

PR M. DJAA

INTRODUCTION A LA GEOMETRIE RIEMANNIENNE ET L'ANALYSE HARMONIQUE SUR LES VARIETES

Ce document est un projet de livre destiné pour les étudiants en master et doctorat LMD, aussi pour les chercheurs débutant en géométrie Riemannienne et analyse globale sur les variétés.

Toute remarque sur le contenu sera prise en considérations.

Pr. Mustapha Djaa

Email: Djaamustapha20@gmail.com

Table des matières

1	Introduction à la géométrie Riemannienne	4
1.1	Métrique Riemannienne sur une variété.	4
1.1.1	Image inverse d'une métrique	5
1.2	Connexion linéaire.	7
1.2.1	Tenseur de torsion.	8
1.2.2	Connexion de Levi-Civita.	8
1.3	Courbures.	12
1.3.1	Tenseur de courbure.	12
1.3.2	Courbure sectionnelle	13
1.3.3	Courbure de Ricci	14
1.3.4	Courbure scalaire	15
1.4	Opérateurs sur une variété Riemannienne	16
1.4.1	L'opérateur gradient	16
1.4.2	L'opérateurs divergence	17
1.4.3	La Hessienne d'une fonction	21
1.4.4	L'opérateur Laplacien	22
1.4.5	Formule de Bochner	23
1.4.6	Théorème de divergence	25
1.5	Métrique conforme	26
1.5.1	Connexion de Levi-Civita d'une métrique conforme	26
1.5.2	Tenseur de courbure d'une métrique conforme	27
1.5.3	Courbure scalaire d'une métrique conforme Equation de Yamabe	29
1.6	Propriétés des Connexions sur une sous variété	32
1.6.1	Décomposition du fibré tangent	32
1.6.2	Opérateur Shape (Application de Weingarten)	33
1.6.3	Equation de Gauss	34
1.6.4	Equation de Codazzi	34
2	Géométrie du fibré vectoriel	36
2.1	Fibrés vectoriels	36
2.1.1	Section sur un fibré vectoriel	37
2.1.2	Isomorphisme de fibrés vectoriel.	38
2.1.3	Fibré dual d'un fibré vectoriel.	39
2.1.4	Section sur le fibré vectoriel dual	39

2.1.5	Produit tensoriel de fibré	40
2.1.6	Section sur le fibré produit tensoriel.	41
2.1.7	Fibré Somme de Whitney	42
2.1.8	Section sur le fibré somme de Whitney.	42
2.1.9	Fibré inverse (Pull-back)	43
2.1.10	Section sur un fibré inverse	44
2.2	Connexion linéaire sur un fibré vectoriel.	44
2.2.1	Connexion linéaire sur un fibré vectoriel.	44
2.2.2	Connexion induite sur le fibré dual	45
2.2.3	Connexion induite sur le produit tensoriel	45
2.2.4	Connexion induite sur le fibré somme de Whitney	46
2.2.5	Connexion induite sur le fibré inverse	46
2.3	Métrique sur un fibré vectoriel	47
2.3.1	Métrique sur un fibré vectoriel.	47
2.3.2	Métrique induite sur le fibré dual	49
2.3.3	Métrique induite sur le produit tensoriel	50
2.3.4	Métrique induite sur le fibré somme de Whitney	50
2.3.5	Métrique induite sur le fibré inverse	51
2.3.6	Inégalité de Young	52
2.3.7	Inégalité de Kato	52
3	Introduction à la géométrie harmonique	54
3.1	Le fibré tangent inverse	54
3.1.1	Le fibré tangent inverse	54
3.1.2	Seconde forme fondamentale	56
3.1.3	Cas des sous-variétés	57
3.2	Equations d'Euler-Lagrange	60
3.3	Applications harmoniques	63
3.3.1	Applications harmoniques	63
3.3.2	Première variation d'énergie	64
3.3.3	Exemples d'applications harmoniques	65
3.3.4	Tenseur énergie-impulsion	69
3.3.5	Métrique critique	72
3.4	Déformation conforme	73
3.4.1	Déformation conforme de la métrique de départ :	73
3.4.2	Déformation conforme de la métrique d'arrivée	75
3.4.3	Applications conformes	77
3.4.4	Application semi-conforme	79
3.4.5	Morphisme harmonique	81
3.4.6	Application de Hopf	85
3.5	Applications biharmoniques	88
3.6	Cas des applications conformes	92
3.6.1	Exemples d'applications biharmoniques	95
3.7	Tenseur bi-énergie impulsion	96
3.8	Théorème de Liouville des applications harmoniques	101

4	Géométrie des variétés Produits	102
4.1	Variété Produit	102
4.1.1	Connexion linéaire produit	104
4.1.2	Tenseur de torsion produit	104
4.1.3	Tenseur de courbure produit.	105
4.1.4	Métrique produit (diagonale)	105
4.1.5	L'Opérateur Laplacien produit	107
4.2	Variété Produit Tordu	109
4.2.1	Connexion de Levi-Civita de la Variété Produit Tordu	109
4.2.2	Tenseur de Courbure du Produit Tordu	110
4.2.3	L'Opérateur Laplacien dans le Produit Tordu	115
4.2.4	L'Opérateur Bilaplacien dans le Produit Tordu	117
5	Géometrie du fibré tangent d'ordre 1	122
5.1	Introduction	122
5.2	Relèvement Vertical	124
5.2.1	Relèvement Vertical d'une Fonction	124
5.2.2	Relèvement Vertical d'un Champ de Vecteurs	124
5.2.3	Relèvement Vertical d'une 1-Forme	127
5.2.4	Relèvement Vertical des Champs de Tenseurs	128
5.3	Relèvement Complet	130
5.3.1	Relèvement Complet d'une fonction	130
5.3.2	Relèvement Complet d'un Champ de Vecteurs	130
5.3.3	Relèvement Complet d'une 1-Forme	133
5.3.4	Relèvement Complet d'un Champ de tenseurs	135
5.4	Relèvement Horizontal	136
5.4.1	Relèvement Horizontal d'une Fonction	137
5.4.2	Relèvement Horizontal d'un Champ de Vecteurs	137
5.4.3	Relèvement Horizontal d'une 1-forme	141
5.4.4	Relèvement Horizontal d'un Champ de Tenseurs	142
5.4.5	Application tangente	143
5.5	Métrique Naturelle	145
5.5.1	Métrique Naturelle	145
5.5.2	Métrique de SASAKI	146
5.5.3	Métrique de CHEEGER-GROMOLL sur TM	151
5.5.4	β -metrique sur TM	155
5.5.5	Métrique Complète	157
5.5.6	Tenseur de Courbure d'une Métrique Complète	158

Chapitre 1

Introduction à la géométrie Riemannienne

1.1 Métrique Riemannienne sur une variété.

Définition 1.1.1. Une métrique Riemannienne g sur une variété M est une application,

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$C^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive.

Remarques 1.1.1. Soit g une métrique Riemannienne sur M . Pour tout $V, W \in \Gamma(TM)$, on a :

1. – $g(V, W) = g(W, V)$. (symétrique)
 – $g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$. (non dégénérée)
 – $g(V, V) \geq 0$. (définie positive)
2. $g \in \Gamma(TM^*) \otimes \Gamma(TM^*)$

Si (U, φ) est une carte sur M , alors

$$g = \sum_{i,j=1}^k g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (1.1)$$

où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appelé composantes du tenseur métrique relativement à la carte (U, φ) .

Localement, si $V = V^i \partial_i$ et $W = W^j \partial_j$ on a

$$g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$$

3. Pour tout $x \in M$ on a

$$g_x : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où $T_x M$ désigne l'espace tangent en x .

Définition 1.1.2. Une variété Riemannienne est un couple (M, g) , où M est une variété différentiable et g une métrique Riemannienne sur le fibré tangent (TM, π, M) .

Exemple 1.1.1. L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard

$$g_0(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

où $v = (v_1, \dots, v_n)_x$, $w = (w_1, \dots, w_n)_x \in T_x \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.2. Dans la boule

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

on considère le tenseur g_H défini par

$$g_H(v, w) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_0(v, w), \quad v, w \in T_x \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{D}^n.$$

g_H est appelée la métrique hyperbolique sur $\mathbb{D}^n$.

Exemple 1.1.3. Soit M une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in M$, on a $T_x M \subset T_x \mathbb{R}^n$. En posant

$$g(v, w) = g_0(v, w) \quad v, w \in T_x M.$$

on obtient la métrique Riemannienne induite par g_0 sur M .

Remarque 1.1.1. Soient (M, g) une variété Riemannienne, de dimension n , (U, φ) et (V, ψ) deux cartes sur M . Si g_{ij} (resp $\tilde{g}_{kl}$) désignent les composantes de g relativement à la carte (U, φ) (resp (V, ψ)), alors pour tout $x \in \varphi(U \cap V)$, le changement de coordonnées est donné par

$$y = y(x) = (y^1, \dots, y^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$$

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl},$$

où $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ et $(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n})$ désignent les bases de champs de vecteurs associés respectivement aux cartes (U, φ) et (V, ψ) . pour la preuve, remarquons que pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

1.1.1 Image inverse d'une métrique

Définition 1.1.3. Soient (N, h) une variété Riemannienne, de dimension n , M une variété différentiable, de dimension m , et $f : M \longrightarrow N$ une immersion. Alors

$$f^*h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$

définie pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $x \in M$ par

$$f^*h(X, Y)_x = h_{f(x)}(d_x f(X_x), d_x f(Y_x)),$$

est une métrique sur M , appelée métrique inverse

Expression locale de la métrique inverse f^*h

Soient (U, φ) une carte de M de base locale associée $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ et (V, ψ) une carte de N de base locale associée $(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n})$, alors

$$\begin{aligned} (f^*h)_{ij} &= f^*h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= h\left(df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} h\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) \circ f \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} (h_{\alpha\beta} \circ f). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Définition 1.1.4. Étant donnée une métrique Riemannienne g sur une variété M , on définit la norme $\|V\|_g$ d'un champ de vecteur $V \in \Gamma(TM)$ par

$$\|V\|_g = \sqrt{g(V, V)} \quad (1.3)$$

Localement, si $V = V^i \partial_i$ alors,

$$\|V\|_g^2 = g_{ij} V^i V^j$$

Proposition 1.1.1. Soit g une métrique Riemannienne sur M . L'application,

$$\begin{aligned} \sharp : \Gamma(TM^*) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ \omega &\longrightarrow \sharp\omega \end{aligned}$$

définie par

$$g(\sharp\omega, V) = \omega(V), \quad (1.4)$$

pour tout $V \in \Gamma(TM)$, est un isomorphisme $C^\infty(M)$ -linéaire.

Lemme 1.1.1. Soit g une métrique Riemannienne sur M . Pour tout $x \in M$ la métrique g induit un isomorphisme linéaire entre $T_x M^*$ et $T_x M$

$$\begin{aligned} \sharp_x : T_x M^* &\longrightarrow T_x M \\ \omega &\longrightarrow \sharp_x \omega \end{aligned}$$

définit par,

$$g_x(\sharp_x \omega, v) = \omega(v)$$

pour tout $v \in T_x M$.

Remarque 1.1.2. Localement, si $\omega = \omega_i dx^i$ et $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, alors

$$\sharp\omega = \omega_i g^{ij} \partial_j$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij}) .

1.2 Connexion linéaire.

Définition 1.2.1. Une connexion linéaire sur une variété M est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_X(V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2. $\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V$
3. $\nabla_{X+fY}V = \nabla_X V + f\nabla_Y V$,

pour tout $V, W, X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$.

Définition 1.2.2. Soient ∇ une connexion sur une variété M de dimension n et $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ (resp $(dx^1, \dots, dx^n)$) une base locale de section de $\Gamma(TM)$ (resp $\Gamma(T^*M)$). On définit les coefficients de Christoffel par

$$\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i} \partial_j) \quad (1.5)$$

Définition 1.2.3. Une section $V \in \Gamma(TM)$ est dite parallèle par rapport à la connexion ∇ si

$$\nabla_X V = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.2.4. Soit g une métrique Riemannienne sur M , On dit que la métrique g est compatible avec la connexion ∇ (ou parallèle), si

$$\nabla g = 0 \quad (1.6)$$

i.e

$$(\nabla_X g)(V, W) = 0$$

ou

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W) \quad (1.7)$$

pour tout $X, V, W \in \Gamma(TM)$.

1.2.1 Tenseur de torsion.

Définition 1.2.5. Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M . Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectorielle $C^\infty(M)$ -bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T \equiv 0$.

Remarques 1.2.1.

1. T est un champ de tenseur de type $(1, 2)$
2. $T(X, Y) = -T(Y, X)$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ (T est antisymétrique)
3. La connexion ∇ est sans torsion ssi pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a :

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

4. Pour tout $x \in M$, le tenseur de torsion T induit une application bilinéaire vectoriel

$$\begin{aligned} T_x : T_x M \times T_x M &\rightarrow T_x M \\ (v, w) &\mapsto T_x(v, w) = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x \end{aligned}$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, telque $X_x = v$ et $Y_x = w$ (indépendamment du choix de X et Y).

Théorème 1.2.1. (fondamentale).

Soit ∇ une connexion linéaire sur M . Si $p \in M$ tel que $T_p \cong 0$, alors il existe une carte $(U, x^1, \dots, x^n)$ telle que pour tout $i, j, k = 1, \dots, n$, on a

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \tag{1.8}$$

1.2.2 Connexion de Levi-Civita.

Théorème 1.2.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne, l'application

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

définie par la formule de Kozul,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]), \end{aligned} \tag{1.9}$$

est une connexion linéaire sur M , appelée connexion de Levi-Civita.

Preuve : Pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a,

1.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{fX}Y, Z) &= fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y)) + g(Z, [fX, Y]) \\
&\quad + g(Y, [Z, fX]) - g(fX, [Y, Z]) \\
&= fX(g(Y, Z)) + Y(f)g(Z, X) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\
&\quad - fZ(g(X, Y)) - Y(f)g(Z, X) + fg(Z, [X, Y]) \\
&\quad + Z(f)g(Y, X) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) + fg(Z, [X, Y]) \\
&\quad + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(f\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

et comme g est non dégénérée on a , $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

2.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{X+W}Y, Z) &= (X+W)(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X+W)) - Z(g(X+W, Y)) \\
&\quad + g(Z, [X+W, Y]) + g(Y, [Z, X+W]) - g(X+W, [Y, Z]) \\
&= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) \\
&\quad + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) + W(g(Y, Z)) + Y(g(Z, W)) \\
&\quad - Z(g(W, Y)) + g(Z, [W, Y]) + g(Y, [Z, W]) - g(W, [Y, Z]) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_W Y, Z) \\
&= 2g(\nabla_X Y + \nabla_W Y, Z),
\end{aligned}$$

d'où , $\nabla_{X+W}Y = \nabla_X Y + \nabla_W Y$.

3.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) &= X(g(fY, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(g(X, fY)) + g(Z, [X, fY]) \\
&\quad + g(fY, [Z, X]) - g(X, [fY, Z]) \\
&= X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - Z(f)g(X, Y) \\
&\quad - fZ(g(X, Y)) + X(f)g(Z, Y) + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) \\
&\quad + Z(f)g(X, Y) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) \\
&\quad + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2X(f)g(Y, Z) + 2fg(\nabla_X Y, Z) \\
&= 2g(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

d'où $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

4. De même manière on obtient , $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$. Donc ∇ est une connexion linéaire sur M .

■

Théorème 1.2.3. (*Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne*) Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g .

Preuve : On a

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2} \{g(Z, [X, Y]) - g(Z, [Y, X])\} \\ &= g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion. Et,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) &= \frac{1}{2} \{X(g(Y, Z)) + X(g(Z, Y))\} \\ &= X(g(Y, Z)), \end{aligned}$$

cela prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M . Comme g est non dégénérée, cette relation (1.9) détermine complètement la connexion ∇ , ce qui donne l'unicité. ■

Exemple 1.2.1. Une connexion linéaire ∇ sur M est une connexion linéaire sur le fibré tangent (TM, π, M) .

Dans un système de coordonnées (x^i) sur M , ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k définis par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

En effet, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ alors

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Proposition 1.2.1. Soient (M^m, g) une variété Riemannienne, de dimension m et ∇ la connexion de Levi-Civita. Si (U, φ) est une carte sur M avec les champs de bases $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ associés, alors les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\},$$

$$g_{kl} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\},$$

où, g_{ij} sont les coordonnées de g relativement à la carte (U, φ) .

Preuve : Comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour tout $i, j = 1, \dots, m$, où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ pour tout $i = 1, \dots, m$ on a,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) &= 2 \sum_{s=1}^m g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l) \\ &= 2 \sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} \\ &= \partial_i(g(\partial_j, \partial_l)) + \partial_j(g(\partial_l, \partial_i)) - \partial_l(g(\partial_i, \partial_j)), \end{aligned}$$

donc,

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \}$$

d'où,

$$\sum_{s=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} g^{lk} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \},$$

et,

$$\sum_{s,l=1}^m \Gamma_{ij}^s g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{lk} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \},$$

et comme (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) on a $\sum_{l=1}^m g_{sl} g^{lk} = \delta_{ks}$, où δ_{ks} est le symbole de Kronecker, d'où

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}.$$

■

Exemple 1.2.2. On considère la paramétrisation de la sphère $S^n = \{ u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1 \}$ et soit la projection stéréographique, $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par

$$\psi(x) = \left(\frac{2x^1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x^n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Les composantes du tenseur métrique relativement à ψ sont

$$g_{ij}(x) = \frac{4 \delta_{ij}}{(1 + \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour la preuve, en utilisant la formule 2.11.

