \nabla_{[Y,Z]} \circ \nabla_X U + \nabla_{[X,Y]} \circ \nabla_Z U - \nabla_Z \circ \nabla_{[X,Y]} U\Big\}\\
&\quad = \Big\{\nabla_X \circ \nabla_{[Y,Z]} U - \nabla_{[Y,Z]} \circ \nabla_X U + \nabla_{[X,Y]} \circ \nabla_Z U - \nabla_Z \circ \nabla_{[X,Y]} U\Big\}\\
&\quad +\Big\{\nabla_Y \circ \nabla_{[Z,X]} U - \nabla_{[Z,X]} \circ \nabla_Y U + \nabla_{[Y,Z]} \circ \nabla_X U - \nabla_X \circ \nabla_{[Y,Z]} U\Big\}\\
&\quad +\Big\{\nabla_Z \circ \nabla_{[X,Y]} U - \nabla_{[X,Y]} \circ \nabla_Z U + \nabla_{[Z,X]} \circ \nabla_Y U - \nabla_Y \circ \nabla_{[Z,X]} U\Big\}\\
&0.
\end{aligned}$$

d'où $\quad Cycle\Big\{(\nabla_X R)(Y,Z,U) + R(T(X,Y),Z)U\Big\} = 0.$ ■

6.6 Image d'une connexion

Définition 6.6.1. *Soient M^m et N^n deux variétés, ∇ une connexion sur M et $f : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme. L'image directe de ∇ est une connexion sur N noté $f_*\nabla$ et définie par :*

$$(f_*\nabla)_X Y = f_*(\nabla_{f^*X} f^*Y) \tag{6.23}$$

où $X, H \in \mathcal{H}(N)$.

Propriétés 6.6.1. *:*

1) $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$

2) Si T *désigne le tenseur de torsion associé à* ∇*, alors* f_*T *est le tenseur de torsion associé à* $f_*\nabla$ *défini par :*

$$(f_*T)(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = f_*\big(T(f^*\widetilde{X}, f^*\widetilde{Y})\big)$$

3) Si R *désigne le tenseur de torsion associé à* ∇*, alors* f_*R *est le tenseur de torsion associé à* $f_*\nabla$ *défini par :*

$$(f_*R)(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = f_*\big(R(f^*\widetilde{X}, f^*\widetilde{Y})f^*\widetilde{Z}\big)$$

6.7 Exercices

Exercice 6.7.1. *Déterminer toutes les conexions sur la variété usuelle* $\mathbb{R}$.

Exercice 6.7.2. *Déterminer toutes les conexions sur la variété usuelle* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.7.3. *Déterminer toutes les conexions symetriques sur la variété usuelle* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.7.4. *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on considére la connexion* ∇ *définie par les matrices :*

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1)Calculer $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ $(1 \leq i, j \leq 2)$.

2) Soient $X = y\partial_1 + x\partial_2$ *et* $Y = xy\partial_1 + y\partial_2$*, calculer* $\nabla_X Y$ *et* $\nabla_Y X$

Exercice 6.7.5. *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on considére la connexion* ∇ *définie par les matrices :*

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1)Déterminer les champs de vecteurs parallèles relativement à la connexion ∇*.*

Exercice 6.7.6. *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on considére la connexion* ∇ *définie par les matrices :*

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1)Déterminer les champs de vecteurs parallèles relativement à la connexion ∇*.*

Exercice 6.7.7. *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on considére la connexion* ∇ *définie par les matrices :*

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1)Déterminer les champs de vecteurs parallèles relativement à la connexion ∇*.*

6.8 solutions

Solution 6.8.1. $\mathbb{R}$ *est une variété de dimension* 1 *muni de l'atlas* $(\mathbb{R}, Id)$*. soit* ∂ *le champ de vecteurs base alors*

$$\nabla_\partial \partial = \Gamma(x)\partial$$

On déduit que la connexion ∇ *est définie par une fonction* $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ *est inversement.*

Solution 6.8.2. $\mathbb{R}^2$ *est une variété de dimension* 2 *muni de l'atlas* $(\mathbb{R}^2, Id)$*. soit* (∂_1, ∂_1) *la base de champ de vecteurs base alors*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^1_{ij}(x)\partial_1 + \Gamma^2_{ij}(x)\partial_2$$

où Γ^k_{ij} *désignent les coefficients de Christoffel. Donc la connexion* ∇ *est caractérisée par la donné de deux matrices de fonctions*

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11}(x) & \Gamma^1_{12}(x) \\ \Gamma^1_{21}(x) & \Gamma^1_{22}(x) \end{bmatrix}, \qquad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11}(x) & \Gamma^2_{12}(x) \\ \Gamma^2_{21}(x) & \Gamma^2_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

Solution 6.8.3. *De l'exercice précédent, on déduit qu'une connexion symétrique est caractérisée par la donné de deux matrices symétriques*

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11}(x) & \Gamma^1_{12}(x) \\ \Gamma^1_{12}(x) & \Gamma^1_{22}(x) \end{bmatrix}, \qquad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11}(x) & \Gamma^2_{12}(x) \\ \Gamma^2_{12}(x) & \Gamma^2_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

Solution 6.8.4. *:*

1)

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_1}\partial_1 &= \Gamma^1_{11}\partial_1 + \Gamma^2_{11}\partial_2 = \partial_1 \\
\nabla_{\partial_1}\partial_2 &= \Gamma^1_{12}\partial_1 + \Gamma^2_{12}\partial_2 = -\partial_2 \\
\nabla_{\partial_2}\partial_1 &= \Gamma^1_{21}\partial_1 + \Gamma^2_{21}\partial_2 = \partial_2 \\
\nabla_{\partial_2}\partial_2 &= \Gamma^1_{22}\partial_1 + \Gamma^2_{22}\partial_2 = \partial_1
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{y\partial_1 + x\partial_2} xy\partial_1 + y\partial_2 \\
&= y\nabla_{\partial_1}\big(xy\partial_1 + y\partial_2\big) + x\nabla_{\partial_2}\big(xy\partial_1 + y\partial_2\big) \\
&= y\big[\partial_1(xy)\partial_1 + xy\nabla_{\partial_1}\partial_1 + \partial_1(y)\partial_2 + y\nabla_{\partial_1}\partial_2\big] \\
&\quad + x\big[\partial_2(xy)\partial_1 + xy\nabla_{\partial_2}\partial_1 + \partial_2(y)\partial_2 + y\nabla_{\partial_2}\partial_2\big] \\
&= y\big[y\partial_1 + xy\partial_1 - y\partial_2\big] + x\big[x\partial_1 + xy\partial_2 + \partial_2 + y\partial_1\big] \\
&= \big[y^2 + xy^2 + x^2 + xy\big]\partial_1 + x\big[x - y^2 + x^2y\big]\partial_2
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X &= xy\nabla_{\partial_1}\big(y\partial_1 + x\partial_2\big) + y\nabla_{\partial_2}\big(y\partial_1 + x\partial_2\big) \\
&= xy\big[y\nabla_{\partial_1}\partial_1 + \partial_2 + x\nabla_{\partial_1}\partial_2\big] + y\big[\partial_1 + y\nabla_{\partial_2}\partial_1 + \nabla_{\partial_2}\partial_2\big] \\
&= xy\big[y\partial_1 + \partial_2 - x\partial_2\big] + y\big[\partial_1 + y\partial_2 + \partial_1\big] \\
&= \big[xy^2 + 2y\big]\partial_1 + \big[xy - x^2y + y^2\big]\partial_2
\end{aligned}$$

Solution 6.8.5. *Un champ de vecteurs $Y = f(x,y)\partial_1 + g(x,y)\partial_2$ et parallèle relativement à la connexion ∇ si et seulement si*

$$\nabla_{\partial_1} Y = 0 \quad et \quad \nabla_{\partial_2} Y = 0$$

On a :