Les symboles de Christoffel sont,

$$\Gamma_{ii}^i(x) = \Gamma_{ij}^j(x) = \Gamma_{ji}^i(x) = -\Gamma_{jj}^i(x) = \frac{-2x^i}{1 + \|x\|^2},$$

$$\Gamma_{ij}^k(x) = 0, \quad \text{pour } i, j \text{ et } k = 1, \dots, n \text{ distincts.}$$

pour la preuve en utilisant la proposition 1.2.1.

Théorème 1.2.4. (fondamental).

Soient (M, g) une variété Riemannienne et $p \in M$, alors il existe une carte $(U, x^1, \dots, x^n)$ telle que

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \tag{1.10}$$

$$g(\partial_i, \partial_j)(p) = \delta_{ij} \tag{1.11}$$

pour tout $i, j, k = 1, \dots, n$,

1.3 Courbures.

1.3.1 Tenseur de courbure.

Définition 1.3.1. Soit M une variété muni d'une connexion linéaire ∇ . On définit le tenseur de courbure, $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$, associé à ∇ , par :

$$R(X, Y)V = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]} V$$

pour tout $X, Y, V \in \Gamma(TM)$.

Propriétés 1.3.1.

1. La courbure R est $C^\infty(M)$ -3 linéaire
2. $R(X, Y)V = -R(Y, X)V$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $V \in \Gamma(TM)$ (antisymétrie)

Définition 1.3.2. Sur une variété Riemannienne (M, g) , le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne.

Le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel :

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \partial_l$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i(\Gamma_{jk}^l) - \partial_j(\Gamma_{ik}^l) + \sum_{m=1}^n \{\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m\},$$

où, $(\partial_i)_{i=1..n}$ est une base locale de champs de vecteurs sur M .

Proposition 1.3.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne R a les propriétés suivantes :

1. R est un champ de tenseurs de type $(3, 1)$.
2. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.
3. $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.
4. R vérifie l'identité de Bianchi algébrique

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

5. R vérifie l'identité de Bianchi différentielle

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$$

$$\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$$

1.3.2 Courbure sectionnelle

Définition 1.3.3. Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 2$ et P un 2-plan de $T_x M$ de base $\{X, Y\}$. On appelle courbure sectionnelle en x de P

$$K_x(P) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer X par λX pour $\lambda \neq 0$ et Y par $Y - g(X, Y)X$. On peut donc supposer que $\{X, Y\}$ est une base orthonormale. Dans ce cas

$$K_x(P) = g(R(X, Y)Y, X)$$

On vérifie que $K_x(P)$ ne dépend pas de la base orthonormée de P : En effet, si $\{Z, T\}$ est une autre base orthonormale, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a^2 + b^2 = 1$ avec

$$Z = aX + bY, \quad T = -bX + aY.$$

Une simple vérification montre que $g(R(X, Y)Y, X) = g(R(Z, T)T, Z)$.

Définition 1.3.4. Soit (M, g) une variété Riemannienne, de dimension n . On dit que M est une variété à courbure constante s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in M$ et tout 2-plan P de $T_x M$, on a

$$K_x(P) = k.$$

Remarques 1.3.1. (Résultats algébriques)

Soient (M, g) une variété Riemannienne, de dimension n , $x \in M$, $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1..n}$ une base de $T_x M$ et $(e_i)_{i=1..n}$ base orthonormée de $T_x M$. Soient

$$A : T_x M \longrightarrow T_x M,$$

$$B : T_x M \longrightarrow T_x^* M,$$

des applications linéaire et

$$C : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R},$$

une application bilinéaire, on pose

$$\begin{aligned} B1 : T_x M &\longrightarrow T_x M \\ u &= \sharp B(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C1 : T_x M &\longrightarrow T_x^* M \\ u &= C(u, \cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C2 : T_x M &\longrightarrow T_x M \\ u &= \sharp C1(u) \\ &= \sharp C(u, \cdot) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\diamond \text{ trace } A &= \sum_{i=1}^n e^i(A(e_i)) = \sum_{i=1}^n g(A(e_i), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n dx^i(A(\frac{\partial}{\partial x^i})) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(A(\frac{\partial}{\partial x^i}), \frac{\partial}{\partial x^j}) \\
\diamond \text{ trace } B &= \text{trace } B1 = \sum_{i=1}^n B(e_i)(e_i) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} B(\frac{\partial}{\partial x^i})(\frac{\partial}{\partial x^j}) \\
\diamond \text{ trace } C &= \text{trace } C1 = \text{trace } C2 = \sum_{i=1}^n C(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} C(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})
\end{aligned}$$

où dx^i (resp e^i) désigne le dual de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (resp e_i).

1.3.3 Courbure de Ricci

Définition 1.3.5. La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^m, g) de dimension m est un tenseur de type $(0, 2)$ défini par

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= \text{trace } R(*, X)Y \\
&= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, X)Y, e_i),
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, où (e_i) est une base orthonormée locale sur M , et

$$\begin{aligned}
R(*, X)Y &: \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \\
Z &\mapsto R(Z, X)Y
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
Ric : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(X, Y) &\mapsto Ric(X, Y)
\end{aligned}$$

La courbure de Ricci, Ric est forme bilinéaire symétrique, en effet

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, X)Y, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^m g(R(Y, e_i)e_i, X) \\
&= \sum_{i=1}^m g(R(e_i, Y)X, e_i) \\
&= Ric(Y, X)
\end{aligned}$$

Relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1..m}$, les composantes du tenseur de Ricci sont donnés par

$$\begin{aligned}
 Ric_{ij} &= Ric(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\
 &= trace R(*, \frac{\partial}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j} \\
 &= g^{kl} g(R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l}) \\
 &= g^{kl} R_{kij}^s g_{ls} \\
 &= \delta_{ks} R_{kij}^s \\
 &= R_{kij}^k
 \end{aligned}$$

Définition 1.3.6. Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne (M^m, g) , est un tenseur de type $(1, 1)$, défini par

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^m R(X, e_i) e_i$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, où $(e_i)_{i=1..m}$ est une base orthonormée locale sur M .

Remarque 1.3.1. Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, de dimension m . Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a

$$Ric(X, Y) = g(Ricci(X), Y)$$

1.3.4 Courbure scalaire

Définition 1.3.7. On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne (M^m, g) la fonction définie sur M par

$$S = trace_g Ric = \sum_{i,j=1}^m g(R(e_i, e_j) e_j, e_i)$$

où $(e_i)_{i=1..m}$ une base orthonormée locale sur M .

Proposition 1.3.2. Une variété Riemannienne (M, g) est de courbure sectionnelle constante k si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

pour tout X, Y et $Z \in \Gamma(TM)$.

Corollaire 1.3.1. Si (M^m, g) est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante k , alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a

1. $Ricci(X) = (m - 1)kX$,
2. $Ric(X, Y) = (m - 1)kg(X, Y)$,
3. $S = m(m - 1)k$.

Exemple 1.3.1. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du repère canonique $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, du produit scalaire euclidien $g = g_{ij} dx_i \otimes dx_j$, où $g_{ij} = \delta_{ij}$. On vérifie immédiatement que $\Gamma_{ij}^k = 0$, $R_{ijk}^l = 0$ donc $R = 0$. En particulier, la courbure sectionnelle de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ est nulle.

1.4 Opérateurs sur une variété Riemannienne

1.4.1 L'opérateur gradient

Définition 1.4.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par

$$\begin{aligned} \text{grad} : C^\infty(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ f &\longmapsto \text{grad } f = \sharp df \end{aligned}$$

où df est la différentielle de la fonction f .

Proposition 1.4.1. (Expression du gradient en coordonnées locales). Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m , (U, φ) une carte sur M avec les champs de base associés $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$, alors pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$(\text{grad } f)|_U = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1.12)$$

Preuve : On applique directement la définition de l'application $\sharp$ (voir proposition 1.2.1), et la définition de la différentielle la fonction $f \in C^\infty(M)$ relativement à la carte (U, φ) sur M , on a

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ \sharp df &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

où $dx^1, \dots, dx^m$ est la base duale. ■

De la Proposition 1.4.1, on déduit

Proposition 1.4.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout champ de vecteur $X \in \Gamma(TM)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a

$$df(X) = X(f) = g(\text{grad } f, X) \quad (1.13)$$

Propriétés 1.4.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^\infty(M)$ on a

1. $\text{grad}(f + h) = \text{grad } f + \text{grad } h$
2. $\text{grad}(fh) = h \text{grad } f + f \text{grad } h$
3. $(\text{grad } f)(h) = (\text{grad } h)(f)$

Preuve : Soit $f, h \in C^\infty(M)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

1).

$$\begin{aligned} g(\text{grad}(f+h), X) &= X(f+h) \\ &= X(f) + X(h) \\ &= g(\text{grad}f, X) + g(\text{grad}h, X) \\ &= g(\text{grad}f + \text{grad}h, X), \end{aligned}$$

2).

$$\begin{aligned} g(\text{grad}(fh), X) &= X(fh) \\ &= hX(f) + fX(h) \\ &= hg(\text{grad}f, X) + fg(\text{grad}h, X) \\ &= g(h \text{ grad } f + f \text{ grad } h, X), \end{aligned}$$

3).

$$\begin{aligned} (\text{grad } f)(h) &= g(\text{grad } h, \text{grad } f) \\ &= g(\text{grad } f, \text{grad } h) \\ &= (\text{grad } h)(f) \end{aligned}$$

■

1.4.2 L'opérateurs divergence

a)- Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne (M, g) , on a

$$\begin{aligned} \nabla X : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z X \end{aligned} \tag{1.14}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire (∇X est un tenseur de type (1,1)).
si $x \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla X)_x : T_x M &\longrightarrow T_x M \\ v &\longmapsto (\nabla_v X)_x \end{aligned} \tag{1.15}$$

est une application linéaire d'espace vectoriel.

Définition 1.4.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $\text{div}X$ est une fonction sur M définie par

$$\text{div}X = \text{tr}_g(\nabla X)$$

pour tout $x \in M$, on a

$$(\text{div}X)(x) = \text{tr}_g((\nabla X)_x)$$

En coordonnée locale (voir la Remarque 1.3.1), on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= dx^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right) \\ &= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

Si (e_i) est une base orthonormée locale sur M on a

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

b)- Divergence d'une forme différentielle

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$ une 1-forme sur une variété Riemannienne (M, g) , on a

$$\begin{aligned} \nabla \omega : \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(T^*M) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z \omega \end{aligned} \quad (1.16)$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire ($\nabla \omega$ est un tenseur de type (0,2)).
si $x \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla \omega)_x : T_x M &\longrightarrow T_x^* M \\ v &\longmapsto (\nabla_v \omega)_x \end{aligned} \quad (1.17)$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 1.4.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'une 1-forme $\omega \in \Gamma(T^*M)$, notée **div**(ω) est une fonction sur M définie par

$$\text{div}(\omega) = \text{tr}_g(\nabla \omega)$$

pour tout $x \in M$, on a

$$(\text{div}(\omega))(x) = \text{tr}_g((\nabla \omega)_x)$$

De la Remarque 1.3.1, on obtient localement

$$\begin{aligned} \text{div} \omega &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} \omega)(e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \omega) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

Cas d'un tenseur de type (0,p) Si T est champ de tenseur de type $(0, r)$, on définit sa divergence par :

$$(\text{div} T)(X_1, \dots, X_r) = \text{tr}_g(Z \longmapsto (\nabla_Z T)(X_1, \dots, X_r)).$$

c)- Expression locale de la divergence

Proposition 1.4.3. . Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m , pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a localement

$$\text{div} X = \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^i \right)$$

où $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Preuve : Localement, on

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

d'où,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^m dx_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m dx^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m dx^i \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^i \right) dx^i \end{aligned}$$

■

Propriétés 1.4.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a

1. $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$
2. $\operatorname{div}(f X) = f \operatorname{div} X + X(f)$

Preuve : On applique directement la définition du divergence, soit (e_i) une base ortho-normée locale sur M , on a

1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X + Y) &= \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}(X + Y), e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, e_i) + \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} Y, e_i) \\ &= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y, \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f X) &= \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} f X, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m g(e_i(f) X + f \nabla_{e_i} X, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i(f) g(X, e_i) + \sum_{i=1}^m f g(\nabla_{e_i} X, e_i) \\ &= X(f) + f \operatorname{div} X \end{aligned}$$

■

Lemme 1.4.1. *Sur une variété Riemannienne (M, g) . Relativement à une carte locale (U, x^i) , on a*

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{\det(g_{ij})}) = \sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{l=1}^m \Gamma_{lk}^l \quad (1.18)$$

Proposition 1.4.4. *(Deuxième expression de la divergence en coordonnées locales). Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a*

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\det(g_{ij})} X^k)$$

Preuve : D'après la proposition de première expression de la divergence en coordonnées locales nous avons,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m X^j \Gamma_{ij}^i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m X^j \sum_{i=1}^m \Gamma_{ij}^i \end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 1.4.1, avec $G = (g_{ij})$, alors un calcul direct donne,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} (\sqrt{\det G} \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n X^j \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} (\sqrt{\det G} \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{\det G})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det G} X^i) \end{aligned}$$

en utilisant la convention d'Einstein on a

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det G} X^i)$$

■

1.4.3 La Hessienne d'une fonction

Définition 1.4.4. *Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. La Hessienne de la fonction f noté $\operatorname{Hess}(f)$, est une application $C^\infty(M)$ -bilinéaire, définie par :*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(f) : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\longmapsto g(\nabla_X \operatorname{grad}(f), Y) \end{aligned}$$

Proposition 1.4.5. *Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$. La Hessienne $\operatorname{Hess}(f)$, est une application symétrique.*

Preuve : En tenant compte que le tenseur de torsion associé à la métrique g est nul, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Hess(f)(X, Y) &= g(\nabla_X grad(f), Y) \\
 &= X(g(grad(f), Y)) - g(grad(f), \nabla_X Y) \\
 &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\
 &= [X, Y] + Y(X(f)) - \nabla_X Y(f) \\
 &= Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) \\
 &= Y(g(grad(f), X)) - g(grad(f), \nabla_Y X) \\
 &= g(\nabla_Y grad(f), X) \\
 &= Hess(f)(Y, X).
 \end{aligned}$$

■

1.4.4 L'opérateur Laplacien

Définition 1.4.5. Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien noté Δ , sur M par

$$\begin{aligned}
 \Delta : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\
 f &\longmapsto \Delta(f) = div(grad f) = trace_g(Hess(f))
 \end{aligned}$$

appelé aussi opérateur de Laplace-Beltrami.

Propriétés 1.4.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^\infty(M)$ on a

1. $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$
2. $\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(grad f, grad h)$

Preuve : Soit $f, h \in C^\infty(M)$, en utilisant les propriétés des opérateurs grad et div et le fait que $X(f) = g(grad(f), X)$, on obtient

1.

$$\begin{aligned}
 \Delta(f + h) &= div(grad(f + h)) \\
 &= div(grad f + grad h) \\
 &= div(grad f) + div(grad h) \\
 &= \Delta(f) + \Delta(h),
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \Delta(fh) &= div(grad(fh)) \\
 &= div(f grad h + h grad f) \\
 &= div(f grad h) + div(h grad f) \\
 &= f div(grad h) + (grad h)(f) + h div(grad f) + (grad f)(h) \\
 &= f\Delta(h) + h\Delta(f) + 2g(grad f, grad h).
 \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4.6. (Première expression du Laplacien en coordonnées locales). Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\Delta(f) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \quad (1.19)$$

Preuve : Soit $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &= g^{ij} g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - g \left(\operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \Gamma_{ij}^k g \left(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \end{aligned}$$

■

Exemple 1.4.1. Soit $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard g_0 , ($g_{ij} = \delta_{ij}$), alors pour tous fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^m$ et $X = (X^1, \dots, X^m)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ on a

1.

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{aligned}$$

3.

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

1.4.5 Formule de Bochner

Proposition 1.4.7. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^\infty(M)$, alors f vérifie la formule suivante (dite formule de Bochner) :

$$\frac{1}{2} \Delta |\operatorname{grad}(f)|^2 = |\operatorname{Hess}(f)|^2 + g(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(\Delta f)) + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)) \quad (1.20)$$

où $|\operatorname{Hess}(f)|^2 = \sum_i g(\nabla_{e_i} \operatorname{grad}(f), \nabla_{e_i} \operatorname{grad}(f))$ relativement une base locale orthonormale $(e_1, \dots, e_m)$.