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\partial_1} Y \\
&= \partial_1(f)\partial_1 + f\nabla_{\partial_1}\partial_1 + \partial_1(g)\partial_2 + g\nabla_{\partial_1}\partial_2 \\
&= \partial_1(f)\partial_1 + f\partial_1 + \partial_1(g)\partial_2
\end{aligned}$$

d'où

$$(I) \quad \begin{cases} \partial_1(f) + f = 0 \\ \partial_1(g) = 0 \end{cases}$$

de même on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\partial_2} Y \\ &= \partial_2(f)\partial_1 + f\nabla_{\partial_2}\partial_1 + \partial_2(g)\partial_2 + g\nabla_{\partial_2}\partial_2 \\ &= \partial_2(f)\partial_1 + \partial_2(g)\partial_2 \end{aligned}$$

d'où

$$(II) \quad \begin{cases} \partial_2(f) = 0 \\ \partial_2(g) = 0 \end{cases}$$

du système (II), on déduit que $f(x, y) = f(x)$ *et* $g(x, y) = g(x)$.
du système (I), on déduit que $f'(x) + f(x) = 0$ *et* $g(x, y) = g(x) = Constante$.
d'où

$$f(x, y) = f(x) = Ke^{-x} \quad et \quad g(x, y) = C$$

ainsi

$$Y = Ke^{-x}\partial_1 + C\partial_2, \quad K, C \in \mathbb{R}.$$

Solution 6.8.6. *On a :*

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_1} Y = 0 \\ \nabla_{\partial_2} Y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (\partial_1(f) + f)\partial_1 + \partial_1(g)\partial_2 = 0 \\ (\partial_2(f) + g)\partial_1 + \partial_2(g)\partial_2 = 0 \end{cases}$$

d'où le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} 1)\ \partial_1(f) + f = 0 \\ 2)\ \partial_2(f) + g = 0 \\ 3)\ \partial_1(g) \quad\ \ = 0 \\ 4)\ \partial_2(g) \quad\ \ = 0 \end{cases}$$

De (3) et (4) on déduit $g(x, y) = C = Constante$.

De l'éqution (2) on obtient $f(x, y) = -Cy + h(x)$ *avec indépendante de la variable* y.

De l'éqution (2) on obtient $h'(x) + h(x) - Cy = 0$ *d'où*

$$h(x) = Cy + Ke^{-x}$$

comme h *ne dépend que de la variable* x, *on déduit*

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ g &= 0 \\ f(x, y) &= h(x) = Ke^{-x} \\ &. \end{aligned}$$

Chapitre 7

Transport parallèle

7.1 Champ le long d'une courbe

Soient M^m une variété de dimension m et ∇ une connexion linéaire sur M. relativement à une carte (U, φ), on a

$$\nabla_X Y = X^i[\partial_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k]\partial_k \tag{7.1}$$

ce qui montre que $\nabla_X Y$ dépend uniquement de la valeur de X en x et de Y au voisinage de x.

Si $v = v^i \partial_{i/x} \in T_x M$ alors

$$\nabla_v Y = v^i[\partial_{i/x}(Y^k) + Y^j(x)\Gamma_{ij}^k(x)]\partial_{k/x} \tag{7.2}$$

Proposition 7.1.1. *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞. Si $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(M)$ tels que $Y_1 \circ \gamma = Y_2 \circ \gamma$, alors*

$$(\forall t \in I) : \quad (\nabla_{\dot\gamma(t)} Y_1)_{\gamma(t)} = (\nabla_{\dot\gamma(t)} Y_2)_{\gamma(t)}.$$

Preuve De la formule (7.1) on obtient

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\dot\gamma(t)} Y_1)_{\gamma(t)} &= X^i(\gamma(t))[\partial_i(Y_1^k)(\gamma(t)) + Y_1^j(\gamma(t))\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))]\partial_{k/\gamma(t)} \\
&= X^i(\gamma(t))[\partial_i(Y_2^k)(\gamma(t)) + Y_2^j(\gamma(t))\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))]\partial_{k/\gamma(t)} \\
&= (\nabla_{\dot\gamma(t)} Y_2)_{\gamma(t)}
\end{aligned}$$

où $X^i(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(\varphi^i \circ \gamma(t))$ $(1 \leq i \leq m$.

■

Définition 7.1.1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un Intervalle et $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞. Un champ de vecteurs le long de la courbe γ est une section*

$$\begin{array}{rcl} X : I & \longrightarrow & TM \\ t & \longmapsto & X(t) \in T_{\gamma(t)}M \end{array}$$

Relativement à une carte (U, φ), on a

$$X(t) = X^i(t)\partial_{i/\gamma(t)}.$$

L'ensemble des champs de vacteurs le long de γ est un espace vecoriel sur $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{H}_\gamma(M)$.

Remarque 7.1.1. *Si $f \in C^\infty(I)$ et $X \in \mathcal{H}_\gamma(M)$ alors $f.X \in \mathcal{H}_\gamma(M)$.*

Exemples 7.1.1. *:*

1) $\dot{\gamma} : t \in I \longrightarrow \dot{\gamma}(t) \in TM$.

2) Si $X \in \mathcal{H}(M)$ alors $X \circ \gamma : t \in I \longrightarrow X(\gamma(t)) \in TM$ est un champ de vecteurs le long de γ.

3)$X : t \in I \longrightarrow X(t) = (sin(t), -cos(t), 0..., 0) \in TS^nM$.

Lemme 7.1.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une courbe de classe C^∞ tel $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) \neq 0$, alors il existent $I_0 \subset I$ voisinage de t_0 et une application $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ au voisinage de $\gamma(t_0)$ tels que*

$$(\forall t \in I_0) : \quad f(t) = F(\gamma(t)).$$

Preuve On a $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = (\frac{d\gamma^1}{dt}(t_0), ..., \frac{d\gamma^m}{dt}(t_0)) \neq (0, .., 0)$, soit $j \in \{1, .., m\}$ tel que $\frac{d\gamma^j}{dt}(t_0) \neq 0$ du théorème d'inversion locale, on déduit l'existence de $I_0 \subset I$ voisinage de t_0 tel que $\gamma^j : I_0 \longrightarrow \gamma^j(I_0)$ est un diféomorphisme de classe C^∞.

Si on pose

$$F = f \circ (\gamma^j)^{-1} \circ P^j : \gamma(I_0) \longrightarrow \mathbb{R},$$

où P^j désigne la $j-$ème projection. alors

$$(\forall t \in I_0) : \quad F(\gamma(t)) = f \circ (\gamma^j)^{-1} \circ P^j(\gamma(t)) = f(t).$$

■

Proposition 7.1.2. *[Extension de champ] Soient M^m une variété et $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞ . Si $X \in \mathcal{H}_\gamma$ un champ de vecteurs le long de γ et $t_0 \in I$ tel que $\dot\gamma(t_0) \neq 0$, il existent alors $I_0 \subset I$ voisinage de t_0 et $\widetilde{X}$ un champ de vecteurs au voisinage de $\gamma(t_0)$, tels que :*

$$(\forall t \in I_0) : \quad X(t) = \widetilde{X}(\gamma(t)).$$

$\widetilde{X}$ est dit extension locale de X.

Preuve Relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M, \gamma(t_0)$ on a

$$X(t) = X^i(t)\partial_{i/\gamma(t)}.$$

Du Lemme 7.1.1 on déduit l'existence de $I_0 \subset I$ ouvert voisinage de t_0 et des applications $F^1, ..., F^m$ de classe C^∞ au voisinage de $\varphi(\gamma(t_0))$ tels que

$$(\forall 1 \leq i \leq m), \, (\forall t \in I_0) : \quad X^i(t) = F^i(\varphi \circ \gamma(t)).$$

Si on pose $\widetilde{X} = (F^i \circ \varphi)\partial_i$ alors

$$(\forall t \in I_0) : \quad \widetilde{X} \circ \gamma(t) = X(t).$$

■

Remarque 7.1.2. *En général le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ n'est pas définit globalement*

$$\begin{array}{rcl} \gamma :]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & ((2cos(s) - 1)sin(s), (2cos(s) - 1)cos(s)) \end{array}$$

γ est une courbe telle que $\gamma(\frac{\pi}{3}) = \gamma(\frac{-\pi}{3}) = (0, 0)$, $\quad \dot\gamma(\frac{\pi}{3}) = (-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = V_1$ et $\quad \dot\gamma(-\frac{\pi}{3}) = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = V_2$.

Pour $X(t) = \dot\gamma(t)$, il n'existe pas de champs de vecteurs $\widetilde{X} \in \mathcal{H}(M)$ tel que $X = \widetilde{X} \circ \gamma$.

De la Proposition 7.1.1 et la Proposition 7.1.2, on peut définir la restriction d'une connexion suivant une courbe.

Définition 7.1.2. *Soient M^m une variété et ∇ une connexion sur M. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞, la restriction ∇_γ de la connexion ∇ à $\mathcal{H}_\gamma(M)$ est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \nabla_\gamma : \mathcal{H}_\gamma(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}_\gamma(M) \\ X & \longmapsto & \nabla_\gamma X \end{array}$$

tel que

$$(\nabla_\gamma X)_t = \nabla_{\dot\gamma(t)}\widetilde{X}$$

où $\widetilde{X}$ est une extension de X au voisinage de $\gamma(t)$.

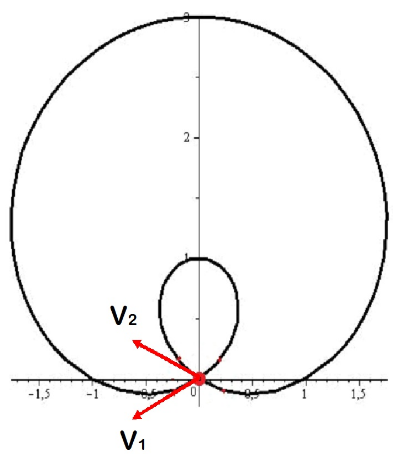


FIG. 7.1 – Courbe γ

Proposition 7.1.3. *Relativement à une carte* $(U, \varphi) \in atl(M)$*, si* $X(t) = X^i(t)\partial_{i/\gamma(t)}$ *alors*

$$(\nabla_\gamma X)_t = \Big[\frac{dX^k}{dt}(t) + \frac{d\gamma^i}{dt}(t)X^j(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\Big]\partial_{k/\gamma(t)} \tag{7.3}$$

où $\gamma^i = \varphi^i \circ \gamma$.

Preuve Soit Y une extension locale de X. De la formule (7.2) on obtient

$$\begin{aligned}
(\nabla_\gamma X)_t &= (\nabla_{\dot\gamma(t)}\widetilde{X}) \\
&= \frac{d\gamma^i}{dt}\Big[\partial_i(Y^k)(\gamma(t)) + Y^j((\gamma(t))\Gamma^k_{ij}((\gamma(t))\Big]\partial_{k/(\gamma(t)} \\
&= \Big[\frac{\partial(Y^k\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(\gamma(t))\frac{d(\varphi^i\circ\gamma)}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt}Y^j((\gamma(t))\Gamma^k_{ij}((\gamma(t))\Big]\partial_{k/(\gamma(t)} \\
&= \Big[\frac{d}{dt}(Y^k\circ\gamma(t)) + \frac{d\gamma^i}{dt}Y^j((\gamma(t))\Gamma^k_{ij}((\gamma(t))\Big]\partial_{k/(\gamma(t)} \\
&= \Big[\frac{dX^k}{dt}(t) + \frac{d\gamma^i}{dt}X^j(t)\Gamma^k_{ij}((\gamma(t))\Big]\partial_{k/(\gamma(t)}
\end{aligned}$$

∎

De la Proposition 7.1.3 on déduit

Propriétés 7.1.1. *:Soit* $X, Y \in \mathcal{H}_\gamma$*,* $f \in C^\infty(\mathbb{R}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, on a*

1) $\nabla_\gamma(X + \lambda Y) = \nabla_\gamma X + \lambda\nabla_\gamma Y$*,* *(*$\mathbb{R}-$*linéaire).*

2) $\nabla_\gamma(fX) = f'X + f\nabla_\gamma X$ *(formule de Leibnitz).*

Définition 7.1.3. *Soient M^m une variété de dimension m et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞. Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}_\gamma(M)$ est dit parallèl si*

$$\nabla_\gamma X = 0.$$

Localement, $X \in \mathcal{H}_\gamma(M)$ est parallèl si et seulement si pour toute carte $(U, \varphi) \in atl(M)$, on a

$$\frac{dX^k}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0, \quad (1 \leq k \leq m). \tag{7.4}$$

Proposition 7.1.4. *Soient M^m une variété de dimension m et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞. Si $t_0 \in I$ et $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, alors localement il existe un unique champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}_\gamma(M)$ tels que :*

$$\begin{cases} \nabla_\gamma X = 0 \\ X(t_0) = v \end{cases}$$

où $v = v^i \partial_i$.

Preuve Localement si $v = v^i \partial_{i/t_0}$ et $X(t) = Xi(t)\partial_{i/\gamma(t)}$, de la formule (7.4) on obtient le système d'équations différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dX^k}{dt} + \frac{d\gamma^i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0, \quad (1 \leq k \leq m). \\ \\ X_{t_0}^k = v^k \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X^1 \\ . \\ . \\ X^m \end{bmatrix} = -A(t) \begin{bmatrix} X^1 \\ . \\ . \\ X^m \end{bmatrix}(t) \\ \\ \begin{bmatrix} X^1 \\ . \\ . \\ X^m \end{bmatrix}(t_0) = \begin{bmatrix} v^1 \\ . \\ . \\ v^m \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7.5}$$

où $A(t) = \left(\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\Gamma_{ij}^k \circ \gamma(t)\right)_{jk}$. Le système admet l'unique solution définie par

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ . \\ . \\ X^m \end{bmatrix}(t) = \exp(-\int A(t)dt) \begin{bmatrix} v^1 \\ . \\ . \\ v^m \end{bmatrix}$$

■

La Proposition 7.1.5 nous permet de poser la définition suivante :

Définition 7.1.4. *Soient M^m une variété de dimension m et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞. Si $t_0, t_1 \in I$. Le transport parallèle le long de la courbe γ est une application notée $\mathcal{T}_\gamma$ définie par*

$$\begin{array}{rcl} T_\gamma : T_{\gamma(t_0)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(t_1)}M \\ v & \longmapsto & X(t_1) \end{array}$$

où $X \in \mathcal{H}_\gamma(M)$ tel que $\nabla_\gamma X = 0$ et $X(t_0) = v$.