Preuve : Soient $x \in M$ et $(e_1, \dots, e_m)$ une base locale orthonormale de champs de vecteurs telque $(\nabla_{e_i} e_j)_x = 0$, $1 \leq i, j \leq m$. En développant le calcul en x , on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta |grad(f)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_i e_i(e_i g(grad(f), grad(f))) \\
&= \sum_i e_i(g(\nabla_{e_i} grad(f), grad(f))) \\
&= \sum_i e_i(Hess(f)(e_i, grad(f))) \\
&= \sum_i e_i(Hess(f)(grad(f), e_i)) \\
&= \sum_i e_i(g(\nabla_{grad(f)} grad(f), e_i)) \\
&= \sum_i \left(g(\nabla_{e_i} \nabla_{grad(f)} grad(f), e_i) + g(\nabla_{grad(f)} grad(f), \nabla_{e_i} e_i) \right) \\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i} \nabla_{grad(f)} grad(f), e_i) \\
&= \sum_i \left\{ g(R(e_i, grad(f)) grad(f), e_i) + g(\nabla_{grad(f)} \nabla_{e_i} grad(f), e_i) \right. \\
&\quad \left. + g(\nabla_{[e_i, grad(f)]} grad(f), e_i) \right\}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

On a :

$$\sum_i g(R(e_i, grad(f)) grad(f), e_i) = Ric(grad(f), grad(f)). \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \left\{ g(\nabla_{grad(f)} \nabla_{e_i} grad(f), e_i) \right. &= \sum_i grad(f)(g(\nabla_{e_i} grad(f), e_i)) \\
&\quad \left. - \sum_i g(\nabla_{e_i} grad(f), \nabla_{grad(f)} e_i) \right\} \\
&= \sum_i grad(f)(g(\nabla_{e_i} grad(f), e_i)) \\
&\quad - \sum_i g(\nabla_{e_i} grad(f), e_j(f) \nabla_{e_j} e_i) \Big\} \\
&= \sum_i grad(f)(g(\nabla_{e_i} grad(f), e_i)) - 0 \\
&= grad(f) trace_g Hess(f). \\
&= grad(f)(\Delta(f)) \\
&= g(grad(f), grad \Delta(f)).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i g(\nabla_{[e_i, \text{grad}(f)]} \text{grad}(f), e_i) &= \sum_i \text{Hess}(f)([e_i, \text{grad}(f)], e_i) \\
&= \sum_i \text{Hess}(f)(\nabla_{e_i} \text{grad}(f) - \nabla_{\text{grad}(f)} e_i, e_i) \\
&= \sum_i \text{Hess}(f)(\nabla_{e_i} \text{grad}(f), e_i) - \sum_i \text{Hess}(f)(\nabla_{\text{grad}(f)} e_i, e_i) \\
&= \sum_i \text{Hess}(f)(\nabla_{e_i} \text{grad}(f), e_i) - 0 \\
&= \sum_i \text{Hess}(f)(e_i, \nabla_{e_i} \text{grad}(f)) \\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i} \text{grad}(f), \nabla_{e_i} \text{grad}(f)). \tag{1.24}
\end{aligned}$$

Enfin, en substituant les formules (1.22), (1.23) et (1.24) dans (1.21), on obtient la formule (1.20). $\blacksquare$

1.4.6 Théorème de divergence

Définition 1.4.6. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n . On appelle mesure de volume Riemannienne, notée v^M ou v^g , la mesure définie localement dans un repère par

$$v^M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Exemples 1.4.1. On considère la variété $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y) on a

$$g_0 = dx^2 + dy^2,$$

et,

$$v^{g_0} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy$$

On considère la sphère S^2 muni de la métrique

$$g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

alors,

$$v^g = \sqrt{\det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |\sin\theta| d\theta \wedge d\varphi$$

Proposition 1.4.8. (Théorème de divergence [7]). Soit D un domaine compact à bord dans une variété Riemannienne (M, g) . Soit ω 1-forme et X un champ de vecteurs, définies sur un voisinage incluse dans D . Alors

$$\int_D (\text{div } \omega) v^M = \int_{\partial D} \omega(\mathbf{n}) v^{\partial D} \quad \text{et} \quad \int_D (\text{div } X) v^M = \int_{\partial D} g(X, \mathbf{n}) v^{\partial D},$$

où ∂D est le bord de D et $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ est le vecteur unitaire normale à ∂D .

Corollaire 1.4.1. Pour tout ω une 1-forme et X un champ de vecteurs à supports compact dans un domaine D , alors

$$\int_D (\text{div } \omega) v^M = 0 \quad \text{et} \quad \int_D (\text{div } X) v^M = 0$$

1.5 Métrique conforme

Définition 1.5.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n . Deux métriques g et $\tilde{g}$ sur M , sont dit conforme s'il existe une fonction positive non nulle $f \in C^\infty(M)$ telle que

$$\tilde{g} = f.g \quad (1.25)$$

i.e

$$\tilde{g}(X, Y) = f.g(X, Y)$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$. f est appelé fonction de dilatation.

1.5.1 Connexion de Levi-Civita d'une métrique conforme

Proposition 1.5.1. Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension m et $\tilde{g} = f.g$ une métrique conforme. Alors, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{X(f)}{2f} Y + \frac{Y(f)}{2f} X - \frac{g(X, Y)}{2f} \text{grad}(f), \quad (1.26)$$

où ∇ , $\tilde{\nabla}$ désignent les connexions de Levi-Civita associées à g et $\tilde{g}$ respectivement.

Preuve : Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. En utilisant la formule de Kozul, on obtient

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(\tilde{g}(Y, Z)) + Y(\tilde{g}(Z, X)) - Z(\tilde{g}(X, Y)) + \tilde{g}(Z, [X, Y]) + \tilde{g}(Y, [Z, X]) - \tilde{g}(X, [Y, Z]) \\ &= X(fg(Y, Z)) + Y(fg(Z, X)) - Z(fg(X, Y)) + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) \\ &\quad - fg(X, [Y, Z]) \\ &= f\{X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])\} \\ &\quad + X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(Z, X) - Z(f)g(X, Y) \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) + X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(Z, X) - Z(f)g(X, Y) \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) + 2fg\left(\frac{X(f)}{2f}Y, Z\right) + 2fg\left(\frac{Y(f)}{2f}X, Z\right) - g(X, Y)g(\text{grad}(f), Z) \\ &= 2f\{g(\nabla_X Y, Z) + g\left(\frac{X(f)}{2f}Y, Z\right) + g\left(\frac{Y(f)}{2f}X, Z\right) - g\left(\frac{g(X, Y)}{2f}\text{grad}(f), Z\right)\} \\ &= 2\tilde{g}\left(\nabla_X Y + \frac{X(f)}{2f}Y + \frac{Y(f)}{2f}X - \frac{g(X, Y)}{2f}\text{grad}(f), Z\right) \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.5.1. Soient (M, g) une variété Riemannienne de dimension m et $\tilde{g} = e^{2\gamma}g$ une métrique conforme à g . Alors, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\gamma)Y + Y(\gamma)X - g(X, Y)\text{grad}(\gamma) \quad (1.27)$$

où ∇ , $\tilde{\nabla}$ désignent les connexions de Levi-Civita associées à g et $\tilde{g}$ respectivement.

Dans toute la suite, on considère le cas de la métrique conforme où la fonction de dilatation est de la forme $f = e^{2\gamma}$

1.5.2 Tenseur de courbure d'une métrique conforme

:

Proposition 1.5.2. *Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\tilde{g} = e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g . Alors, pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ on a :*

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + (\nabla_Y Z)(\gamma)X - (\nabla_X Z)(\gamma)Y + X(Z(\gamma))Y \\ &\quad - Y(Z(\gamma))X + Y(\gamma)Z(\gamma)X - X(\gamma)Z(\gamma)Y + g(X, Z)[\nabla_Y \text{grad}(\gamma) \\ &\quad + |\text{grad}(\gamma)|^2 Y] - g(Y, Z)[\nabla_X \text{grad}(\gamma) + |\text{grad}(\gamma)|^2 X] \\ &\quad + [X(\gamma)g(Y, Z) - Y(\gamma)g(X, Z)]\text{grad}(\gamma) \end{aligned} \quad (1.28)$$

où R et $\tilde{R}$ désignent les tenseurs de courbures associés à g et $\tilde{g}$ respectivement.

Preuve :

Par définition du tenseur de courbure, nous avons :

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z. \quad (1.29)$$

Du Corollaire 1.5.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + Y(\gamma)Z + Z(\gamma)Y - g(Y, Z)\text{grad}(\gamma)) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + X(\gamma)\nabla_Y Z + (\nabla_Y Z)(\gamma)X - g(X, \nabla_Y Z)\text{grad}(\gamma) \\ &\quad + X(Y(\gamma))Z + Y(\gamma)[\nabla_X Z + X(\gamma)Z + Z(\gamma)X - g(X, Z)\text{grad}(\gamma)] \\ &\quad + X(Z(\gamma))Y + Z(\gamma)[\nabla_X Y + X(\gamma)Y + Y(\gamma)X - g(X, Y)\text{grad}(\gamma)] \\ &\quad - Xg(Y, Z)\text{grad}(\gamma) - g(Y, Z)[\nabla_X \text{grad}(\gamma) + X(\gamma)\text{grad}(\gamma) \\ &\quad + \text{grad}(\gamma)(\gamma)X - g(X, \text{grad}(\gamma))\text{grad}(\gamma)] \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + Y(\gamma)\nabla_X Z + (\nabla_X Z)(\gamma)Y - g(Y, \nabla_X Z)\text{grad}(\gamma) \\ &\quad + Y(X(\gamma))Z + X(\gamma)[\nabla_Y Z + Y(\gamma)Z + Z(\gamma)Y - g(Y, Z)\text{grad}(\gamma)] \\ &\quad + Y(Z(\gamma))X + Z(\gamma)[\nabla_Y X + Y(\gamma)X + X(\gamma)Y - g(X, Y)\text{grad}(\gamma)] \\ &\quad - Yg(X, Z)\text{grad}(\gamma) - g(X, Z)[\nabla_Y \text{grad}(\gamma) \\ &\quad + Y(\gamma)\text{grad}(\gamma) + \text{grad}(\gamma)(\gamma)Y - g(Y, \text{grad}(\gamma))\text{grad}(\gamma)] \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z &= \nabla_{[X, Y]} Z + (\nabla_X Y)(\gamma)Z - (\nabla_Y X)(\gamma)Z + Z(\gamma)\nabla_X Y - Z(\gamma)\nabla_Y X \\ &\quad - g(\nabla_X Y, Z)\text{grad}(\gamma) + g(\nabla_Y X, Z)\text{grad}(\gamma) \end{aligned} \quad (1.32)$$

En substituant equations (1.30) , (1.31) et (1.32) dans l'égalité (1.29), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + (\nabla_Y Z)(\gamma)X - (\nabla_X Z)(\gamma)Y + X(Z(\gamma))Y \\ &\quad - Y(Z(\gamma))X + Y(\gamma)Z(\gamma)X - X(\gamma)Z(\gamma)Y + g(X, Z)[\nabla_Y \text{grad}(\gamma) \\ &\quad + |\text{grad}(\gamma)|^2 Y] - g(Y, Z)[\nabla_X \text{grad}(\gamma) + |\text{grad}(\gamma)|^2 X] \\ &\quad + [X(\gamma)g(Y, Z) - Y(\gamma)g(X, Z)]\text{grad}(\gamma) \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.3. Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\tilde{g} = e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g . Alors, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

$$\widetilde{Ricci}(X) = e^{-2\gamma} [Ricci(X) - \Delta(\gamma)X + (m-2)[X(\gamma)grad(\gamma) - |grad(\gamma)|^2X - \nabla_X grad(\gamma)]] \quad (1.33)$$

où $Ricci$ et $\widetilde{Ricci}$ sont les tenseurs de Ricci associés à g et $\tilde{g}$ respectivement.

Preuve :

Remarquons que si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, une base orthonormale associée à g , alors $(\tilde{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormale associée à $\tilde{g}$, où

$$\tilde{e}_i = e^{-\gamma}e_i,$$

Par définition du tenseur de Ricci, on obtient est donné par la relation :

$$\widetilde{Ricci}(X) = \sum_{i=1}^n \tilde{R}(X, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i = e^{-2\gamma} \sum_{i=1}^n \tilde{R}(X, e_i)e_i,$$

En substituant la dernière équation dans la formule (1.28) on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{Ricci}(X) &= \sum_{i=1}^n e^{-2\gamma} \tilde{R}(X, e_i)e_i \\ &= e^{-2\gamma} \sum_{i=1}^n \{R(X, e_i)e_i + (\nabla_{e_i}e_i)(\gamma)X - (\nabla_X e_i)(\gamma)e_i + X(e_i(\gamma))e_i - e_i(e_i(\gamma))X \\ &\quad + e_i(\gamma)e_i(\gamma)X - X(\gamma)e_i(\gamma)e_i + g(X, e_i)[\nabla_{e_i}grad\gamma + |grad\gamma|^2e_i] \\ &\quad - g(e_i, e_i)[\nabla_X grad\gamma + |grad\gamma|^2X] + [X(\gamma)g(e_i, e_i) - e_i(\gamma)g(X, e_i)]grad\gamma\}. \end{aligned}$$

Des égalités :

$$\begin{aligned} Ricci(X) &= \sum_{i=1}^m R(X, e_i)e_i \\ grad\gamma &= e_i(\gamma)e_i \\ \Delta(\gamma) &= e_i(e_i(\gamma)) - (\nabla_{e_i}e_i)(\gamma) \\ X(\gamma) &= g(X, grad\gamma) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \widetilde{Ricci}(X) &= e^{-2\gamma} [Ricci(X) - \Delta(\gamma)X + (m-2)[X(\gamma)grad\gamma - |grad\gamma|^2X] \\ &\quad + \nabla_X grad\gamma - m\nabla_X grad\gamma - (\nabla_X e_i)(\gamma)e_i + X(e_i(\gamma))e_i]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Comme

$$\begin{aligned} (\nabla_X e_i)(\gamma)e_i &= g(\nabla_X e_i, grad\gamma)e_i \\ &= X(g(e_i, grad\gamma))e_i - g(e_i, \nabla_X grad\gamma)e_i \\ &= X(e_i(\gamma))e_i - \nabla_X grad\gamma. \end{aligned} \quad (1.35)$$

On déduit que :

$$\widetilde{Ricci}(X) = e^{-2\gamma} [Ricci(X) - \Delta(\gamma)X + (m-2)[X(\gamma)grad(\gamma) - |grad(\gamma)|^2 X - \nabla_X grad(\gamma)]]$$

■

1.5.3 Courbure scalaire d'une métrique conforme

Equation de Yamabe

Théorème 1.5.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\tilde{g} = k.g$ une déformation conforme de la métrique g . Si S et $\tilde{S}$ désignent les courbures scalaires relativement aux métriques g et $\tilde{g}$ respectivement, alors la relation entre $\tilde{S}$ et S est donnée par l'équation de Yamabe suivante :*

$$S'.u^{(m+2)/(m-2)} = -\frac{4(m-1)}{m-2}\Delta_g u + S.u. \quad (1.36)$$

où $k = u^{4/(m-2)}$ et $m \geq 3$.

Preuve : Si $(e_i)_{i=1}^m$ une base orthonormée de (M, g) telque $\nabla_{e_i} e_j = 0$, alors $\tilde{e}_i = e^{-\gamma} e_i$ est une base ortonormé de $(M, \tilde{g})$.

D'après la formule (1.33), avec $k = e^{2\gamma}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \sum_{i=1}^m \widetilde{g(Ricci(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i))} \\
&= \sum_{i=1}^m e^{-2\gamma} \widetilde{g(Ricci(\tilde{e}_i) - \Delta(\gamma)\tilde{e}_i + (m-2)[\tilde{e}_i(\gamma)grad(\gamma) - |grad(\gamma)|^2\tilde{e}_i - \nabla_{\tilde{e}_i}grad(\gamma))], \tilde{e}_i)} \\
&= \sum_{i=1}^m g(Ricci(\tilde{e}_i) - \Delta(\gamma)\tilde{e}_i + (m-2)[\tilde{e}_i(\gamma)grad(\gamma) - |grad(\gamma)|^2\tilde{e}_i - \nabla_{\tilde{e}_i}grad(\gamma)]), \tilde{e}_i) \\
e^{2\gamma}\tilde{S} &= \sum_{i=1}^m g(Ricci(e_i), e_i) - \Delta(\gamma) \sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) + (m-2) \sum_{i=1}^m g(e_i(\gamma)grad(\gamma), e_i) \\
&\quad - (m-2)|grad(\gamma)|^2 \sum_{i=1}^m g(e_i, e_i) - (m-2) \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}grad(\gamma)), e_i) \\
&= S - m.\Delta(\gamma) + (m-2) \sum_{i=1}^m g(grad(\gamma), e_i(\gamma)e_i) - m(m-2)|grad(\gamma)|^2 \\
&\quad - (m-2) \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}grad(\gamma)), e_i) \\
&= S - m.\Delta(\gamma) - (m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2 - (m-2) \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}grad(\gamma)), e_i) \\
&\quad - (m-2) \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}grad(\gamma)), e_i) \\
&= S - m.\Delta(\gamma) - (m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2 - (m-2) \sum_{i=1}^m \left\{ e_i g(grad(\gamma), e_i) - g(grad(\gamma), \nabla_{e_i}e_i) \right\} \\
&= S - m.\Delta(\gamma) - (m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2 - (m-2) \sum_{i=1}^m e_i(e_i(\gamma)) \\
&= S - m.\Delta(\gamma) - (m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2 - (m-2)\Delta(\gamma)
\end{aligned}$$

d'où

$$e^{2\gamma}\tilde{S} = S - 2(m-1).\Delta(\gamma) - (m-1)(m-2)|grad(\gamma)|^2 \quad (1.37)$$

Evaluant γ en fonction de u . On a :

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln(k) = \ln(u^{4/(m-2)}) = \frac{2}{m-2} \ln(u)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\gamma) &= \sum_{i=1}^m e_i(e_i(\gamma)) \\
&= \frac{2}{m-2} \sum_{i=1}^m e_i(u^{-1}e_i(u)) \\
&= \frac{2.u^{-1}}{m-2} \sum_{i=1}^m e_i(e_i(u)) - \frac{2.u^{-2}}{m-2} \sum_{i=1}^m (e_i(u))^2 \\
&= \frac{2.u^{-1}}{m-2} \Delta(u) - \frac{2.u^{-2}}{m-2} |\text{grad}(u)|^2
\end{aligned} \tag{1.38}$$

d'autre part, on a :

$$\text{grad}(\gamma) = \frac{2.u^{-1}}{m-2} \text{grad}(u)$$

d'où

$$|\text{grad}(\gamma)|^2 = \frac{4.u^{-2}}{(m-2)^2} |\text{grad}(u)|^2 \tag{1.39}$$

Remplaçons (1.38) et (1.39) dans (1.37), on obtient :

$$\begin{aligned}
u^{4/(m-2)} \tilde{S} &= S - 2(m-1) \cdot \left[\frac{2.u^{-1}}{m-2} \Delta(u) - \frac{2.u^{-2}}{m-2} |\text{grad}(u)|^2 \right] \\
&\quad - (m-1)(m-2) \frac{4.u^{-2}}{(m-2)^2} |\text{grad}(u)|^2 \\
&= S - \frac{4(m-1)}{m-2} .u^{-1} \Delta(u) + \frac{4(m-1).u^{-2}}{m-2} |\text{grad}(u)|^2 \\
&\quad - (m-1)(m-2) \frac{4.u^{-2}}{(m-2)^2} |\text{grad}(u)|^2 \\
&= S - \frac{4(m-1)}{m-2} .u^{-1} \Delta(u)
\end{aligned}$$

d'où

$$u^{(m+2)/(m-2)} \tilde{S} = S.u - \frac{4(m-1)}{m-2} \Delta(u)$$

■

1.6 Propriétés des Connexions sur une sous variété

1.6.1 Décomposition du fibré tangent

Définition 1.6.1.

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m , N une variété (resp sous variété de M) de dimension n , et $f : N \rightarrow M$ une immersion C^∞ . Si N est muni de la métrique induite $h = f^*g$, alors l'application f est dite immersion isométrique, si de plus f est injective alors (N, h) est dite sous variété Riemannienne.

Dans la suite de cette section, on considère le cas des immersions isométriques.

On note par :

$$TM/N = \bigcup_{p \in N} T_p M \quad (1.40)$$

le fibré vectoriel au dessus de N .

$$\mathcal{T}(N) = TN = \bigcup_{p \in N} T_p N \quad (1.41)$$

le fibré vectoriel tangent à N .

$$\mathcal{N}(N) = \bigcup_{p \in N} (T_p N)^\perp = (TN)^\perp \quad (1.42)$$

le fibré vectoriel normal à N . Le fibré TM/N se décompose en somme directe (somme de Whitney) :

$$TM/N = \mathcal{T}(N) \oplus \mathcal{N}(N) = \bigcup_{p \in N} (T_p N \oplus (T_p N)^\perp) \quad (1.43)$$

Remarque 1.6.1. *Localement pour tout $p \in N$, il existent un ouvert $U \subset M$ et une base locale $(E_1, \dots, E_m) \in \Gamma(TM)$ de champ de vecteurs tels que pour tout $x \in U \cap N$, on a :*

$$(E_{1/x}, \dots, E_{n/x}) \text{ est une base de } T_x N \quad \text{et} \quad (E_{n+1/x}, \dots, E_{m/x}) \text{ est une base de } \mathcal{N}_x(N).$$

On note par :

$$\begin{aligned} \pi^\top : M/N &\rightarrow \mathcal{T}(N) \\ \pi^\perp : M/N &\rightarrow \mathcal{N}(N) \end{aligned}$$

les projections canoniques.

1.6.2 Opérateur Shape (Application de Weingarten)

Soient ∇^M et ∇^N les connexions de Levi-Civita associée à M et N respectivement. Pour tout $X, Y \in \Gamma(TN)$, on a la décomposition unique :

$$\nabla_X^M Y = (\nabla_X^M Y)^\top + (\nabla_X^M Y)^\perp \quad (1.44)$$

En vertu de l'unicité de la connexion de Levi-Civita sur la variété N , on a :

$$(\nabla_X^M Y)^\top = \nabla_X^N Y$$

d'où

$$\nabla_X^M Y = \nabla_X^N Y + (\nabla_X^M Y)^\perp \quad (1.45)$$

Des propriétés des connexions ∇^M et ∇^N (connexions sans torsions), on déduit que l'application :

$$\begin{aligned} B : \Gamma(TN) \times \Gamma(TN) &\rightarrow \Gamma(TN^\perp) \\ (X, Y) &\mapsto B(X, Y) = (\nabla_X^M Y)^\perp \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(N)$ -bilinéaire symétrique :

$$B(X, Y) = \nabla_X^M Y - \nabla_X^N Y = \nabla_Y^M X - \nabla_Y^N X = B(Y, X).$$

B est appelé deuxième forme fondamentale. La formule (1.45) s'écrit

$$\nabla_X^M Y = \nabla_X^N Y + B(X, Y) \quad (1.46)$$

La formule (1.46) est dite **formule de Gauss**.

Pour $\xi \in \Gamma(\mathcal{N}(N))$, on pose :

$$\begin{aligned} A_\xi : \Gamma(TN) &\rightarrow \Gamma(TN) \\ X &\mapsto A_\xi(X) = -(\nabla_X^M \xi)^\top \end{aligned} \quad (1.47)$$

Pour tout $Y \in \Gamma(TM)$ et $X \in \Gamma(\mathcal{N}(N))$, on a :

$$0 = X(g(X, \xi)) = g(\nabla_X^M \xi, Y) + g(\xi, \nabla_X^M Y) = g((\nabla_X^M \xi)^\top, Y) + g(\xi, (\nabla_X^M Y)^\perp).$$

d'où

$$g(A_\xi(X), Y) = g(\xi, B(X, Y)).$$

En déduit que A_ξ est une application $C^\infty(N)$ -linéaire vérifiant la condition de symétrie :

$$g(A_\xi(X), Y) = g(A_\xi(Y), X)$$

L'application A_ξ est appelé opérateur Shape ou Application de Weingarten. (pour plus de détail sur les propriétés des sous-variétés voir [36].

L'application :

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \Gamma(TN) \times \Gamma(\mathcal{N}(N)) &\rightarrow \Gamma(\mathcal{N}(N)) \\ (X, \xi) &\mapsto \nabla_X^\perp \xi = (\nabla_X^M \xi)^\perp \end{aligned}$$

définit une connexion, dite connexion normale et on a la **formule de Weingarten** :

$$\nabla_X^M \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi. \quad (1.48)$$

1.6.3 Equation de Gauss

Proposition 1.6.1. *Si R^M et R^N désignent les tenseurs de courbure de M et N respectivement, alors pour tout $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ on a l'équation de Gauss :*

$$\begin{aligned} g(R^N(X, Y)Z, W) &= g(R^M(X, Y)Z, W) + g(B(Y, Z), B(X, W)) \\ &\quad - g(B(X, Z), B(Y, W)). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Preuve : Des formules (1.46) et (1.48) On obtient

$$\begin{aligned} \nabla_X^M \nabla_Y^M Z &= \nabla_X^M \nabla_Y^N Z + \nabla_X^M B(Y, Z) \\ &= \nabla_X^N \nabla_Y^N Z + B(X, \nabla_Y^N Z) - A_{B(Y, Z)}X + \nabla_X^\perp B(Y, Z) \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\nabla_Y^M \nabla_X^M Z = \nabla_Y^N \nabla_X^N Z + B(Y, \nabla_X^N Z) - A_{B(X, Z)}Y + \nabla_Y^\perp B(X, Z) \quad (1.51)$$

$$\nabla_{[X, Y]}^M Z = \nabla_{[X, Y]}^N Z + B([X, Y], Z). \quad (1.52)$$

En utilisant la définition du tenseur de courbure et les formules (1.50), (1.51) et (1.52), on déduit la formule (1.49). ■

Si K^M et K^N désignent les courbures sectionnelles de M et N respectivement, alors pour tout champs de vecteurs orthonormales $X, Y \in \Gamma(TN)$, on a :

$$K^N(X, Y) = K^M(X, Y) + g(B(X, X), B(Y, Y)) - \|B(X, Y)\|^2.$$

1.6.4 Equation de Codazzi

Des formules (1.50), (1.51) et (1.52), on obtient

$$\begin{aligned} (R^M(X, Y)Z)^\perp &= B(X, \nabla_Y^N Z) + \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(Y, \nabla_X^N Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) - B([X, Y], Z) \\ &= B(X, \nabla_Y^N Z) + \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(Y, \nabla_X^N Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) - B(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad + B(\nabla_Y X, Z) \\ &= \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X^N Z) - \nabla_Y^\perp B(X, Z) + B(\nabla_Y X, Z) \\ &\quad + B(X, \nabla_Y^N Z) \\ &= (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp B)(X, Z) \end{aligned}$$

où :

$$(\nabla_X^\perp B)(Y, Z) = \nabla_X^\perp B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X^N Z)$$

L'équation

$$(R^M(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp B)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp B)(X, Z) \quad (1.53)$$

est dite équation de **Codazzi**.

Notons par $R^\perp$ le tenseur de courbure du fibré normal $TM^\perp$:

$$\begin{aligned} R^\perp : TM \times TM \times TM^\perp &\rightarrow TM^\perp \\ (X, Y, \xi) &\mapsto R^\perp(X, Y)\xi \end{aligned}$$

définit par :

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

Des formules de Gauss (1.46) et de Weingarten (1.48), on obtient l'équation de Ricci suivante :

$$(R^M(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + B(A_\xi X, Y) - B(A_\xi Y, X) \quad (1.54)$$

Chapitre 2

Géométrie du fibré vectoriel

2.1 Fibrés vectoriels

Définition 2.1.1. On appelle *fibré vectoriel* de fibre type $\mathbb{R}^k$, le triplet (E, π, M) où E et M sont des variétés de classe C^∞ , et $\pi : E \longrightarrow M$ une application surjective de classe C^∞ telles que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout $x \in M$, $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension k .
2. (Condition de trivialisation locale.)
Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tels que :
i) $P_1 \circ \varphi = \pi$, i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi & \downarrow P_1 \\ & & U \end{array}$$

où $P_1 : (x, y) \in U \times \mathbb{R}^k \longmapsto x \in U$ désigne la première projection.

- ii) L'application $\varphi_x = \varphi|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k$ est linéaire bijective pour tout $x \in M$.

La variété M est appelée *base du fibré*, E l'*espace total* et $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ la *fibre au-dessus de x* .

Exemple 2.1.1. *Fibré tangent.*

Soient M une variété de classe C^∞ , de dimension n ,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

(réunion disjointe de tous les espaces tangents à M), et

$$\begin{array}{ccc} \pi : TM & \longrightarrow & M \\ v & \longmapsto & x \quad (v \in T_x M) \end{array}$$

la projection canonique.

Le triplet (TM, π, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^n$; En effet :

- TM est une variété C^∞ de dimension $2n$.
- Pour tout $x \in M$, $\pi^{-1}(\{x\}) = T_x M \simeq \mathbb{R}^n$
- Si $(V, \psi) \in \text{atl}(M, x)$, alors la carte de trivialisation locale est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(V) &\longrightarrow V \times \mathbb{R}^n \\ (y, v) &\longmapsto (y, d_y \psi(v)) \end{aligned}$$

Exemple 2.1.2. *Fibré trivial.*

Soit M est une variété C^∞ de dimension n . on pose :

$$E = M \times \mathbb{R}^k$$

$$\begin{aligned} \pi : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow M \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

(E, π, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$.

2.1.1 Section sur un fibré vectoriel

Définition 2.1.2. Une section sur un fibré vectoriel (E, π, M) est une application, $\sigma : M \longrightarrow E$ de classe C^∞ telle que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_M$. C'est à dire $\sigma(x) \in E_x$ pour tout $x \in M$. Une section locale au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ de E est une application $\sigma : U \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$.

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel (E, π, M) , noté $\Gamma(E)$, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ; C'est également un $C^\infty(M)$ -module ; La multiplication d'une section $\sigma \in \Gamma(E)$ par une fonction $f \in C^\infty(M)$ est donnée par

$$(f\sigma)(x) = f(x)\sigma(x) \quad , x \in M$$

Proposition 2.1.1. Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de type fibre $\mathbb{R}^k$, si (U, φ) est une carte vérifiant la condition de trivialisation locale, alors

1. pour tout $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \sigma_i^\varphi : U &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \sigma_i^\varphi(x) = \varphi_x^{-1}(e_i) \end{aligned}$$

est une section de classe C^∞

2. $(\sigma_1^\varphi, \dots, \sigma_k^\varphi)$ est une base locale des sections de E

où $(e_1, \dots, e_k)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

Inversement.

Si $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est une base de sections sur E définies sur un ouvert $U \subset M$, alors

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : U \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (x, y^1, \dots, y^k) &\longmapsto \sum_{i=1}^k y^i \sigma_i(x) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme tel que $(\pi^{-1}(U), \varphi)$ est une carte de trivialisation locale.

Exemples 2.1.1. *Un champ de vecteurs sur une variété différentiable M , est une section du fibré tangent associé TM .*

2.1.2 Isomorphisme de fibrés vectoriel.

Définition 2.1.3. *Soient (E^1, π_M, M) , (E^2, π_N, N) deux fibrés vectoriel. On appelle homomorphisme de fibré vectoriel, un couple (F, f) , d'applications de classe C^∞ tel que :*

1) *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ E^1 & \longrightarrow & E^2 \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \longrightarrow & N \\ & f & \end{array}$$

$$i.e : \pi_N \circ F = f \circ \pi_M$$

2) *Pour tout $x \in M$, $F_{/E_x^1} : E_x^1 \rightarrow E_x^2$ est une application linéaire.*

Définition 2.1.4. *Soient (E^1, π_M, M) , (E^2, π_N, N) deux fibrés vectoriels. Un isomorphisme de fibré vectoriel est un couple (F, f) , d'applications de classe C^∞ tel que :*

- 1) *F, f sont des difféomorphismes de variétés.*
- 2) *(F, f) et (F^{-1}, f^{-1}) sont des homomorphismes de fibrés vectoriels*

Définition 2.1.5. *Soient (E^1, π_M, M) , (E^2, π_N, N) deux fibrés vectoriels. On dit (E^1, π_M, M) est un sous fibré vectoriel de (E^2, π_N, N) si :*

- 1) *$E^1 \subset E^2$*
- 2) *(I_{E^1}, I_M) est un homomorphisme de fibré vectoriel. (où I_{E^1} désigne l'injection canonique de E^1 dans E^2) .*

2.1.3 Fibré dual d'un fibré vectoriel.

Définition 2.1.6. Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$. Nous définissons le fibré dual de E , noté E^* par

$$E^* = \bigcup_{x \in M} E_x^*$$

$$\begin{aligned} \pi^* : E^* &\longrightarrow M \\ \omega \in E_x^* &\longmapsto x \end{aligned}$$

(E^*, π^*, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$.

Carte de trivialisation locale

Si (U, φ) est une carte sur E vérifiant la condition de trivialisation locale, on pose

$$\begin{aligned} \varphi^* : (\pi^*)^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^k, \\ \omega \in E_x^* &\longmapsto (x, \omega(\varphi_x^{-1}(e_1)), \dots, \omega(\varphi_x^{-1}(e_k))) \end{aligned}$$

où $(e_1, \dots, e_k)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

Alors (U, φ^*) est une carte sur E^* vérifiant la condition de trivialisation locale.

2.1.4 Section sur le fibré vectoriel dual

Définition 2.1.7. Une section sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$ est une application, $\omega : M \longrightarrow E^*$ de classe C^∞ telle que $\pi^* \circ \omega = Id_M$ (c'est à dire $\omega(x) \in E_x^*$ pour tout $x \in M$).

Remarque 2.1.1. Une section ω sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) est de classe C^∞ si et seulement si pour toute carte (U, φ) vérifiant la condition de trivialisation locale sur E ; On a

$$\omega(\sigma_1), \dots, \omega(\sigma_k) \in C^\infty(U).$$

De la remarque (1.1.1) on déduit la proposition suivante :

Proposition 2.1.2. Toute section $\omega \in \Gamma(E^*)$ sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) définit une application $C^\infty(M)$ -linéaire

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma(E) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ \sigma &\longmapsto \omega(\sigma) \end{aligned}$$

telle que pour tout $x \in M$, on a $\omega(\sigma)(x) = \omega_x(\sigma(x))$ et réciproquement.

Exemple 2.1.3. Fibré cotangent.

Soient M une variété différentiable C^∞ de dimension n , $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$ (T_x^*M étant le dual de l'espace tangent T_xM) et

$$\begin{aligned} \pi^* : T^*M &\longrightarrow M \\ \omega \in T_x^*M &\longmapsto x \end{aligned}$$

la projection canonique.

Le triplet (T^*M, π, M) est un fibré vectoriel, de fibre type $\mathbb{R}^n$ et de carte de trivialisatation locale associée à $(U, \psi) \in \text{atl}(M)$ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : (\pi^*)^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n, \\ (y, \omega) &\longmapsto (y, \omega(\partial_1|_y), \dots, \omega(\partial_n|_y)) \end{aligned}$$

où $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ désigne la base des champs de vecteurs relative à la carte (V, ψ) .

(T^*M, π^*, M) est le fibré dual du fibré tangent (TM, π, M) , appelé fibré cotangent.

2.1.5 Produit tensoriel de fibré

Définition 2.1.8. Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement. Nous définissons le produit tensoriel de E et F , noté $E \otimes F$ par

$$E \otimes F = \bigcup_{x \in M} E_x \otimes F_x,$$

où, E_x (resp. F_x) la fibre au-dessus de x sur E (resp. sur F) et l'application π par

$$\begin{aligned} \pi : E \otimes F &\longrightarrow M \\ v \otimes w &\longmapsto \pi(v \otimes w) = \pi_E(v) = \pi_F(w) \end{aligned}$$

Alors $(E \otimes F, \pi, M)$ est un fibré vectoriel sur M de fibre type $\mathbb{R}^{k,l}$, appelé fibré produit tensoriel de (E, π_E, M) et (F, π_F, M) .

Carte de trivialisatation locale

Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes vérifiant la condition de trivialisatation locale sur E et F respectivement avec $U \cap V \neq \emptyset$, alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : \pi^{-1}(U \cap V) &\longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \\ v \otimes w \in E_x \otimes F_x &\longmapsto (x, \varphi_x(v) \otimes \psi_x(w)) \end{aligned}$$

définit une carte sur $E \otimes F$ vérifiant la condition de trivialisatation locale, où

$$\varphi_x = Pr_2 \circ \varphi|_{E_x}, \quad \psi_x = \tilde{Pr}_2 \circ \psi|_{F_x},$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \tilde{Pr}_2 : M \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

2.1.6 Section sur le fibré produit tensoriel.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement.

Une section sur le produit tensoriel $E \otimes F$ est une application,

$$T : M \longrightarrow E \otimes F$$

de classe C^∞ telle que $\pi \circ T = Id_M$ (i.e : $T(x) \in E_x \otimes F_x$ pour tout $x \in M$).