Lemme 7.1.2. *Soient $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, $\quad A, B \in C^\infty(I, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ et*

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) \tag{7.6}$$

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) \tag{7.7}$$

deux systèmes d'équations différentielles tels que

$$(\forall\ t \in [t_0, b[) : \quad A(t) = B(t).$$

Si $X(t)$ (resp. $Y(t)$) est une solution du système (7.6) (resp. (7.7)) tel que $X(t_0) = Y(t_0)$ alors

$$X_{/[t_0,b[} = Y_{/[t_0,b[}.$$

Preuve Soit $\widetilde{X}$ l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{X} :]a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ t & \longmapsto & \widetilde{X}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} X(t) & si\ t \in]a, t_0[\\ Y(t) & si\ t \in [t_0, b[\end{array} \right. \end{array}$$

Puisque $X(t_0) = Y(t_0)$ on déduit que $\widetilde{X}$ est continue sur $]a, b[$. Comme $A = B$ sur $[t_0, b[$ alors $\widetilde{X}$ est différentiable sur $]a, t_0[\cup]t_0, b[$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\widetilde{X}} & = & \dot{X}(t) = A(t)X(t) = A(t)\widetilde{X}(t), \quad (\forall\ t \in]a, t_0[) \\ \dot{\widetilde{X}} & = & \dot{Y}(t) = B(t)Y(t) = A(t)Y(t) = A(t)\widetilde{X}(t), \quad (\forall\ t \in]t_0, b[) \end{array}$$

d'autre part on a

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ <}} \dfrac{1}{t - t_0}(\widetilde{X}(t) - \widetilde{X}(t_0)) & = & \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ <}} \dfrac{1}{t - t_0}(X(t) - X(t_0)) \\ & = & \dot{X}(t_0) \\ & = & A(t_0)X(t_0) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t\to t_0\\ >}} \frac{1}{t-t_0}(\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(t_0)) &= \lim_{\substack{t\to t_0\\ <}} \frac{1}{t-t_0}(Y(t)-Y(t_0))\\
&= \dot{Y}(t_0)\\
&= B(t_0)Y(t_0)\\
&= A(t_0)X(t_0)
\end{aligned}$$

d'où $\widetilde{X}$ est de classe C^1 sur $]a,b[$ telle que

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{X}}(t) &= a(t)\widetilde{X}(t), \quad (\forall\, t \in]a,b[)\\
\widetilde{X}(t_0) &= X(t_0)
\end{aligned}$$

donc $\widetilde{X}$ et X sont deux solution du système d'équations différentielles (7.6) avec la même condition initiale $\widetilde{X}(t_0) = X(t_0)$, en vertu de l'unicité de solution on déduit que

$$(\forall\, t \in]a,b[) : \quad \widetilde{X}(t) = X(t).$$

$$(\forall\, t \in [t_0,b[) : \quad X(t) = Y(t).$$

■

Du Lemme 7.1.2, on obtient la proposition suivante

Proposition 7.1.5. *Le transport parallèle ne dépend que de lavaleur de γ sur $[t_0,t_1]$*

i.e. Si $\gamma_1 :]a,b[\longrightarrow M$ et $\gamma_2 :]c,d[\longrightarrow M$ sont deux courbe de classe C^∞ tels que :

1. $[t_0,t_1] \subset]a,b[\bigcap]c,d[$
2. $\gamma_{1/[t_0,t_1]} = \gamma_{2/[t_0,t_1]}$

alors γ_1 et γ_2 définissent le même transport parallèle, $\mathcal{T}_{\gamma_1} = \mathcal{T}_{\gamma_2}$.

Définition 7.1.5. *Soient M^m une variété de dimension m et $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞. Le transport parallèle le long de la courbe γ est définie par*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\gamma : T_{\gamma(a)}M &\longrightarrow T_{\gamma(b)}M\\
v &\longmapsto \mathcal{T}_{\widetilde{\gamma}}(v)
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\gamma}$ est une courbe classe C^∞ qui prolonge γ à un interval $]c,d[\supset [a,b]$.

D'après la Proposition 7.1.5, cette définition est indépendante du prolongement choisi.

Définition 7.1.6. *Soient M^m une variété de dimension m et $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞ par morceaux, i.e.*

$$\exists\, a_0, ..., a_p \in [a,b] : \quad a = a_0 < .... < a_p = b$$

tels que

$$(\forall i \in \{1, ..., p\}) : \quad \gamma_i = \gamma_{/[a_{i-1},a_i]} : [a_{i-1}, a_i] \longrightarrow M \; de\,classe\; C^\infty$$

Le transport parallèle le long de la courbe ω est définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_\gamma : T_{\gamma(a)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(b)}M \\ v & \longmapsto & \mathcal{T}_\gamma(v) = \mathcal{T}_{\gamma_1} \circ ... \circ \mathcal{T}_{\gamma_p}(v) \end{array}$$

Définition 7.1.7. *Soient M^m une variété de dimension m et $\omega : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe. La courbe inverse de ω est une courbe parcourus dans le sens inverse de ω, notée ω^{-1} et définie par*

$$\begin{array}{rcl} \omega^{-1} : [a,b] & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & \omega^{-1}(t) = \omega(a+b-t) \end{array}$$

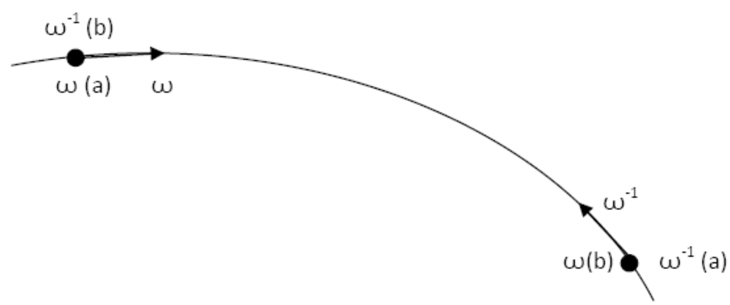


Fig. 7.2 – Courbe Inverse

Définition 7.1.8. *Soient M^m une variété de dimension m, $\gamma_1 : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ et $\gamma_2 : [b,c] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ deux courbes tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Le recollement de γ_1 et γ_2 est une courbe notée $\gamma_2\gamma_1$ et définie par*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_2\gamma_1 : [a,c] & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & \gamma_2\gamma_1(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_1(t) & si\ t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & si\ t \in [b,c] \end{array} \right. \end{array}$$

Théorème 7.1.1. *Soient M^m une variété de dimension m et $\omega : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe de classe C^∞ par morceaux, alors $\mathcal{T}_\omega : T_{\omega(a)}M \longrightarrow T_{\omega(b)}M$ est un isomorphisme linéaire tel que $\mathcal{T}_\omega^{-1} = \mathcal{T}_{\omega^{-1}}$.*

Preuve :

1) Linéairité de $\mathcal{T}_\omega$:

Soit $v_1, v_2 \in T_{\omega(a)}M$ et $X_1, X_2 \in \mathcal{H}_\omega(M)$ tels que

$$\nabla_\omega X_1 = 0, \quad \nabla_\omega X_2 = 0, \quad X_1(a) = v_1 \ et\ X_2(a) = v_2$$

si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $X_1 + \lambda X_2 \in \mathcal{H}_\omega(M)$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \nabla_\omega(X_1 + \lambda X_2) & = & \nabla_\omega X_1 + \lambda \nabla_\omega X_2 = 0 \\ X_1(a) + \lambda X_2(a) & = & v_1 + \lambda v_2 \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_\omega(v_1 + \lambda v_2) & = & (X_1 + \lambda X_2)(b) \\ & = & X_1(b) + \lambda X_2(b) \\ & = & \mathcal{T}_\omega(v_1) + \lambda \mathcal{T}_\omega(v_2) \end{array}$$

2) Soit $v \in T_{\omega(a)}M$ et $X \in \mathcal{H}_\omega(M)$ tels que $\nabla_\omega X = 0$ et $X(a) = v$. On pose

$$\widetilde{X} : t \in [a,b] \longrightarrow \widetilde{X}(t) = X(b + a - t) \in \mathcal{H}_{\omega^{-1}}(M)$$