Soit (U, φ) (resp (V, ψ)) une carte vérifiant la condition de trivialisatation locale sur E (resp F) de base locale de sections $(\sigma_i^\varphi)_{i=1}^k$ (resp $(\sigma_j^\psi)_{j=1}^l$) .

Si $T \in \Gamma(E \otimes F)$ est une section sur le produit tensoriel $E \otimes F$ on a

$$T|_{U \cap V} = T^{ij} \sigma_i^\varphi \otimes \sigma_j^\psi ,$$

où T^{ij} sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur M pour tout $i = 1..k$ et $j = 1..l$.

Remarque 2.1.2. La Définition 2.1.8 peut être prolongé au produit tensoriel quelconque de fibrés :

$$\bigotimes_{i=1}^n E_i = E_1 \otimes \dots \otimes E_n.$$

Exemple 2.1.4. Soient M une variété différentiable, de dimension m et $x \in M$, on note :

$$\begin{aligned} T_x^{(p,q)} M &= \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-fois}} \otimes \underbrace{T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M}_{q\text{-fois}} . \\ T^{(p,q)} M &= \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p\text{-fois}} \otimes \underbrace{T^* M \otimes \dots \otimes T^* M}_{q\text{-fois}} \\ T^{(p,q)} M &= \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)} M \end{aligned} \quad (2.1)$$

$T^{(p,q)} M$ est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^{m^{p+q}}$. Si $\mathfrak{T}_p^q(M)$ désigne l'espace des sections sur le fibrés $T^{(p,q)} M$, on a alors :

$$\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M) \quad , \quad \mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}(M) \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}^*(M) .$$

Relativement à une carte $(U, x^i) \in \text{atl}(M)$, un champ de tenseur $T \in \mathfrak{T}_p^q(M)$ s'écrit en coordonnée locale

$$T = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} , \quad (2.2)$$

où, $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur U .

La formule (2.2) nous permet d'identifier $\mathfrak{T}_p^q(M)$ à l'espace $C^\infty(M)$ -module

$$\{ B : \bigotimes^q \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \bigotimes^p \mathfrak{X}(M) \mid C^\infty(M)\text{-}q \text{ linéaire} \} ,$$

où, $\bigotimes^s \mathfrak{X}(M) = \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \dots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-fois}}$ pour $s \geq 1$ et $\bigotimes^0 \mathfrak{X}(M) = C^\infty(M)$.

2.1.7 Fibré Somme de Whitney

Définition 2.1.9. Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement. Nous définissons la somme de Whitney de E et F , noté $E \oplus F$ par :

$$E \oplus F = \bigcup_{x \in M} E_x \times F_x,$$

où, E_x (resp. F_x) la fibre au-dessus de x sur E (resp. sur F) et l'application π par

$$\begin{aligned} \pi : E \oplus F &\longrightarrow M \\ (v, w) &\longmapsto \pi((v, w)) = \pi_E(v) = \pi_F(w) \end{aligned}$$

Alors $(E \oplus F, \pi, M)$ est un fibré vectoriel sur M de fibre type $\mathbb{R}^{k+l}$ et de dimension $m + k + l$, appelé Somme de Whitney de (E, π_E, M) et (F, π_F, M) .

Remarque 2.1.3.

$$E \oplus F = \{(u, v) \in E \times F; \quad \pi_E(u) = \pi_F(v)\}. \quad (2.3)$$

Exemple 2.1.5.

$$(M \times \mathbb{R}^p) \oplus (M \times \mathbb{R}^q) = M \times \mathbb{R}^{p+q}$$

Carte de trivialisation locale

Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes qui vérifient la condition de trivialisation locale sur E et F respectivement avec $U \cap V \neq \emptyset$, alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi : \pi^{-1}(U \cap V) &\longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, \\ (v, w) \in E_x \oplus F_x &\longmapsto (x, \varphi_x(v), \psi_x(w)) \end{aligned}$$

définit une carte sur $E \oplus F$ vérifiant la condition de trivialisation locale, où

$$\varphi_x = Pr_2 \circ \varphi|_{E_x}, \quad \psi_x = \tilde{P}r_2 \circ \psi|_{F_x},$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \tilde{P}r_2 : M \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

2.1.8 Section sur le fibré somme de Whitney.

Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement.

Définition 2.1.10. Une section sur le fibré somme de Whitney $E \oplus F$ est une application,

$$\begin{aligned} T : M &\longrightarrow E \oplus F \\ x &\longmapsto T(x) = (T_1(x), T_2(x)) \end{aligned}$$

de classe C^∞ telle que $\pi \circ T = Id_M$. On a :

- $\forall x \in M \quad T(x) \in E_x \oplus F_x$.
- $T = T_1 \oplus T_2$; $T_1 \in \Gamma(E)$ et $T_2 \in \Gamma(F)$

Soit (U, φ) (resp (V, ψ)) une carte vérifiant la condition de trivialisatıon locale sur E (resp F) de base locale de sections $(\sigma_i^\varphi)_{i=1}^k$ (resp $(\sigma_j^\psi)_{j=1}^l$) .

Si $T \in \Gamma(E \oplus F)$ est une section sur le fibré somme de Whitney $E \oplus F$ on a

$$\begin{aligned} T|_{U \cap V} &= (T_1^i \sigma_i^\varphi) \oplus (T_2^j \sigma_j^\psi) \\ &= (T_1^i \sigma_i^\varphi, T_2^j \sigma_j^\psi) \\ &= T_1^i(\sigma_i^\varphi, 0) + T_2^j(0, \sigma_j^\psi) \end{aligned}$$

où T_1^i et T_2^j sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur M pour tout $i = 1..k$ et $j = 1..l$.

Remarque 2.1.4. La définition 2.1.9 peut ˆtre prolongé a la somme quelconque de Whitney :

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i = E_1 \oplus \dots \oplus E_n.$$

2.1.9 Fibré inverse (Pull-back)

Définition 2.1.11. Soient M, N deux variétés différentiables, (F, π_N, N) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ sur N et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ .

On pose

$$\begin{aligned} E_x &= \{x\} \times F_{f(x)} = \{(x, v) \mid v \in F_{f(x)}\}, \quad x \in M \\ E &= \bigcup_{x \in M} E_x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow M \\ (x, v) &\longmapsto x \end{aligned} \tag{2.5}$$

la projection naturelle. Alors le triplet (E, π, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ sur M , appelé fibré inverse (Pull – back) ; On le note par $f^{-1}F$.

Carte de trivialisation locale

Si (W, ψ) est une carte sur F vérifiant la condition de trivialisation locale et U un ouvert de M tel que $f(U) \subset W$, on pose

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^k, \\ (x, v) &\longmapsto (x, \psi_{f(x)}(v)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Alors, (U, φ) est une carte sur E , vérifiant la condition de trivialisation locale. E est une variété de dimension égale à $\dim(M) + k$.

2.1.10 Section sur un fibré inverse

Une section sur un fibré inverse $(f^{-1}F, \pi, M)$ est une application $V : M \longrightarrow F$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in M$, $V_x \in F_{f(x)}$.

Si (W, ψ) est une carte sur F vérifiant la condition de trivialisation locale de base locale associés $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, et U un ouvert de M tel que $f(U) \subset W$, alors toute section $V \in \Gamma(f^{-1}F)$ s'écrit

$$V|_U = \sum_{i=1}^k V^i \cdot \sigma_i \circ f,$$

où $V^i \in C^\infty(U)$, pour tout $i = 1, \dots, k$.

2.2 Connexion linéaire sur un fibré vectoriel.

2.2.1 Connexion linéaire sur un fibré vectoriel.

Définition 2.2.1. Une connexion linéaire sur un fibré vectoriel (E, π, M) est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E), \\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_X(V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2. $\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V$
3. $\nabla_{X+fY}V = \nabla_X V + f\nabla_Y V$,

pour tout $V, W \in \Gamma(E)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$.

Définition 2.2.2. Une section $V \in \Gamma(E)$ est dite parallèle par rapport à la connexion ∇ si

$$\nabla_X V = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

2.2.2 Connexion induite sur le fibré dual

Définition 2.2.3. Soit ∇ une connexion linéaire sur un fibré vectoriel (E, π, M) , alors ∇ induit une connexion linéaire sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) ,

$$\nabla^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(E^*),$$

définie par,

$$(\nabla_X^* \omega)(V) = X(\omega(V)) - \omega(\nabla_X V),$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(E)$ et $\omega \in \Gamma(E^*)$. On vérifie aisément que ∇^* est une connexion linéaire sur E^* , on la note aussi par ∇ .

2.2.3 Connexion induite sur le produit tensoriel

Proposition 2.2.1. Soient ∇^E et ∇^F deux connexions linéaires sur (E, π_E, M) et (F, π_F, M) respectivement. Alors il existe une unique connexion,

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E \otimes F) \longrightarrow \Gamma(E \otimes F)$$

tel que

$$\nabla_X(V \otimes A) = (\nabla_X^E V) \otimes A + V \otimes (\nabla_X^F A),$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(E)$ et $A \in \Gamma(F)$.

∇ est appelé connexion tensoriel produit, notée $\nabla^E \otimes \nabla^F$.

Cas des formes vectorielles

Définition 2.2.4. Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement. Une 1-forme vectorielle ω est une application $C^\infty(M)$ -linéaire

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(F) \\ V &\longmapsto \omega(V) \end{aligned}$$

telle que pour tout $x \in M$

$$\begin{aligned} \omega_x : E_x &\longrightarrow F_x \\ V_x &\longmapsto \omega_x(V_x) = \omega(V)(x). \end{aligned}$$

est une application linéaire.

Expressions locales :

Soit $\omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$ une 1-forme vectorielle. Si (U, φ) (resp. (V, ψ)) est une carte vérifiant la condition de trivialisatation locale sur E (resp. sur F) de base locale $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ (resp. $(\rho_1, \dots, \rho_l)$) de $\Gamma(E)$ (resp. de $\Gamma(F)$) et $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$ une base dual locale de $\Gamma(E^*)$. Alors

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} \omega_i^j \sigma^i \otimes \rho_j,$$

où, ω_i^j sont des fonctions différentiables sur $U \cap V$ pour tout $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq l$.
Si de plus $V = V^i \sigma_i$, alors

$$\omega(V) = \omega_i^j V^i \rho_j.$$

Remarque 2.2.1. Si $\omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$, une 1-forme vectorielle, alors pour $X \in \Gamma(TM)$, $\nabla_X \omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$ est une 1-forme vectorielle définie par

$$(\nabla_X \omega)(V) = \nabla_X \omega(V) - \omega(\nabla_X V)$$

pour tout $V \in \Gamma(E)$.

Remarque 2.2.2. On général, soient (F, π, M) , (E_i, π_i, M) ($i = 1, \dots, p$) des fibrés vectoriels. Si $\omega \in \Gamma(E_1^* \otimes \dots \otimes E_p^* \otimes F)$, alors pour tout $(V_1, \dots, V_p) \in \Gamma(E_1) \times \dots \times \Gamma(E_p)$, on a

$$(\nabla_X \omega)(V_1, \dots, V_p) = \nabla_X \omega(V_1, \dots, V_p) - \sum_{j=1}^p \omega(V_1, \dots, \nabla_X^{E_j} V_j, \dots, V_p).$$

2.2.4 Connexion induite sur le fibré somme de Whitney

Proposition 2.2.2. Soient ∇^E et ∇^F deux connexions linéaire sur (E, π_E, M) et (F, π_F, M) respectivement. On définit alors une unique connexion sur $\Gamma(E \oplus F)$ par :

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E \oplus F) &\longrightarrow \Gamma(E \oplus F) \\ (X, T_1 \oplus T_2) &\mapsto \nabla_X T_1 \oplus T_2 = (\nabla_X^E T_1) \oplus (\nabla_X^F T_2) \\ &= (\nabla_X^E T_1, \nabla_X^F T_2) \end{aligned}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, $T_1 \in \Gamma(E)$ et $T_2 \in \Gamma(F)$.

∇ est appelé connexion somme, notée $\nabla^E \oplus \nabla^F$.

2.2.5 Connexion induite sur le fibré inverse

Soient M et N deux variétés différentiables, (F, π_N, N) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ sur N et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ . Si ∇^N est une connexion linéaire sur (F, π_N, N) , on définit la connexion sur le fibré inverse (Pull-back) $f^{-1}F$,

$$\nabla^f : \Gamma(TM) \times \Gamma(f^{-1}F) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}F),$$

par

$$(\nabla_X^f V)_x = (\nabla_{d_x f(X_x)}^N \tilde{V})_{f(x)} \quad (2.7)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(f^{-1}F)$, $x \in M$ et $\tilde{V} \in \Gamma(F)$ tel que $\tilde{V} \circ f = V$ au voisinage de x .

Remarque 2.2.3. La relation (1.8) est indépendante du choix de $\tilde{V}$. En effet, soient $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ une base locale de $\Gamma(TM)$, $(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n})$ une base locale de $\Gamma(TN)$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ base locale de

$\Gamma(F)$,

pour $X = X^i \partial_i \in \Gamma(TM)$, $V = V^\beta (\sigma_\beta \circ f) \in f^{-1}F$, $\tilde{V} = \tilde{V}^\beta \sigma_\beta \in \Gamma(F)$ et $x \in M$ on a

$$\begin{aligned} (\nabla_X^f V)_x &= (\nabla_{d_x f(X_x)}^N \tilde{V})_{f(x)} \\ &= X_x^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \Big|_x (\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^N \tilde{V}^\beta \sigma_\beta)_{f(x)} \\ &= X_x^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \Big|_x \left\{ \frac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha} \sigma_\beta + \tilde{V}^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \sigma_\gamma \right\} \Big|_{f(x)}, \end{aligned}$$

où, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ sont des fonctions différentiables sur N , définie par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \sigma_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \sigma_\gamma$$

Remarquons que $\tilde{V}_{f(x)}^\beta = V_x^\beta$ et $\frac{\partial V^\beta}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{\partial}{\partial x^i} (\tilde{V}^\beta \circ f) \Big|_x = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \Big|_x \frac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha} \Big|_{f(x)}$, pour tout $\beta = 1, \dots, k$, d'où

$$(\nabla_X^f V) = X^i \left(\frac{\partial V^\gamma}{\partial x^i} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} V^\beta (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ f) \right) (\sigma_\gamma \circ f), \quad (2.8)$$

2.3 Métrique sur un fibré vectoriel

2.3.1 Métrique sur un fibré vectoriel.

Définition 2.3.1. Une métrique g sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$ est une application,

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$C^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive.

Remarques 2.3.1. Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$, pour tout $V, W \in \Gamma(E)$, on a :

1. - $g(V, W) = g(W, V)$. (symétrique)
 - $g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$. (non dégénérée)
 - $g(V, V) \geq 0$. (définie positive)
2. $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$
 Si (U, φ) est une carte sur E vérifiant la condition de trivialisatation locale de base associé $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ et de base dual associé $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$, alors

$$g = \sum_{i,j=1}^k g_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j,$$

où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appelé composantes du tenseur métrique relativement à la carte (U, φ) .

Si $V = V^i \sigma_i$ et $W = W^j \sigma_j$ on a

$$g(V, W) = g_{ij} V^i W^j$$

3. Pour tout $x \in M$ on a

$$g_x : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où E_x la fibre au-dessus de x .

Définition 2.3.2. Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) et ∇ une connexion sur (E, π, M) , la métrique g est dite compatible avec la connexion ∇ si

$$\tilde{\nabla}g = 0 \quad (2.9)$$

où $\tilde{\nabla}$ est la connexion induite sur $E^* \otimes E^*$

La relation 2.9 est équivalente à

$$X(g(\sigma_1, \sigma_1)) = g(\nabla_X \sigma_1, \sigma_2) + g(\sigma_1, \nabla_X \sigma_2) \quad (2.10)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$.

Définition 2.3.3. Image inverse d'une métrique

Soient (E_1, π_1, M) , (E_2, π_2, N) deux fibrés vectoriels et $(F, f) : (E_1, \pi_1, M) \rightarrow (E_2, \pi_2, N)$ un homomorphisme injective de fibré vectoriel. Si h est une métrique sur (E_2, π_2, N) Alors

$$F^*h : \Gamma(E_1) \times \Gamma(E_1) \longrightarrow C^\infty(M)$$

définie pour tout $X, Y \in \Gamma(E_1)$ et $x \in M$ par

$$F^*h(X, Y)_x = h_{f(x)}(F_x(X_x), F_x(Y_x)),$$

est une métrique sur (E_1, π_1, M) , appelée métrique inverse

Expression locale de la métrique F^*h

Soient (U, φ) une carte de trivialisatation locale (E_1, π_1, M) de base de sections associées $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ et (V, ψ) une carte de trivialisatation locale (E_2, π_2, N) de base de sections associées $(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_m)$, alors

$$\begin{aligned} (F^*h)_{ij} &= F^*h(\sigma_i, \sigma_j) \\ &= h(F(\sigma_i), F(\sigma_j)) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n F_i^\alpha F_j^\beta h(\bar{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\beta) \circ f \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n F_i^\alpha F_j^\beta h_{\alpha\beta} \circ f. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Définition 2.3.4. Étant donnée une métrique g sur un fibré vectoriel (E, π, M) , on définit la longueur $\|V\|_g$ d'une section $V \in \Gamma(E)$ par

$$\|V\|_g = \sqrt{g(V, V)}$$

En coordonnées locales, si $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est une base locale de $\Gamma(E)$, $g_{ij} = g(\sigma_i, \sigma_j)$ et $V = V^i \sigma_i$ alors,

$$\|V\|_g^2 = g_{ij} V^i V^j$$

Proposition 2.3.1. Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$. L'application,

$$\sharp : \Gamma(E^*) \longrightarrow \Gamma(E),$$

définie par,

$$g(\sharp\omega, V) = \omega(V),$$

pour tout $\omega \in \Gamma(E^*)$ et $V \in \Gamma(E)$, est un isomorphisme $C^\infty(M)$ -linéaire.