Localement on a

$$(\nabla_\omega X)_t = \frac{d}{dt} X^k(t) + \frac{d\omega^i(t)}{dt} X^j(t) \Gamma_{ij}^k(\omega(t)) = 0$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} (\nabla_{\omega^{-1}} \widetilde{X})_t & = & \frac{d}{dt}(X^k(a+b-t)) + \frac{d}{dt}\omega^i(a+b-t) X^j(a+b-t) \Gamma_{ij}^k(\omega(a+b-t)) \\ & = & -\frac{dX^k}{dt}((a+b-t)) - \frac{d\omega^i}{dt}(a+b-t) X^j(a+b-t) \Gamma_{ij}^k(\omega(a+b-t)) \\ & = & -\frac{dX^k}{dt}(s) - \frac{d\omega^i}{dt}(s) X^j(s) \Gamma_{ij}^k(\omega(s)) \\ & = & -(\nabla_\omega X)_s \\ & = & 0. \end{array}$$

où $s = a + b - t$. Comme $\widetilde{X}(a) = X(b)$ alors

$$\mathcal{T}_{\omega^{-1}} \circ \mathcal{T}_{\omega}(v) = \mathcal{T}_{\omega^{-1}}(X(b)) = \mathcal{T}_{\omega^{-1}}(\widetilde{X}(a)) = \widetilde{X}(b) = X(a) = v$$

de même si $w = \widetilde{X}(a)$, on obtient

$$\mathcal{T}_{\omega} \circ \mathcal{T}_{\omega^{-1}}(w) = \mathcal{T}_{\omega}(\widetilde{X}(b)) = \mathcal{T}_{\omega}(X(a)) = X(b) = \widetilde{X}(a) = w$$

■

Définition 7.1.9. *Le transport parallèle est dit absolu le transport entre deux points de la variété M est indépendant de la courbe qui les relies. i.e. si $\gamma, \omega : [0,1] \longrightarrow M$ sont deux courbes de classe C^∞ par morceaux tels que*

$$\begin{cases} \gamma(0) = \omega(0) = x_1 \in M \\ \gamma(1) = \omega(1) = x_2 \in M \end{cases}$$

alors

$$\mathcal{T}_{\gamma} = \mathcal{T}_{\omega}.$$

Théorème 7.1.2. *Soit M^m une variété de dimension m. Alors M admet un transport parallèle absolu si et seulement si $\mathcal{H}(M)$ admet une base globale de champs de vecteurs.*

i.e $\exists\, X_1, ..., X_m \in \mathcal{H}(M)$ tels que $\forall\, x \in M$, $(X_{1/x}, ..., X_{m/x})$ est une base de T_xM.

Preuve Si $(X_1, ..., X_m)$ est une base de $\mathcal{H}(M)$, on pose

$$\nabla_{X_i} X_j = 0, \quad (1 \leq i, j \leq m),$$

∇ définie une connexion sur M telle que si $Y = Y^i X_i \in \mathcal{H}(M)$ et $Z = Z^j X_j \in \mathcal{H}(M)$, on a

$$\nabla_Y Z = Y^i X_i(Z^j) X_j$$

Soient ω une courbe définie sur $[0,1]$, $v = \dot{\omega}(0) \in T_{\omega(0)}$, $Z \in \mathcal{H}_{\omega}$, et $\widetilde{Z} \in \mathcal{H}(M)$ tel que $\widetilde{Z} \circ \omega = Z$. Relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M, \omega(0))$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \omega^i &=& \varphi^i \circ \omega \\ \dot{\omega}(t) &=& \dfrac{d\omega^i}{dt}(t) \partial_{i/\omega(t)} \\ \widetilde{Z} &=& \widetilde{Z}^i X_i \\ Z(t) &=& Z^i(t) X_{i/\omega(t)} \\ \partial_i &=& a_i^k X_k \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\omega}(t)}\widetilde{Z} &= (\nabla_{\frac{d\omega}{dt}(t)a_i^k X_k}\widetilde{Z}^j X_j)_{\omega(t)} \\
&= \frac{d\omega}{dt}(t)a_i^k X_k(\widetilde{Z}^j)(\omega(t))X_{j/\omega(t)} \\
&= \frac{d\omega}{dt}(t)\partial_i(\widetilde{Z}^j)(\omega(t))X_{j/\omega(t)} \\
&= \frac{d}{dt}(\widetilde{Z}^j \circ \omega(t))X_{j/\omega(t)} \\
&= \frac{d}{dt}(Z^j(t))X_{j/\omega(t)}
\end{aligned}$$

donc le système

$$\begin{cases} \nabla_\omega Z = 0 \\ Z(0) = v \end{cases}$$

s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Z^j(t)) = 0 \qquad (1 \leq i \leq m \\ \\ \quad Z^j(0) = v^j \end{cases}$$

qui est indépendant de la courbe ω et qui a pour solutions les fonctions constantes $Z^j(t) = v^j$.

Inversement, soient $x_0 \in M$ et $v_1, ..., v_m$ une base de $T_{x_0}M$. Pour $i \in \{1, .., m\}$, on pose

$$\begin{array}{rcl} X_i : M & \longrightarrow & TM \\ x & \longmapsto & X_i(x) = \mathcal{T}_\omega(v_i) \end{array}$$

où $\omega : [0,1] \longrightarrow M$ est une courbe de classe C^∞ par morceaux telle que $\omega(0) = x_0$ et $\omega(1) = x$. Puisque le transport parallèle est absolu alors la définition des champs de vecteurs $X_1, ...X_n$ est indépéndante du choix de la courbe ω. Comme $\mathcal{T}_\omega : T_{x_0}M \longrightarrow T_xM$ est un isomorphisme linéaire, ondéduit que $(X_1(x), ...X_n(x))$ est une base de T_xM. ■

Chapitre 8

Géodésique

8.1 Courbe géodésique

Définition 8.1.1. *Soit M^m une variété différentiable de dimension m munie d'une connexion linéaire ∇. Une géodésique est une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$. telle que*

$$(\forall\, t \in I): \quad \big(\nabla_\gamma \dot{\gamma}\big)(t) = 0.$$

La courbe γ est dite aussi autoparallèle.

Proposition 8.1.1. *Une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ est une géodésique si et seulement si pour toute carte $(U, \varphi) \in atl(M)$, on a*

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t) + \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\frac{d\gamma^j}{dt}(t)\Gamma_{ij}^k(t) = 0\,, \quad (1 \leq k \leq m). \tag{8.1}$$

Preuve Relativement à une carte $(U, \varphi) \in atla(M)$ on a

$$\begin{aligned} \gamma^k(t) &= \varphi^k \circ \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) &= \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\partial_{i/\gamma(t)} \end{aligned}$$

De la formule (7.4) on obtient

$$\big(\nabla_\gamma \dot{\gamma}\big)(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{d\gamma^k}{dt}\Big)(t) + \frac{d\gamma^i}{dt}(t)\frac{d\gamma^j}{dt}(t)\Gamma_{ij}^k(t) = 0, \quad (1 \leq k \leq m).$$

d'où

$$\big(\nabla_\gamma\dot{\gamma}\big)(t)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t)+\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\frac{d\gamma^j}{dt}(t)\Gamma^k_{ij}(t)=0,\quad (1\le k\le m).$$

■

Proposition 8.1.2. *Soient M^m une variété différentiable de dimension m munie d'une connexion linéaire ∇, $x_0\in M$ et $v\in T_{x_0}M$. Il existent alors une unique géodésique $\gamma:\,]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow M$ verifiant :*

$$\begin{cases}\gamma(0)=x_0,\\ \dot{\gamma}(0)=v\end{cases}$$

Preuve Relativement à une carte $(U,\varphi)\in atl(M,x_0$, si $v=v^i\partial_{i/x_0}$ alors le système

$$\begin{cases}\big(\nabla_\gamma\dot{\gamma}\big)(t)=0,\\ \gamma(0)=x_0,\\ \dot{\gamma}(0)=v\end{cases}\tag{8.2}$$

équivaut au système d'équations différentielles

$$\begin{cases}\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t)+\frac{d\gamma^i}{dt}(t)\frac{d\gamma^j}{dt}(t)\Gamma^k_{ij}(t)=0, \qquad (1\le k\le m),\\ \gamma(0)=x_0,\\ \dot{\gamma}(0)=v,\end{cases}\tag{8.3}$$

En vertu du théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles, le sytème (I) possède une unique solution au voisinage de 0.