Lemme 2.3.1. Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$. Pour tout $x \in M$ la métrique g induit un isomorphisme linéaire entre E_x^* et E_x

$$\sharp_x : E_x^* \longrightarrow E_x,$$

défini par,

$$g_x(\sharp_x \omega, v) = \omega(v),$$

pour tout $\omega \in E_x^*$ et $v \in E_x$.

Remarque 2.3.1. Soit $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ une base locale de $\Gamma(E)$ et $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$ une base locale du dual $\Gamma(E^*)$. Si $\omega = \omega_i \sigma^i$ et $g = g_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j$ on a

$$\sharp\omega = g^{ij} \omega_i \sigma_j$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij}) .

2.3.2 Métrique induite sur le fibré dual

Définition 2.3.5. Soit g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$. Alors g induit une métrique sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) ,

$$g^* : \Gamma(E^*) \times \Gamma(E^*) \longrightarrow C^\infty(M),$$

définie par,

$$g^*(\omega, \eta) = g(\sharp\omega, \sharp\eta),$$

pour tout $\omega, \eta \in \Gamma(E^*)$.

Expression locale de la métrique g^*

Soient $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ une base locale de $\Gamma(E)$ et $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$ la base duale locale de $\Gamma(E^*)$ associée, alors pour $\omega, \eta \in \Gamma(E^*)$ tels que $\omega = \omega^i \sigma^i$ et $\eta = \eta^j \sigma^j$ on a

$$g^* = \sum_{ij} g^{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j,$$

$$g^*(\omega, \eta) = \sum_{ij} g^{ij} \omega^i \eta^j$$

avec (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) ,

2.3.3 Métrique induite sur le produit tensoriel

Définition 2.3.6. Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M) , on définit la métrique produit tensoriel

$$g \otimes h : \Gamma(E \otimes F) \times \Gamma(E \otimes F) \longrightarrow C^\infty(M),$$

comme étant l'unique métrique vérifiant,

$$(g \otimes h)(V \otimes A, W \otimes B) = g(V, W)h(A, B)$$

pour tout $V, W \in \Gamma(E)$ et $A, B \in \Gamma(F)$.

Remarque 2.3.2. Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M) , alors

$$g \otimes h \in \Gamma(E^* \otimes F^* \otimes E^* \otimes F^*) \simeq \Gamma(E^* \otimes E^* \otimes F^* \otimes F^*).$$

Proposition 2.3.2. Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels muni respectivement des connexions ∇^E et ∇^F , et des métriques g_E et g_F . Si ∇^E (resp. ∇^F) est compatible avec la métrique g_E (resp. g_F), alors la connexion $\nabla^E \otimes \nabla^F$ et la métrique $g_E \otimes g_F$ induites sur le produit tensoriel $E \otimes F$ sont compatibles.

Preuve : Pour tout $V, W \in \Gamma(E)$ et $A, B \in \Gamma(F)$ on a,

$$\begin{aligned} X(g_E \otimes g_F(V \otimes A, W \otimes B)) &= X(g_E(V, W)g_F(A, B)) \\ &= X(g_E(V, W))g_F(A, B) + g_E(V, W)X(g_F(A, B)) \\ &= [g_E(\nabla_X^E V, W) + g_E(V, \nabla_X^E W)]g_F(A, B) \\ &\quad + g_E(V, W)[g_F(\nabla_X^F A, B) + g_F(A, \nabla_X^F B)] \\ &= g_E \otimes g_F(\nabla_X^E V \otimes A, W \otimes B) + g_E \otimes g_F(V \otimes A, \nabla_X^E W \otimes B) \\ &\quad + g_E \otimes g_F(V \otimes \nabla_X^F A, W \otimes B) + g_E \otimes g_F(V \otimes A, W \otimes \nabla_X^F B) \\ &= g_E \otimes g_F(\nabla_X(V \otimes A), W \otimes B) + g_E \otimes g_F(V \otimes A, \nabla_X(W \otimes B)). \end{aligned}$$

■

2.3.4 Métrique induite sur le fibré somme de Whitney

Définition 2.3.7. Soient g une métrique sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M) , on définit la métrique somme par :

$$\begin{aligned} g \oplus h : (E_x \oplus F_x) \times (E_x \oplus F_x) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &\longmapsto g(u_1, u_2) + h(v_1, v_2) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} g \oplus h : \Gamma(E \oplus F) \times \Gamma(E \oplus F) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (T_1 \oplus T_2, \sigma_1 \oplus \sigma_2) &\longmapsto g(T_1, \sigma_1) + h(T_2, \sigma_2) \end{aligned}$$

Proposition 2.3.3. Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels muni respectivement des connexions ∇^E et ∇^F , et des métriques g_E et g_F . Si ∇^E (resp. ∇^F) est compatible avec la métrique g_E (resp. g_F), alors la connexion $\nabla^E \oplus \nabla^F$ et la métrique $g_E \oplus g_F$ induites sur le fibré somme de Whitney $E \oplus F$ sont compatibles.

2.3.5 Métrique induite sur le fibré inverse

Définition 2.3.8. Soient M et N deux variétés différentiables, (F, π_N, N) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ sur N et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ .

Si h est une métrique sur le fibré vectoriel (F, π_N, N) , alors h induit une métrique sur $f^{-1}F$,

$$h_f : \Gamma(f^{-1}F) \times \Gamma(f^{-1}F) \longrightarrow C^\infty(M),$$

définie par,

$$h_f(V, W)_x = h_{f(x)}(V_x, W_x),$$

pour tout $x \in M$ et $V, W \in \Gamma(f^{-1}F)$.

Norme de Hilbert Schmidt.

Soient g une métrique Riemannienne sur un fibré vectoriel (E, π_E, M) et h une métrique sur un fibré vectoriel (F, π_F, M) ; On définit la *norme de Hilbert Shmidt* $\omega \in \Gamma(E^* \otimes F)$ ($\omega : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ une forme vectorielle), par

$$|\omega|^2 = (g^* \otimes h)(\omega, \omega).$$

En coordonnées locales relativement à $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ base de $\Gamma(E^*)$, $(\sigma^1, \dots, \sigma^k)$ base de $\Gamma(E^*)$, $(\rho_1, \dots, \rho_k)$ base de $\Gamma(F)$ et $(\rho^1, \dots, \rho^k)$ base de $\Gamma(F^*)$ on a :

$$|\omega|^2 = g^{ij} \omega_i^a \omega_j^b h_{ab}.$$

où, $\omega = \omega_i^a \sigma^i \otimes \rho_a$, $g = g_{ij} \sigma^i \otimes \sigma^j$ et $h = h_{ab} \rho^a \otimes \rho^b$.

Exemple 2.3.1. Si $E = F = TM$ et $\phi : M \longrightarrow M$ de classe C^∞ , on a

$$d\phi : TM \longrightarrow TM$$

est une 1-forme vectorielle, définie en coordonnées locales par

$$d\phi = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx^j \otimes \partial_i.$$

et de norme

$$\begin{aligned} |d\phi|^2 &= (g^* \otimes g) \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} dx^i \otimes \partial_s, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} dx^j \otimes \partial_k \right) \\ &= \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} g^*(dx^i, dx^j) g(\partial_s, \partial_k) \\ &= \frac{\partial \phi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} g^{ij} g_{sk} \end{aligned}$$

2.3.6 Inégalité de Young

Proposition 2.3.4. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout champ de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$ et tout $\epsilon > 0$, on a l'inégalité de Young :*

$$2|\langle X, Y \rangle| = |g(X, Y)| \leq \frac{1}{\epsilon} \|X\|^2 + \epsilon \|Y\|^2 \quad (2.12)$$

Preuve : Pour $\epsilon > 0$, on a :

$$|X \pm \epsilon Y|^2 = |X|^2 + \epsilon^2 |Y|^2 \pm 2\epsilon \langle X, Y \rangle \geq 0$$

d'où la formule (2.12). ■

2.3.7 Inégalité de Kato

Proposition 2.3.5. *(version 1)*

Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout champ de vecteurs $\xi \in \Gamma(TM)$, on a l'inégalité de Kato :

$$|d|\xi|| \leq |\nabla \xi| \quad (2.13)$$

où $|\nabla \xi|^2 = \langle \nabla \xi, \nabla \xi \rangle = \sum_i g(\nabla_{e_i} \xi, \nabla_{e_i} \xi)$ relativement à une base orthonormée $(e_i)_i$.

Preuve : On a :

$$|d|\xi|^2| = 2|\xi||d|\xi|| \quad (2.14)$$

$$d|\xi|^2 = \sum_i e_i(|\xi|^2) e_i^* \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} |d|\xi|^2|^2 &= \sum_i |e_i(|\xi|^2)|^2 \\ &= \sum_i |e_i(g(\xi, \xi))|^2 \\ &= \sum_i |2g(\nabla_{e_i} \xi, \xi)|^2 \\ &\leq 4 \sum_i |\nabla_{e_i} \xi|^2 |\xi|^2 \quad (\text{inégalité de Schwarz}) \\ &\leq 4|\xi|^2 \sum_i g(\nabla_{e_i} \xi, \nabla_{e_i} \xi) \\ &\leq 4|\xi|^2 |\nabla \xi|^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Des formules (2.14) et (2.16), on obtient l'inégalité (2.13). ■

Proposition 2.3.6. *(version 2)*

Soient (M^m, g) et (N^n, h) des variétés Riemanniennes. Si $\varphi : M \rightarrow N$ est une application de classe C^∞ , alors on a l'inégalité de Kato :

$$|\text{grad}_M d\varphi| = |d|d\varphi|| \leq |\nabla \varphi| \quad (2.17)$$

où $|\nabla d\varphi|^2 = \sum_{i,j=1}^m h(\nabla d\varphi(e_i, e_j), \nabla d\varphi(e_i, e_j))$ et $|d\varphi|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))$, relativement à une base orthonormée $\{e_i\}_i$.

Preuve : Soit $x \in M$ et $\{e_i\}_i$ une base orthonormée telle que $(\nabla_{e_i} e_j)_x = 0$, $1 \leq i, j \leq m$,
On a :

$$|df| = |\text{grad}_M f| = |\sharp df| \quad (\forall f \in C^\infty(M)) \quad (\text{voir la Définition 1.4.1}) \quad (2.18)$$

$$|d|d\varphi|^2| = 2|d\varphi||d|d\varphi|| \quad (2.19)$$

$$d|d\varphi|^2 = \sum_i e_i(|d\varphi|^2)e_i^* \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} |d|d\varphi|^2|^2 &= \sum_i |e_i(|d\varphi|^2)|^2 \\ &= \sum_i |e_i(\sum_j h(d\varphi(e_j), d\varphi(e_j)))|^2 \\ &= \sum_i |2(\sum_j h(\nabla_{e_i} d\varphi(e_j), d\varphi(e_j)))|^2 \\ &\leq 4 \sum_i \left(\sum_j h(\nabla_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla_{e_i} d\varphi(e_j)) h(d\varphi(e_j), d\varphi(e_j)) \right)^2 \quad (\text{inégalité de Schwarz}) \\ &\leq 4 \sum_i \left(\sum_j h(\nabla_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla_{e_i} d\varphi(e_j)) \right)^2 \text{Big} \left(\sum_j h(d\varphi(e_j), d\varphi(e_j)) \right)^2 \\ &\leq 4 \left(\sum_i \sum_j h(\nabla_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla_{e_i} d\varphi(e_j)) \right)^2 \text{Big} \left(\sum_j h(d\varphi(e_j), d\varphi(e_j)) \right)^2 \\ &\leq 4|\nabla d\varphi|^2 |d\varphi|^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Des formules (2.18), (2.19) et (2.21), on obtient l'inégalité (2.17). ■

Chapitre 3

Introduction à la géométrie harmonique

3.1 Le fibré tangent inverse

3.1.1 Le fibré tangent inverse

(voir la sous-section 2.1.11 et la sous-section 2.2.5)

Soient M, N deux variétés différentiables et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ . Si ∇^N est une connexion linéaire sur le fibré tangent (TN, π_N, N) , alors le fibré tangent inverse est défini par

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}TN &= \{ (x, v) \mid x \in M, v \in T_{\varphi(x)}N \} \\ &= \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_{\varphi(x)}N,\end{aligned}$$

et

$$\Gamma(\varphi^{-1}TN) = \{ V : M \longrightarrow TN, \quad \forall x \in M, V_x \in T_{\varphi(x)}N \}$$

Localement pour tout $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ et $\varphi^\beta = y^\beta \circ \varphi$, on a

$$d\varphi(X) = X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

et

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \varphi \right\} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi$$

En effet

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \\ &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \\ &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^N \frac{\partial}{\partial y^\beta}) \circ \varphi \\ &= \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \varphi \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi. \quad \square\end{aligned}$$

Remarque 3.1.1. Soient M, N deux variétés différentiables, $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(TN)$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable ; Si X et V (resp. Y et W) sont φ -conjugué i.e.

$$d\varphi(X) = V \circ \varphi \quad \text{et} \quad d\varphi(Y) = W \circ \varphi,$$

alors

$$\nabla_X^\varphi d\varphi(Y) = (\nabla_V^N W) \circ \varphi.$$

Proposition 3.1.1. Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Si ∇^N une connexion linéaire compatible avec une métrique h sur N , alors la connexion linéaire ∇^φ est compatible avec la métrique h_φ sur $\varphi^{-1}TN$. C'est à dire, pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ on a

$$X(h_\varphi(V, W)) = h_\varphi(\nabla_X^\varphi V, W) + h_\varphi(V, \nabla_X^\varphi W).$$

Preuve : Soient $X \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ et $\tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \Gamma(TN)$, tels que

$$d\varphi(X) = \tilde{X} \circ \varphi, \quad \tilde{V} \circ \varphi = V \quad \text{et} \quad \tilde{W} \circ \varphi = W$$

alors,

$$\begin{aligned} X(h_\varphi(V, W)) &= X(h(\tilde{V}, \tilde{W}) \circ \varphi) \\ &= \tilde{X}(h(\tilde{V}, \tilde{W})) \circ \varphi \\ &= h(\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{V}, \tilde{W}) \circ \varphi + h(\tilde{V}, \nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{W}) \circ \varphi \\ &= h_\varphi(\nabla_X^\varphi V, W) + h_\varphi(V, \nabla_X^\varphi W). \end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.2. Soit ∇^N une connexion sans torsion sur N , alors

$$\nabla_X^\varphi d\varphi(Y) = \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) + d\varphi([X, Y]),$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve : Soit $V, W \in \Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs φ -conjugué avec X et Y respectivement . On a

$$\begin{aligned} [V, W] \circ \varphi &= d\varphi \circ [X, Y] \\ \nabla_V^N W &= \nabla_W^N V + [V, W] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) &= (\nabla_V^N W) \circ \varphi \\ &= (\nabla_W^N V + [V, W]) \circ \varphi \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) + d\varphi([X, Y]) \end{aligned}$$

■

3.1.2 Seconde forme fondamentale

Définition 3.1.1. Soient (M, g) , (N, h) deux variétés Riemannienne et $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application différentiable de classe C^∞ . La seconde forme fondamentale de l'application φ est la dérivée covariante de la 1-forme vectoriel $d\varphi$, définie par

$$\nabla d\varphi(X, Y) = \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Propriété 3.1.1. Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application différentiable. Alors la seconde forme fondamentale de l'application φ est une forme vectoriel $C^\infty(M)$ -bilinéaire symétrique. C'est à dire :

$$\begin{aligned} (\nabla d\varphi)(\alpha.X, \beta.Y) &= \alpha\beta(\nabla d\varphi)(X, Y) \\ (\nabla d\varphi)(X, Y) &= (\nabla d\varphi)(Y, X) \end{aligned}$$

pour tout $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve :

• On a :

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi(\alpha.X, \beta.Y) &= \nabla_{\alpha.X}^\varphi d\varphi(\beta.Y) - d\varphi(\nabla_{\alpha.X}^M \beta.Y) \\ &= \alpha \nabla_X^\varphi \beta.d\varphi(Y) - d\varphi(\alpha.\nabla_X^M \beta.Y) \\ &= \alpha\beta \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) + \alpha.X(\beta)d\varphi(Y) - d\varphi(\alpha\beta \nabla_X^M Y + \alpha.X(\beta)Y) \\ &= \alpha\beta[\nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y)] \end{aligned}$$

• En utilisant la Proposition 3.1.2 on a :

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi(X, Y) &= \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) + d\varphi([X, Y]) - d\varphi(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_Y^\varphi d\varphi(X) - d\varphi(\nabla_Y^M X) \\ &= \nabla d\varphi(Y, X), \end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.3. Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors

$$\nabla d(\psi \circ \varphi) = d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi).$$

Preuve : Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} \nabla d(\psi \circ \varphi)(X, Y) &= \nabla_X^{\psi \circ \varphi} d(\psi \circ \varphi)(Y) - d(\psi \circ \varphi)(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla_X^{\psi \circ \varphi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla_{d\psi(d\varphi(X))}^P d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla_{d\psi(d\varphi(X))}^\psi d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla_{d\varphi(X)}^N d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y)) \\ &= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X, Y)). \end{aligned}$$

■

Définition 3.1.2. Soient (M, g) et (N, h) des variétés Riemanniennes. Une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est dite totalement géodésique si $\nabla d\varphi = 0$.