■

Théorème 8.1.1. *Soient M^m une variété différentiable de dimension m munie d'une connexion linéaire ∇ et $x_0\in M$. Alors l'ensemble*

$$N=\Big\{v\in T_{x_0}M;\ \exists\,(\epsilon>1)\ et\ \gamma\,]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow M,\ C^\infty\ :\ \begin{Bmatrix}\big(\nabla_\gamma\dot{\gamma}\big)(t)=0,\\ \gamma(0)=x_0,\\ \dot{\gamma}(0)=v\end{Bmatrix}\Big\}\tag{8.4}$$

est un voisinage topologique du vecteur nul (0) de l'esapce vectoriel de dimension fini $T_{x_0}M$.

Preuve :

1) Si $\gamma : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \gamma(t) = x_0 \in M$ désigne la courbe constante passant par x_0 alors $0 = \dot{\gamma}(0) \in T_{x_0}M$ ce qui montre que le vecteur nul est un élément de N $(0 \in N)$.

2) Si $M = \mathbb{R}^m$ alors le système d'équations différentielles

$$\frac{d^2X^k}{dt^2} + \frac{dX^i}{dt}\frac{dX^j}{dt}\Gamma^k_{ij} = 0, \quad (1 \leq k \leq m)$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X^k = Y^k \quad (1 \leq k \leq m), \\ \\ \frac{d}{dt}Y^k = -Y^iY^j\Gamma^k_{ij}, \end{cases} \tag{8.5}$$

En vertu du théorème d'existence, d'unicité et de differentiabilité de solutions des équations différentielles, ils existent $\epsilon > 0$, $V \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de x_0, $W \subset \mathbb{R}^m$ voisinage de 0 et

$$\begin{array}{rcl} \psi :]-\epsilon, \epsilon[\times V \times W & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \\ (t, x, y) & \longmapsto & \psi(t, x, y) = \big(\psi_1(t, x, y), \psi_2(t, x, y)\big) \end{array}$$

tels que ψ est une solution du sytème (I) i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t, x, y) = \psi_2(t, x, y), \\ \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi^k_2(t, x, y) = -\psi^i_1(t, x, y)\psi^j_1(t, x, y)\Gamma^k_{ij}(\psi_1(t, x, y)), \quad (1 \leq k \leq m) \\ \\ \psi(0, x, y) \quad = (x, y), \end{cases} \tag{8.6}$$

Si on désigne par

$$\begin{array}{rcl} \gamma_y :]-\epsilon, \epsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ t & \longmapsto & \gamma_y(t) = \psi_1(t, x_0, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \omega_y :]-\frac{\epsilon}{s}, \frac{\epsilon}{s}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ t & \longmapsto & \omega_y(t) = \gamma_y(s.t) \end{array}$$

où $y \in W$ et $s \in]0, \epsilon[$ alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma_y(0) & = & x_0 \\ \dot{\gamma_y}(0) & = & y \\ \nabla_{\gamma_y}\dot{\gamma_y} & = & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \omega_y(0) & = & x_0 \\ \dot{\omega_y}(0) & = & s.y \\ \nabla_{\omega_y}\dot{\omega_y} & = & 0. \end{array}$$

ce qui montre que $s.W \subset N \quad (\frac{\epsilon}{s} > 1)$.

Dans le cas d'une variété M^m, relativement à une carte (U, φ) on considère la connexion $\widetilde{\nabla} = f_*(\nabla)$ sur $\mathbb{R}^m$ et on a $N = \widetilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(\widetilde{N})$.

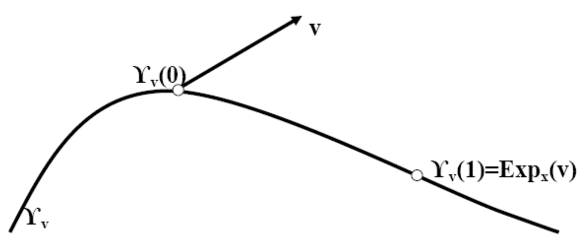
∎

8.2 Fonction Exponentielle

Soit $N_0 \subset N$ un voisinage de $0 \in T_{x_0}M$. La fonction exponentielle sur M est définie par

$$\begin{array}{rcl} Exp_{x_0} : N_0 & \longrightarrow & M \\ v & \longmapsto & Exp_{x_0}(v) = \gamma_v(1) \end{array}$$

où γ_v est une courbe verifiant (8.4).



Remarque 8.2.1. *La courbe constante $\gamma : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \gamma(t) = x_0 \in M$ est une courbe verifiant la formule (8.6) telle que $\dot{\gamma}(0) = 0$, on déduit que $Exp_{x_0}(0) = x_0$.*

Théorème 8.2.1. *La fonction $Exp_{x_0} : N_0 \longrightarrow M$ est un difféomorphisme d'un voisinage de $0 \in T_{x_0}M$ dans un voisinage de $x_0 \in M$.*

Preuve Relativement à une carte $(U, \varphi) \in atl(M, x_0)$, si

$$\begin{array}{rcl} \Psi = (\Psi_1, \Psi_2) :]-\epsilon, \epsilon[\times U_x \times U_y & \longrightarrow & U_x \times U_y \\ (t, x, y) & \longmapsto & (\Psi_1(t, x, y), \Psi_2(t, x, y)) \end{array}$$

désigne la solution de l'équation (8.5),

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X^k = Y^k \quad (1 \leq k \leq m), \\ \\ \frac{d}{dt} Y^k = -Y^i Y^j \Gamma_{ij}^k, \end{cases}$$

Alors, en vertu de l'unicité de solution on obtient

$$\begin{array}{rcl} \Psi(t, x, 0) & = & (\Psi_1(t, x, 0), 0) \\ \Psi_2(t, x, 0) & = & 0. \end{array} \qquad (8.7)\ (8.8)$$

D'autre part

$$Exp_{x_0}(v) = \gamma_v(1) = \varphi^{-1} \circ \Psi_1(1, \varphi(x_0), \widetilde{\varphi}_{x_0}(v)).$$

Ce qui montre que Exp_{x_0} est une application de classe C^∞. Si on pose

$$\begin{array}{rcl} F : U_x \times U_y & \longrightarrow & U_x \times U_y \\ (X, Y)) & \longmapsto & (Y,\ Y^i Y^j \Gamma_{ij}^1(X), ..., Y^i Y^j \Gamma_{ij}^m(X) \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x, y) & = & (\Psi_2(t, x, y), \Psi(t, x, y)_2^i \Psi_2(t, x, y)^j \Gamma_{ij}^k(\Psi(t, x, y))) \\ & = & F(\Psi(t, x, y)). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(D_{(x_0,0)}\Psi\Big) & = & D_{(x_0,0)}\Big(\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}\Big) \\ & = & D_{(x_0,0)}(F \circ \Psi) \\ & = & D_{\Psi(t,x_0,0)} F \circ D_{(x_0,0}\Psi) \\ & = & D_{(X_0,0)} F \circ D_{(x_0,0}\Psi) \end{array}$$

où $X_0 = \Psi_1(t, x_0, 0)$.

Si on note

$$\overline{F} = D_{(X_0,0)}F = \left[\begin{array}{cc} 0 & Id_{\mathbb{R}^m} \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

alors $D_{(x_0,0)}\Psi$ est une solution de l'equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}\Phi = \overline{F}\Phi \\ \Phi(0) = Id_{\mathbb{R}^{2m}} \end{array} \right. \tag{8.9}$$

En effet comme $\psi(0, x, y) = (x, y)$ alors $D_{(x_0,0)}\Psi(0) = Id_{\mathbb{R}^{2m}}$. Comme $\overline{F}^n = 0$ ($\forall\, n \geq 3$), des solutions de l'equation différentielle (8.9) on obtient :

$$D_{(x_0,0)}\Psi(t) = exp(\overline{F}t) = Id + t\overline{F} = \begin{pmatrix} Id & tId \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_X\Psi_1(t, x, y) & D_Y\Psi_1(t, x, y) \\ D_X\Psi_2(t, x, y) & D_Y\Psi_2(t, x, y) \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $D_Y\Psi_1(1, x_0, 0) = Id$ est un isomorphisme linéaire donc $\Psi_1(1, x_0, y)$ est un difféomorphisme au voisinage de $y = 0$.

Comme

$$\Psi_1(1, x_0, y) = \varphi \circ Exp_{x_0} \circ \widetilde{\varphi}_{x_0}^{-1}(y),$$

on déduit que Exp_{x_0} est un difféomorphisme au voisinage de $0 \in T_{x_0}M$.

■

8.3 Interprétation géométrique de la torsion et de la courbure

Soient $V, W \in T_P M$, on désigne par γ_V (reps. γ_W) la courbe géodésique passant par P et de vecteur directeur V (rep. W)

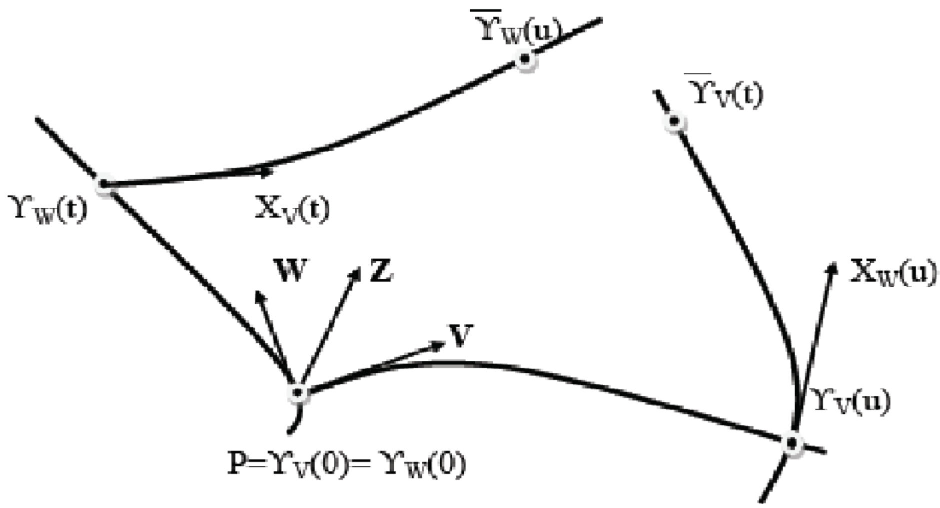


Fig. 8.1 – parallélogramme de Torsion

Les courbes $\gamma_V, \gamma_W, \overline{\gamma}_V$ et $\overline{\gamma}_W$ sont solution des systèmes suivants :

$$(S1)\begin{cases}\nabla_{\gamma_V}\dot{\gamma}_V = 0\\ \dot{\gamma}_V(0) = V\\ \gamma_V(0) = P\end{cases} \qquad (S2)\begin{cases}\nabla_{\gamma_W}\dot{\gamma}_W = 0\\ \dot{\gamma}_W(0) = W\\ \gamma_W(0) = P\end{cases}$$

$$(S3)\begin{cases}\nabla_{\overline{\gamma}_V}\dot{\overline{\gamma}}_V = 0\\ \dot{\overline{\gamma}}_V(0) = X_W(u)\\ \overline{\gamma}_V(0) = \gamma_V(u)\end{cases} \qquad (S4)\begin{cases}\nabla_{\overline{\gamma}_W}\dot{\overline{\gamma}}_W = 0\\ \dot{\overline{\gamma}}_W(0) = X_V(t)\\ \overline{\gamma}_W(0) = \gamma_W(t)\end{cases}$$

où $X_V \in \mathcal{H}_{\gamma_W}$ et $X_W \in \mathcal{H}_{\gamma_V}$ sont solutions des systèmes

$$(S5)\begin{cases} \nabla_{\gamma_W} X_V = 0 \\ X_V(0) = V \end{cases} \qquad (S6)\begin{cases} \nabla_{\gamma_V} X_W = 0 \\ X_W(0) = W \end{cases}$$

1. Obstruction de la Torsion

Du développement limité des courbes autoparallèles, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_W^s(t) &= \gamma_W^s(0) + t\frac{d\gamma_W^s}{dt}(0) \\ &= P^s + tW^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_V^s(t) &= X_V^s(0) + \frac{dX_V^s}{dt}(0) \\ &= V^s - t\Gamma_{ij}^s X_V^i(0)\frac{d\gamma_W^j}{dt}(0) \\ &= V^s - t\Gamma_{ij}^s V^i W^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_W^s(u) &= \overline{\gamma}_W^s(0) + u\frac{d\overline{\gamma}_W^s}{dt}(0) \\ &= \gamma_W^s(t) + uX_V^s(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{\gamma}_W^s(u) = P^s + tW^s + uV^s - tu\Gamma_{ij}^s(P)V^iW^j \tag{8.10}$$

De la façon on obtient

$$\overline{\gamma}_V^s(t) = P^s + uV^s + tW^s - tu\Gamma_{ij}^s(P)W^iV^j \tag{8.11}$$

Des formules (8.10) et (8.11) on obtient :

$$\overline{\gamma}_W^s(u) - \overline{\gamma}_V^s(t) = tu\Big(\Gamma_{ij}^s(P) - \Gamma_{ji}^s(P)\Big)W^iV^j \tag{8.12}$$

Ce qui montre que

$$\big(\overline{\gamma}_W(u) = \overline{\gamma}_V(t)\big) \Longleftrightarrow T = 0 \tag{8.13}$$

où T désigne le tenseur de torsion associé à ∇. Donc la torsion est une obstruction à la fermeture du parallélogramme (Fig 8.1).

2. Obstruction de la Courbure

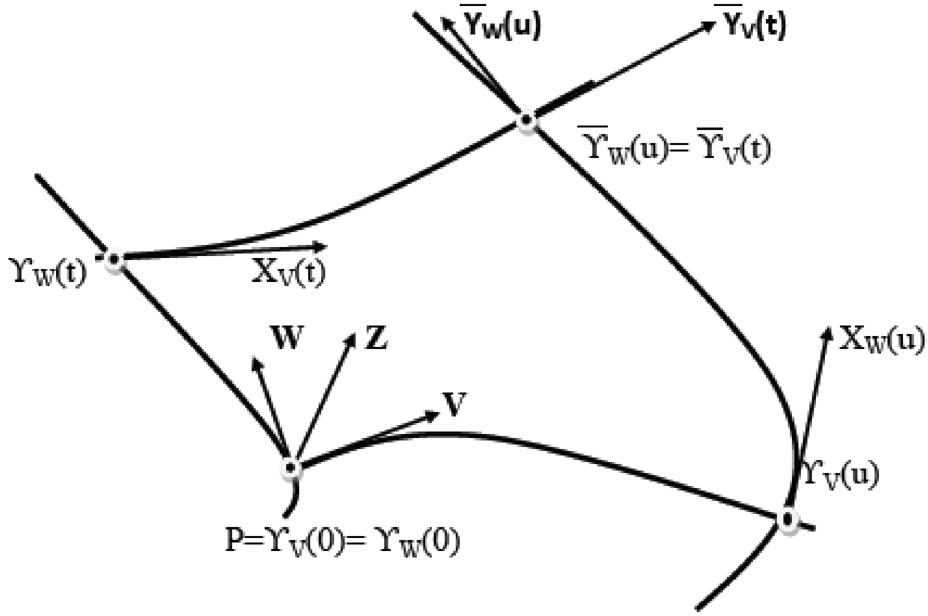


Fig. 8.2 – parallélogramme de Courbure

Soient les transports parallèle $\mathcal{T}_V$ et $\mathcal{T}_W$ définis par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_V : T_PM & \longrightarrow & T_qM \\ v & \longmapsto & \mathcal{T}_V(v) = \mathcal{T}_{\overline{\gamma}_V \cdot \gamma_V}(v) = \mathcal{T}_{\overline{\gamma}_V} \circ \mathcal{T}_{\gamma_V}(v) \end{array}$$

où $q = \overline{\gamma}_V(t)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_W : T_PM & \longrightarrow & T_{q'}M \\ v & \longmapsto & \mathcal{T}_W(w) = \mathcal{T}_{\overline{\gamma}_W \cdot \gamma_W}(w) = \mathcal{T}_{\overline{\gamma}_W} \circ \mathcal{T}_{\gamma_W}(w) \end{array}$$

où $q' = \overline{\gamma}_W(u)$.