Remarque 3.1.2. $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est totalement géodésique si et seulement si pour toute géodésique $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ alors la courbe $\varphi \circ \gamma$ est une géodésique sur la variété N , i.e :

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^M \dot{\gamma} = 0, \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\dot{\varphi \circ \gamma}}^N \dot{\varphi \circ \gamma} = 0$$

Définition 3.1.3. Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ . La trace de la seconde forme fondamentale de l'application φ est appelé champ de tension de l'application φ , noté par

$$\tau(\varphi) = \text{tr}_g \nabla d\varphi. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.3. Relativement à une base orthonormée (e_i) sur M on a

$$\tau(\varphi) = \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i),$$

Si $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ (resp $(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})$) est une base locale de champs de vecteurs sur M (resp sur N), on a :

1)

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= g^{ij} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - d\varphi\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^M \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^N \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^M \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\tau(\varphi)^\gamma = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^N \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^M \right). \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} (\nabla d\varphi)_{ij} &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - d\varphi\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^M \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^N \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^M \right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$(\nabla d\varphi)_{ij}^\gamma = \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^N \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^M \quad (3.5)$$

Proposition 3.1.4. Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + \text{tr}_g \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi). \quad (3.6)$$

3.1.3 Cas des sous-variétés

Soient (N, h) une variété Riemannienne et M une sous-variété de N . Alors le champ de tenseur $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$ défini pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $p \in M$ par

$$g(X, Y)_p = h_p(X_p, Y_p),$$

est une métrique Riemannienne sur M , appelé la métrique induite sur M par h .

Pour tout $p \in M$ on a

$$T_p N = T_p M \oplus T_p M^\perp,$$

où,

$$T_p M^\perp = \{v \in T_p N \mid h_p(v, w) = 0, \forall w \in T_p M\}$$

$$\forall v \in T_p N \quad \exists! v^\top \in T_p M \quad \exists! v^\perp \in T_p M^\perp \quad | \quad v = v^\top + v^\perp.$$

Remarque 3.1.4. Soient $X \in \Gamma(TM)$ et $\tilde{X} \in \Gamma(TN)$ un prolongement de X (i.e. $\tilde{X}|_M = X$). Si ∇^N (resp ∇^M) désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique h sur N (resp sur M), alors

$$\nabla_X^M Y = (\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\top, \quad X, Y \in \Gamma(TM),$$

est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g sur M , qui indépendant de choix de prolongement.

La deuxième forme fondamentale de M sur N est donnée par

$$B(X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\perp, \quad X, Y \in \Gamma(TM),$$

et la courbure moyenne est donnée par

$$H = \text{trace } B.$$

Définition 3.1.4. Une sous variété M d'une variété N est dite minimale si sa courbure moyenne est nulle ($H = 0$).

Remarques 3.1.1. .

1) Soit $i : M \hookrightarrow N$ l'injection canonique, alors la deuxième forme fondamentale de i coïncide avec la deuxième forme fondamentale de M sur N , c'est à dire

$$\nabla di(X, Y) = B(X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\perp \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$

2) Soit $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^\perp)$, on a

$$g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N}) = -g(\tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}}^N \mathcal{N}) \quad X, Y \in \Gamma(TM). \quad (3.7)$$

3) Dans le cas où M est une hyper-surface de N et $\mathcal{N} \in \Gamma(TM^\perp)$, on a

$$\nabla di(X, Y) = g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N}) \mathcal{N}.$$

En effet, pour prouver (2), soit $p \in M$ on a

$$\begin{aligned} g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N}) &= g((\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\perp, \mathcal{N}) \\ &= g(\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y}, \mathcal{N}) - g((\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\top, \mathcal{N}) \\ &= g(\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y}, \mathcal{N}) \\ &= \tilde{X}(g(\tilde{Y}, \mathcal{N})) - g(\tilde{Y}, \nabla_{\tilde{X}}^N \mathcal{N}), \end{aligned}$$

Si $(\varphi_t(p))_t$ est une courbe sur M , définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, telle que $\tilde{X}_p = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(p)|_{t=0}$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{X}_p(g(\tilde{Y}, \mathcal{N})) &= \frac{d}{dt} g(\tilde{Y}, \mathcal{N}) \circ \varphi_t(p)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} g_{\varphi_t(p)}(\tilde{Y}_{\varphi_t(p)}, \mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} h_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}, \mathcal{N}_{\varphi_t(p)})|_{t=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(3) découle immédiatement de (1) et (2).

Exemple 3.1.1. Si $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ désigne la sphère unité et $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ le champ de vecteur normal à la sphère, alors

$$\nabla di(X, Y)_p = -g(X, Y)_p \mathcal{N}_p \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad , \forall p \in M. \quad (3.8)$$

$$g(\nabla di(X, Y), \mathcal{N})_p = -g(X, Y)_p \quad X, Y \in \Gamma(TM) \quad , \forall p \in M,$$

en effet, ceci découle de la formule 3.7 et de la relation

$$\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{N} = \tilde{X}, \quad \forall \tilde{X} \in \Gamma(T\mathbb{R}^{n+1}).$$

Définition 3.1.5. Troisième forme fondamentale

Soit $\varphi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La troisième forme fondamentale de φ est la dérivée covariante de $\nabla d\varphi$, elle est définie par :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla_X(\nabla d\varphi(Y, Z)) - \nabla d\varphi(\nabla_X Y, Z) - \nabla d\varphi(Y, \nabla_X Z), \quad (3.9)$$

où $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

Proposition 3.1.5. Contrairement à la seconde forme fondamentale, la troisième forme fondamentale n'est pas symétrique, nous avons :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) + d\varphi(R^M(Z, X)Y) - R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y). \quad (3.10)$$

Preuve :

par définition nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) - \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) &= \nabla_X(\nabla d\varphi(Y, Z)) - \nabla d\varphi(\nabla_X Y, Z) - \nabla d\varphi(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - \nabla_Z(\nabla d\varphi(X, Y)) + \nabla d\varphi(\nabla_Z Y, X) + \nabla d\varphi(Y, \nabla_Z X), \end{aligned}$$

en utilisant la deuxième forme fondamentale, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) - \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) &= \nabla_X(\nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_Z X)) - \nabla_Z^\varphi d\varphi(\nabla_X Y) \\ &\quad + d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y) \\ &\quad - \nabla_Z(\nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X Y)) + \nabla_X^\varphi d\varphi(\nabla_Z Y) \\ &\quad - d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) + \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y), \end{aligned}$$

il suit que :

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_X^\varphi d\varphi(\nabla_Z Y) - \nabla_Z^\varphi d\varphi(\nabla_X Y) \\
&+ d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y) \\
&- d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) + \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y) \\
&- \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) + d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y) - \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y) \\
&+ d\varphi(\nabla_{\nabla_X Z} Y) - \nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X \nabla_Z Y) \\
&+ \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_{\nabla_Z X} Y) \\
&= d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{\nabla_X Z} Y \\
&- \nabla_X \nabla_Z Y) - (\nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) \\
&+ \nabla_{\nabla_X Z}^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_{\nabla_Z X}^\varphi d\varphi(Y)),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&= d\varphi(\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]} Y) - (\nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) \\
&- \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_{[Z,X]}^\varphi d\varphi(Y)).
\end{aligned}$$

Du fait que :

$$\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]} Y = R^M(Z, X)Y,$$

et :

$$\begin{aligned}
&\nabla_Z^\varphi \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_X^\varphi \nabla_Z^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_{[Z,X]}^\varphi d\varphi(Y) = R^\varphi(Z, X)d\varphi(Y) \\
&= R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y),
\end{aligned}$$

nous obtenons le résultat :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) + d\varphi(R^M(Z, X)Y) - R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y).$$

3.2 Equations d'Euler-Lagrange

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le lagrangien sur U est une fonction de classe C^∞ :

$$L : (x, y, t) \in U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \longrightarrow L(x, y, t) \in \mathbb{R}.$$

Etant donné deux points $x_1, x_2 \in U$, le problème variationnel associé consiste à chercher les courbes $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$ tracées dans U , telles que $\varphi(t_1) = x_1$ et $\varphi(t_2) = x_2$, qui minimisent la fonctionnelle énergie :

$$E(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\right) dt. \quad (3.11)$$

Pour caractériser la fonction $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$, on considère la variation $\varphi_s(t) = \varphi(t) + s v(t)$ où $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ et $v(t)$ une fonction non nulle, sauf aux bornes t_1 et t_2 , on alors :

$$v(t_1) = v(t_2) = 0 \quad , \quad \varphi_s(t_1) = \varphi(t_1) = x_1 \quad \text{et} \quad \varphi_s(t_2) = \varphi(t_2) = x_2.$$

Théorème 3.2.1.

$$\left. \frac{d}{ds} E(\varphi_s) \right|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

où $\langle, \rangle_{\mathbb{R}^n}$ désigne le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial L}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x^n} \right) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \left(\frac{\partial L}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial y^n} \right)$$

Démonstration. Soit $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par :

$$\phi(s, t) = \varphi_s(t) = \varphi(t) + s v(t). \quad (3.12)$$

D'après (3.11) et (3.12), on a :

$$\left. \frac{d}{ds} E(\varphi_s) \right|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{\partial}{\partial s} L \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right) \right|_{s=0} dt. \quad (3.13)$$

comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} L \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial L}{\partial x^i} \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial t} \right)(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i} \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial t} \right)(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i} \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial s} \right)(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i} \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i} \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \left(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.15)$$

d'après les formules (3.12), (3.13), (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} E(\varphi_s) \right|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad + \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial y} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

comme $v(t_1) = v(t_2) = 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\varphi_s) \Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.2. *La courbe $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$ est un point critique pour la fonctionnelle énergie $E(\varphi)$ si et seulement si :*

$$\frac{\partial L}{\partial x} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \left(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t \right) \right) = 0. \quad (3.16)$$

Ce système de n équations différentielles du second ordre s'appelle système d'équations d'Euler-Lagrange.

Exemple 3.2.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $L : U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$L(x, y, t) = \frac{y^2}{2},$$

ici le lagrangien représente l'énergie cinétique.

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dt$$

le système (3.16) est réduit à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

les solutions des équations d'Euler Lagrange sont les droites affine (géodésiques) :

$$\varphi(t) = a t + b, \quad a, b \in \mathbb{R}^n.$$

3.3 Applications harmoniques

3.3.1 Applications harmoniques

Définition 3.3.1. Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemannienne de dimensions m et n respectivement. On appelle la densité de φ l'application

$$e(\varphi) : M \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

définie pour tout $x \in M$ par

$$e(\varphi)(x) = \frac{1}{2} |d_x \varphi|^2,$$

où $|d_x \varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d_x \varphi$ de φ au point x . Si $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est une base orthonormée de $T_x M$, on a

$$\begin{aligned} |d_x \varphi|^2 &= \text{tr}_g \varphi^* h \\ &= \sum_{i=1}^m h(d_x \varphi(e_i), d_x \varphi(e_i)) \end{aligned}$$

Si $\{x^i\}_{1 \leq i \leq m}$ et $\{y^\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq n}$ sont les coordonnées locale autour de $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$ respectivement, alors

$$|d_x \varphi|^2 = g_x^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \Big|_x \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \Big|_x h_{\alpha\beta}(\varphi(x))$$

L'énergie de l'application φ sur un domaine compact D dans M est définie par

$$E(\varphi, D) = \int_D e(\varphi) v_g = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 v_g$$

Une variation de l'application φ est une application de classe C^∞ ,

$$\begin{aligned} \phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow N, \quad \epsilon > 0 \\ (x, t) &\longmapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

telle que (φ_t) est une famille des applications de classe C^∞ sur M , et $\varphi_0 = \varphi$. Soit $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ définie par

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) \Big|_{t=0} \\ &= d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} \in T_{\varphi(x)} N \end{aligned}$$

Définition 3.3.2. Application harmonique.

Une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ de classe C^∞ est dite harmonique si

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t, D) \Big|_{t=0} = 0$$

pour tout domaine compact D dans M et toute variation (φ_t) à support incluse dans D .

3.3.2 Première variation d'énergie

Proposition 3.3.1. *Soient $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application différentiable et (φ_t) une variation de φ à supports incluse dans D . Alors*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} = - \int_D h(v, \tau(\varphi))v_g.$$

où $v(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)|_{t=0}$ et $\tau(\varphi) = \text{tr}_g \nabla d\varphi$ est le champ de tension de l'application φ .

Preuve : Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M et $\{\frac{d}{dt}\}$ base sur $(-\epsilon, \epsilon)$, alors $\{(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})\}$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale sur la variété produit $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, et on a le crochet de Lie $[(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})] = 0$, pour tout $i = 1, \dots, m$, on a $d\phi(e_i, 0) = d\varphi(e_i)$ et $d\phi(0, \frac{d}{dt}) = v$. En effet, remarquons que

$$d\phi(e_i, 0) : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow TN \quad ,$$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i, 0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x) + d_0\phi_x(0) \quad (\text{formule de Leibniz}) \\ &= d_x\phi_0(e_i|_x) \\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0|_x) + d_0\phi_x(\frac{d}{dt}|_{t=0}) \\ &= d\phi_x(\frac{d}{dt})|_{t=0} \\ &= v(x) \, , \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x, 0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x, t)$. Donc,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D h(d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_i))v_g|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))v_g|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial}{\partial t} h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))|_{t=0} v_g \\ &= \int_D h(\nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))|_{t=0} v_g \\ &= \int_D h(\nabla_{(e_i, 0)}^\phi d\phi(0, \frac{d}{dt}), d\phi(e_i, 0))|_{t=0} v_g \\ &= \int_D h(\nabla_{d\varphi(e_i)}^N v, d\varphi(e_i))v_g \\ &= \int_D h(\nabla_{e_i}^\varphi v, d\varphi(e_i))v_g \end{aligned}$$

Soit $\omega(*) = h(v, d\varphi(*))$, 1-forme sur M , alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \omega &= (\nabla_{e_i} \omega)(e_i) \\ &= e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i} e_i) \\ &= e_i(h(v, d\varphi(e_i))) - h(v, d\varphi(\nabla_{e_i} e_i)) \\ &= h(\nabla_{e_i}^\varphi v, d\varphi(e_i)) + h(v, \tau(\varphi)), \end{aligned}$$

et comme $\int_D \operatorname{div} \omega v_g = 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t, D)|_{t=0} = - \int_D h(v, \tau(\varphi)) v_g$$

■

Théorème 3.3.1. *Une application différentiable $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est harmonique si et seulement si $\tau(\varphi) = 0$.*

3.3.3 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 3.3.1. *Toute application constante $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est harmonique.*

Exemple 3.3.2. *Le seconde forme fondamentale de l'application identité, $\mathbf{Id}_M : (M, g) \longrightarrow (M, g)$ est nulle, c'est à dire $\mathbf{Id}_M$ est totalement géodésique, donc $\mathbf{Id}_M$ est harmonique.*

Exemple 3.3.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ et (e_i) une base orthonormée sur M on a*

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \operatorname{tr}_g \nabla df \\ &= \nabla df(e_i, e_i) \\ &= \nabla_{e_i}^f df(e_i) - df(\nabla_{e_i}^M e_i) \\ &= e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}^M e_i)(f) \\ &= g(\nabla_{e_i} \operatorname{grad} f, e_i) \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &= \Delta(f). \end{aligned}$$

Exemple 3.3.4. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique g_0 et soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0)$ une application différentiable, $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$. d'après la formule ?? et comme ${}^{\mathbb{R}^n} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, on a*

$$\tau(\varphi) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi,$$

c'est à dire,

$$\tau(\varphi) = (\Delta(\varphi^1), \dots, \Delta(\varphi^n)),$$

d'où l'application φ est harmonique si et seulement si $\Delta(\varphi^\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \dots, n$, c'est à dire φ^α sont des fonctions harmoniques.

Exemple 3.3.5. Soit $M =]a, b[$ un intervalle sur $\mathbb{R}$. Alors la courbe $\gamma :]a, b[\longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique si

$$\frac{d^2 \gamma^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{d\gamma^\beta}{dt} \frac{d\gamma^\delta}{dt} = 0,$$

donc, γ est harmonique si et seulement si c'est une géodésique.

Exemple 3.3.6. Soit S une surface dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et soit :

$$\varphi : (\Omega, <, >_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, <, >_{\mathbb{R}^3}),$$

une paramétrisation locale de S , où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Supposons que :

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2, \quad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

Alors, S est minimale si et seulement si φ est harmonique. En effet, notons :

$$N = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|}$$

le vecteur unitaire normal,

$$E = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad G = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2,$$

$$e = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad f = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad g = \left\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

on obtient :

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

la courbure moyenne de S . D'autre part :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tau(\varphi) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 \\ &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tau(\varphi) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $\tau(\varphi)$ est normal à la surface S et on a :

$$H = \frac{e + g}{2E} = \frac{\left\langle N, \tau(\varphi) \right\rangle_{\mathbb{R}^3}}{2E}.$$

Exemple 3.3.7. Soient N une variété Riemannienne et M une sous-variété de N . Si $i : M \hookrightarrow N$ est l'injection canonique, alors la sous-variété M est minimale si et seulement si i est harmonique. En effet, en utilisant la Remarque 3.1.3 on a

$$\nabla di = B,$$

d'où, $\tau(i) = H = \text{trace} B$.

Exemple 3.3.8. Soient (M, g) et (N, h) des variétés Riemanniennes. Si $\varphi : M \rightarrow N$ est un plongement régulier isométrique, c'est à dire, φ est un plongement régulier tel que pour tout $p \in M$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a

$$g_p(X_p, Y_p) = h_{\varphi(p)}(d\varphi(X_p), d\varphi(Y_p)).$$

Alors, $\varphi(M)$ est une sous-variété de N , de plus $\varphi(M)$ est minimale si et seulement si l'application φ est harmonique.