Soient $z \in T_P M$, $Y \in \mathcal{H}_{\gamma_W}$ et $\overline{Y} \in \mathcal{H}_{\overline{\gamma}_W}$ tels que :

$$(S7)\ \begin{cases} \nabla_{\gamma_W} Y = 0 \\ \\ Y(0) = z \end{cases} \qquad\qquad (S8)\ \begin{cases} \nabla_{\overline{\gamma}_W} \overline{Y} = 0 \\ \\ \overline{Y}(0) = Y(t) \end{cases}$$

Du développement limité à l'ordre 1 de Y et $\overline{Y}$, on obtient

$$\begin{aligned} Y^k(t) &= Y^s(0) + t\frac{dY^k}{dt}(0) \\ &= z^k - t\Gamma^k_{ij}(P) z^i W^j \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned} \overline{Y}^k(u) &= \overline{Y}^k(0) + t\frac{d\overline{Y}^k}{dt}(0) \\ &= Y^k(t) - u\Gamma^k_{ij}(\gamma_W(t))\overline{Y}^i(0)\frac{d\overline{\gamma}^j_W}{dt}(0) \\ &= Y^k(t) - u\Gamma^k_{ij}(\gamma_W(t))\overline{Y}^i(0) X^j_V(t) \quad (voir\ \texttt{système}\ \ (S4)) \end{aligned} \tag{8.15}$$

En remplaçant (8.14) dans (8.15), on obtient

$$\overline{Y}^k(u) = z^s - t\Gamma^s_{ij}(P) z^i W^j - u\Gamma^s_{ij}(\gamma_W(t))\overline{Y}^i(0) X^j_V(t) \tag{8.16}$$

Du développement limité à l'ordre 1 de Γ_{ij}, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) &= \Gamma^k_{ij}(P) + t\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial s}(P)\frac{d\gamma^s_W}{dt}(0) \\ &= \Gamma^k_{ij}(P) + t\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial s}(P) W^s \quad (voir\ \texttt{système}\ \ (S2)) \end{aligned} \tag{8.17}$$

D'autre part, des systèmes $(S5)$ et $(S7)$, on obtient

$$Y^i = z^i - t\Gamma^i_{mn} z^m W^n \tag{8.18}$$

$$X^j_V(t) = V^j - t\Gamma^j_{mn} V^m W^n \tag{8.19}$$

En substituant les formules (8.17), (8.18) et (8.19) dans (8.16), on obtient

$$\begin{aligned}\overline{Y}^k(u) &= z^k - t\Gamma^k_{mn}z^mW^n - u\Gamma^k_{ij}z^iV^j + tu\Gamma^k_{ij}\Gamma^i_{mn}z^mW^nV^j \\ &\quad + tu\Gamma^k_{ij}\Gamma^j_{mn}V^mW^nz^i - tu\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial s}W^sz^iV^j \end{aligned} \tag{8.20}$$

si on note :

$$\overline{Y}_W(u) = \mathcal{T}_W(z) = \overline{Y}(u)$$

alors

$$\begin{aligned}\overline{Y}^k_W(u) &= z^k - t\Gamma^k_{mn}z^mW^n - u\Gamma^k_{ij}z^iV^j + tu\Gamma^k_{ij}\Gamma^i_{mn}z^mW^nV^j \\ &\quad + tu\Gamma^k_{ij}\Gamma^j_{mn}V^mW^nz^i - tu\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial s}W^sz^iV^j \end{aligned} \tag{8.21}$$

En faisant intervertir t avec u et V avec W, on obtient d'une façon analogue :

$$\begin{aligned}\overline{Y}^k_V(t) &= z^k - u\Gamma^k_{mn}z^mV^n - t\Gamma^k_{ij}z^iW^j + tu\Gamma^k_{ij}\Gamma^i_{mn}z^mV^nW^j \\ &\quad + tu\Gamma^k_{ij}\Gamma^j_{mn}W^mV^nz^i - tu\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial s}V^sz^iW^j \end{aligned} \tag{8.22}$$

où

$$\overline{Y}_V(t) = \mathcal{T}_V(z)$$

Si on suppose que la connexion ∇ est sans torsion (i.e. $T = 0$), alors d'après la formule (8.13) on a

$$\overline{\gamma}_W(u) = \overline{\gamma}_V(t) = q = q' \quad et \quad \mathcal{T}_W(z), \mathcal{T}_V(z) \in T_qM.$$

Par suite on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_W(z) - \mathcal{T}_V(z) &= \overline{Y}^k_W(u) - \overline{Y}^k_V(t) \\ &= tuz^nV^jW^i\Big\{\big(\Gamma^k_{mj}\Gamma^m_{ni} - \Gamma^k_{mi}\Gamma^m_{nj}\big) + \big(\frac{\partial\Gamma^k_{ni}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^k_{nj}}{\partial x^i}\big)\Big\} \\ &= tu\big(R^k_{jin}W^iV^jz^n\big) \quad (voir\ formule\ (6.16)).\end{aligned}$$

Ce qui montre qu'au voisinage de tout point $p \in M$ on a :

$$(\mathcal{T}_W = \mathcal{T}_V) \Longleftrightarrow R = 0$$

où R désigne le tenseur de courbure associé à ∇.

Bibliographie

[1] Y. Bougrov and S. Nikolski, *Cours de mathématiques supérieures*, Edition Mir (1983).

[2] Carmen Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*,2006, 1999 Springer Science+Business Media, Inc.

[3] H. Cartan, *Cours de Calcul Différentielle*, Collections Méthodes (1982).

[4] P. Colmez, *Élémént d'analyse et d'algèbre*,C.M.L.S., École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

[5] J. Dixmier, *Cours de Mathématiques du Premier Cycle 2ème année*, Gauthier-Villars, Bordas (1977).

[6] J. Dixmier, *Cours de Mathématiques du Premier Cycle 1ème année*, Gauthier-Villars, Bordas (1977).

[7] M. Diner Equation différentielles (M108), office des publications universitaire Algérie.

[8] M. Djaa, *Géométrie différentielle 3ème année LMD*, Publication du centre universitaire de Relizane 2017.

[9] M. Djaa, *Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés*, Publication du centre universitaire de Relizane 2017.

[10] I. Kolar, V. Michor and J. Slovak, *Natural Operations In Differential Geometry*, Springer-Verlag (1993).

[11] D. Leborgne, *Calcul différentiel et géométrie*, Presses Universitaires de France (1982).

[12] D. Lehmane and C. Sacré, *Géométrie et topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France (1982).

[13] L. Pontriaguine, Equations différentielles ordinaires. Edition Moscou, Mir 1975.

[14] S. Simon, *Géométrie et topologie 2 : MATH803.* Université de Savoie Année 07/08.

Mustapha DJAA, Professeur en mathématiques au centre universitaire Ahmed Zabana Relizane. Spécialiste en Géométrie, Analyse globale et Théorie spectrale. Directeur du laboratoire Géométrie Analyse Contrôle et Application à l'université Ahmed Medeghri Saida 2000-2011. Directeur du laboratoire Gestion des marchés financiers par l'application des mathématiques et l'informatique 20012-2017. Responsable du domaine mathématiques et informatique 2013-2017. Auteur de plusieurs publications internationales en géométrie, analyse et théorie spectrale. Auteur de l'Algèbre générale et Mesure et intégration publiés par l'office national des publications universitaires.