En effet, si $\nabla^{\varphi(M)}$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique induite par h sur $\varphi(M)$, et B désigne la deuxième forme fondamentale de $\varphi(M)$ sur N , alors

$$\begin{aligned} B(d\varphi(X), d\varphi(Y)) &= (\nabla_{d\varphi(X)}^N d\varphi(Y))^\perp \\ &= \nabla_{d\varphi(X)}^N d\varphi(Y) - (\nabla_{d\varphi(X)}^N d\varphi(Y))^\top \\ &= \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - \nabla_{d\varphi(X)}^{\varphi(M)} d\varphi(Y) \\ &= \nabla_X^\varphi d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla_X^M Y) \\ &= \nabla d\varphi(X, Y) \quad , \quad X, Y \in \Gamma(TM), \end{aligned}$$

Soit (e_i) une base orthonormée locale sur M , comme l'application φ est isométrique, on a $(d\varphi(e_i))$ une base orthonormée sur $\varphi(M)$, d'où

$$\begin{aligned} H &= \text{trace} B \quad (\text{courbure moyenne}) \\ &= B(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\ &= \nabla d\varphi(e_i, e_i) \\ &= \tau(\varphi). \end{aligned}$$

Exemple 3.3.9. Soit M une variété Riemannienne et g la métrique Riemannienne induite sur la sphère unité S^n par l'injection canonique $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $\varphi : M \rightarrow S^n$ une application de classe C^∞ , posons $\psi = i \circ \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, alors φ est harmonique si et seulement si

$$\tau(\psi) = -|d\psi|^2 \psi.$$

En effet, d'après la proposition 3.1.4 on a

$$\tau(\psi) = \tau(i \circ \varphi) = di(\tau(\varphi)) + \text{tr} \nabla di(d\varphi, d\varphi),$$

donc, φ est harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \text{tr} \nabla di(d\varphi, d\varphi) \\ &= \sum_{i=1}^m \nabla di(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)), \end{aligned}$$

où (e_i) est une base orthonormée de $T_x M$, $x \in M$, en utilisant la formule 3.8 on obtient

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= -\sum_{i=1}^m g(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \mathcal{N}_{\psi(x)} \quad , \text{ où } \mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= -\sum_{i=1}^m |d\varphi(e_i)|^2 \psi(x) \quad , (\mathcal{N}_{\psi(x)} = \psi(x)) \\ &= -|d\varphi|^2 \psi(x) \\ &= -|d\psi|^2 \psi(x) .\end{aligned}$$

Remarque 3.3.1. La composé de deux applications harmoniques n'est pas en générale une application harmonique. En particulier si ϕ est harmonique et si ψ est totalement géodésique c'est à dire $(\nabla d\psi = 0)$, alors $\psi \circ \phi$ est harmonique.

Exemple 3.3.10. Soit l'application,

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ x &\longmapsto (x, 0) ,\end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned}\tau(\varphi) &= \left(\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2} \right) \\ &= 0 ,\end{aligned}$$

et soit l'application,

$$\begin{aligned}\psi : (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2) \\ (x, y) &\longmapsto x^2 - y^2 ,\end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= \Delta(\psi) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \psi}{dy^2} \\ &= 2 - 2 = 0 ,\end{aligned}$$

alors les deux applications φ et ψ sont harmoniques, mais remarquons que la composé,

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2) \\ x &\longmapsto x^2 ,\end{aligned}$$

est non harmonique, $\tau(\psi \circ \varphi) = 2$.

3.3.4 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion est introduit par P.Baird et J. Eells [1]

Définition 3.3.3. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variété riemanniennes et $\phi : M^m \rightarrow N^n$ une application C^∞ , Le tenseur énergie-impulsion $S(\phi)$ associé à ϕ est un tenseur de type $(0, 2)$ sur M , défini par :

$$S(\phi) = e(\phi)g - \phi^*h.$$

Lemme 3.3.1. Soit $G = (g_{ij})_{ij}$ une matrice symétrique carré d'ordre m . Si $G^{-1} = (g^{ij})_{ij}$ désigne la matrice inverse de G , alors :

$$\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}) = -g^{ia}g^{jb}$$

pour tout $i, j = 1, \dots, m$.

Preuve : de l'égalité :

$$G^{-1}G = (g^{ij}).(g_{ij}) = Id$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}).(g_{ij}) &= -(g^{ij}).\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g_{ij}) \\ &= -(g^{ij}).\delta_{ab} \end{aligned} \quad (3.17)$$

où δ_{ab} désigne la matrice $(\delta_i^a \delta_j^b)_{ij}$. De la formule 3.17, on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}) &= -(g^{ij}).\delta_{ab}(g^{ij}) \\ &= -(g^{ia}g^{jb}) \\ &= -(g^{ia}g^{jb}) \end{aligned}$$

■

Lemme 3.3.2. Si $G = (g_{ij})_{ij}$ est une matrice symétrique carré d'ordre m , alors :

$$\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(\det(g_{ij})) = \text{cofacteur}(g_{ab})$$

Preuve : Si $A_i = (g_{i1}, \dots, g_{im})^t$ désigne la i ème colonne de la matrice (g_{ij}) , alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(\det(g_{ij})) &= \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(\det(A_1, \dots, A_m)) \\ &= \det\left(\frac{\partial}{\partial g_{ab}}A_1, \dots, A_m\right) + \dots + \det\left(A_1, \dots, \frac{\partial}{\partial g_{ab}}A_m\right) \\ &= \det\left(A_1, \dots, \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(A_a), \dots, A_m\right) \\ &= \det(A_1, \dots, (A_a^b), \dots, A_m) \\ &= \text{cofacteur}(g_{ab}) \end{aligned}$$

où $A_a^b = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t$.

■

Lemme 3.3.3. Soient (M^m, g) une variété Riemannienne et $(g_u)_u \in \otimes^2 T^*M$ une variation régulière de la métrique g ($g_0 = g$), alors :

$$\delta g = \frac{\partial}{\partial u}(g_u)|_{u=0} \in \otimes^2 T^*M$$

En effet, localement on a :

$$g_u(x) = g_{ij}(u, x) dx^i \otimes dx^j$$

d'où

$$(\delta g)_{ij}(x) = \frac{\partial}{\partial u}(g_{ij}(u, x))|_{u=0} dx^i \otimes dx^j \in \otimes^2 T^*M$$

Proposition 3.3.2. Soient $(\phi : M \rightarrow N)$ une application C^∞ entre deux variétés Riemannienne (M^m, g) et (N^n, h) . Si $(g_u)_u$ est une variation C^∞ de la métrique g sur un domaine compact M , alors la première variation d'énergie de ϕ respectivement à la variation $(g_u)_u$ est donnée par :

$$\frac{dE(\phi)}{du}|_{u=0} = \frac{1}{2} \int_M \langle S(\phi), \delta g \rangle dg \quad (3.18)$$

où localement $S(\phi)_{ij} = e(\phi)g_{ij} - (\phi^*h)_{ij}$ et $\langle S(\phi), \delta g \rangle = g^{ia}g^{jb}S(\phi)_{ij}\delta g_{ab}$.

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{dE(\phi)}{du}|_{u=0} &= \int_M \frac{de(\phi)v_{g_u}}{du}|_{u=0} \\ &= \int_M \left(\frac{\partial e(\phi)v_{g_u}}{\partial g_{ab}} \right) \delta g_{ab} \\ &= \int_M \frac{\partial e(\phi)}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} v_g + \int_M e(\phi) \frac{\partial v_g}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} \end{aligned}$$

Utilisant le lemme 3.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(\phi)}{\partial g_{ab}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial g_{ab}} \phi^\alpha \phi^\beta h_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} g^{ia} g^{jb} \phi_i^\alpha \phi_j^\beta h_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} g^{ia} g^{jb} (\phi^*h)_{ij} \end{aligned} \quad (3.19)$$

De la formule $v_g = (\det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1 \dots dx^m$ et le lemme 3.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_g}{\partial g_{ab}} &= \frac{1}{2} (\det(g_{ij}))^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial g_{ab}} (\det(g_{ij})) dx^1 \dots dx^m \\
 &= \frac{1}{2} (\det(g_{ij}))^{-1} \text{cofacteur}(g_{ab}) (\det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1 \dots dx^m \\
 &= \frac{1}{2} g^{ab} (\det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1 \dots dx^m \\
 &= \frac{1}{2} g^{ab} v_g \\
 &= \frac{1}{2} g^{ia} g^{jb} g_{ij} v_g
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

La preuve se termine par substitution des formules 3.19 et 3.20 dans 3.18. ■

Théorème 3.3.2. Soient $(\phi : M^m \rightarrow N^n$ une application C^∞ entre deux variétés Riemannienne (M^m, g) et (N^n, h) , alors :

$$h(\tau(\phi), d\phi) = -\text{div}(S(\phi)). \tag{3.21}$$

i.e : $\forall X \in (TM)$, on a

$$h(\tau(\phi), d\phi(X)) = -\text{div}(S(\phi))(X).$$

où

$$\begin{aligned}
 \text{div} : \Gamma(T^*M \otimes T^*M) &\rightarrow \Gamma(T^*M) \\
 \varrho &\mapsto \text{div}(\varrho) = \text{trace}(\nabla \varrho)
 \end{aligned}$$

Preuve : Si $\{X_i\}_i$ (resp $\{e_i\}_i$) désigne une base locale (resp orthonormale), alors :

$$\begin{aligned}
 \text{div}(S(\phi)) &= g^{ij} \Sigma^i(\nabla_{X_i}(S(\phi)))(X_i) \\
 &= \Sigma^i(\nabla_{e_i}(S(\phi)))(e_i)
 \end{aligned}$$

soit $x \in M$ et (e_i) une base locale orthonormale telle que $(\nabla_{e_i} e_j)_x = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(S(\phi)(e_j)) &= \sum_i (\nabla_{e_i}(S(\phi)))(e_i, e_j) \\
&= \sum_i (\nabla_{e_i}(S(\phi)(e_i, e_j)) - \sum_i (S(\phi)(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - \sum_i (S(\phi)(e_i, \nabla_{e_i} e_j)) \\
&= \sum_i (\nabla_{e_i}(S(\phi)(e_i, e_j)) \\
&= \sum_i e_i(S(\phi)(e_i, e_j)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k} e_i(h(d\phi(e_k), d\phi(e_k))g(e_i, e_j)) - \sum_i e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k} e_i(h(d\phi(e_k), d\phi(e_k)))\delta_i^j - \sum_i e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k e_j(h(d\phi(e_k), d\phi(e_k))) - \sum_i e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\
&= \sum_k h(\nabla_{e_j}^\phi d\phi(e_k), d\phi(e_k)) - \sum_i h(\nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i), d\phi(e_j)) - \sum_i h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_j)) \\
&= -h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) + \sum_i h(\nabla_{e_j}^\phi d\phi(e_i), d\phi(e_i)) - \sum_i h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_j)) \\
&= -h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) \quad (\nabla^\phi d\phi \text{ est symétrique}).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.3.1 (Loi de conservation). *Le tenseur énergie impulsion d'une application harmonique $\phi : M \rightarrow N$ est de divergence nulle*

$$\tau(\phi) = 0 \Rightarrow \operatorname{div} S(\phi) = 0$$

Corollaire 3.3.2. *Si $\phi : M \rightarrow N$ est une submersion sur un ensemble dense, alors ϕ est harmonique si et seulement si $\operatorname{div} S(\phi)$ est nulle*

$$\tau(\phi) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} S(\phi) = 0$$

3.3.5 Métrique critique

Définition 3.3.4. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne compacte orientée. Une métrique Riemannienne critique est un point critique pour la fonctionnelle :*

$$H(g) = \int_M |S_g|^2 v_g$$

où S_g désigne la courbure scalaire de (M, g) et v_g désigne l'élément volume mesurer par g .

Localement, si on note par $(x_i)_{i=1}^m$ les coordonnées locale sur M et Ric_{ij}^g les coordonnées du tenseur de Ricci associé à g , alors g est une métrique critique, si et seulement si on a :

$$m \nabla_i \nabla_j S_g - m S_g Ric_{ij}^g - (\Delta S_g) g_{ij} + S_g^2 g_{ij} = 0 \quad (3.22)$$

(For more details, we can refer to [15] and [92])

3.4 Déformation conforme

3.4.1 Déformation conforme de la métrique de départ :

Proposition 3.4.1. Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\tilde{g} = e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g . Alors le champs de tension de φ associé à la nouvelle métrique $\tilde{g}$ est donné par :

$$\tilde{\tau}(\varphi) = e^{-2\gamma}[\tau(\varphi) + (m - 2)d\varphi(grad\gamma)] \quad (3.23)$$

Preuve :

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base orthonormale associée à la métrique g . Par définition du champ de tension (Définition 3.1.3), on a :

$$\tilde{\tau}(\varphi) = \sum_i^m \{ \nabla_{\tilde{e}_i}^\varphi d\varphi(\tilde{e}_i) - d\varphi(\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}^M \tilde{e}_i) \} = \sum_i^m \{ \nabla_{d\varphi(\tilde{e}_i)}^N d\varphi(\tilde{e}_i) - d\varphi(\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}^M \tilde{e}_i) \}. \quad (3.24)$$

où $\tilde{e}_i = e^{-\gamma}e_i$, $i = 1, \dots, n$, est une base orthonormée relativement à la métrique $\tilde{g}$.

Calculons chaque terme de l'équation (3.24) :

1) On a

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}^M \tilde{e}_i = \tilde{\nabla}_{e^{-\gamma}e_i} e^{-\gamma}e_i = e^{-2\gamma}[-e_i(\gamma)e_i + \tilde{\nabla}_{e_i}^M e_i]. \quad (3.25)$$

D'après le Corollaire 1.5.1 (formule 1.27) on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{e_i}^M e_i &= \nabla_{e_i}^M e_i + 2e_i(\gamma)e_i - g(e_i, e_i)grad(\gamma) \\ &= \nabla_{e_i}^M e_i + 2e_i(\gamma)e_i - grad(\gamma) \end{aligned} \quad (3.26)$$

En remplaçant (3.26) dans (3.25) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}^M \tilde{e}_i &= e^{-2\gamma}[\nabla_{e_i}^M e_i + e_i(\gamma)e_i - grad(\gamma)] \\ \sum_i^m \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}^M \tilde{e}_i &= e^{-2\gamma}[\sum_i^m \nabla_{e_i}^M e_i + (1 - m)grad(\gamma)] \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_i^m d\varphi(\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}^M \tilde{e}_i) = e^{-2\gamma}[\sum_i^m d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i) + (1 - m)d\varphi(grad\gamma)]. \quad (3.27)$$

2) On utilisant les propriétés de ∇^φ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tilde{e}_i}^\varphi d\varphi(\tilde{e}_i) &= e^{-2\gamma} \nabla_{e_i}^\varphi e^{-2\gamma} d\varphi(e_i) \\
&= e^{-2\gamma} [-e_i(\gamma) d\varphi(e_i) + \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i)]. \\
&= e^{-2\gamma} [-d\varphi(e_i(\gamma)e_i) + \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i)]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

d'où

$$\sum_i^m \nabla_{\tilde{e}_i}^\varphi d\varphi(\tilde{e}_i) = e^{-2\gamma} \left[\sum_i^m \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i) - d\varphi(\text{grad}\gamma) \right]. \tag{3.29}$$

Remplaçons (3.29) et (3.27) dans l'égalité (3.24), nous obtenons :

$$\tilde{\tau}(\varphi) = e^{-2\gamma} [\tau(\varphi) + (m-2)d\varphi(\text{grad}\gamma)]$$

■

Remarque 3.4.1. Si la variété M est de dimension 2, alors toute application harmonique reste harmonique, par changement conforme de la métrique de départ.

Exemples 3.4.1. Soit $\mathbb{R}^3$ (resp $\mathbb{R}^2$), muni de la métrique euclidienne, et soit l'application φ définie par :

$$\begin{aligned}
\varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) \quad ,
\end{aligned}$$

en utilisant les coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$, l'application φ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(r, \theta, x_3) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, x_3) &\longmapsto (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) = (r, x_3) \quad ,
\end{aligned}$$

donc

$$\varphi(r, \theta, x_3) = \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta, x_3) = (r, x_3).$$

$$d_{(r, \theta, x_3)} \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques, la métrique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$g_{\mathbb{R}^3} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dx_3^2$$

de base orthonormale :

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad e_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad ; \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

tels que

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = -\frac{1}{r} e_2 \quad ; \quad [e_i, e_j] = 0$$

pour tout $(i, j) \notin \{(1, 2), (2, 1)\}$

$\mathbb{R}^2$ est muni de la métrique euclidienne :

$$g_{\mathbb{R}^2} = dr^2 + dx_3^2,$$

de base orthonormale

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

De la formule de Kozul, on déduit :

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0 \quad ; \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{1}{r} e_1 \quad ; \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_{f_i} f_j = 0$$

pour tout $i, j = 1, 2$.

De la formule du champ de tension, on obtient :

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

donc φ est une application non harmonique.

Soit $\tilde{g}_{\mathbb{R}^3} = e^{2\gamma} g_{\mathbb{R}^3}$, une déformation conforme de $g_{\mathbb{R}^3}$, où $\gamma = \gamma(r)$ dépend uniquement de r .

D'après la formule (3.23) de la Proposition 3.4.1 on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(\varphi) &= e^{-2\gamma} [\tau(\varphi) + (m-2)d\varphi(\text{grad}\gamma)] \\ &= e^{-2\gamma} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + d\varphi(\gamma'(r) \frac{\partial}{\partial r}) \right] \\ &= e^{-2\gamma} \left(\frac{1}{r} + \gamma'(r) \right) \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

avec $\text{grad}\gamma = \gamma'(r) \frac{\partial}{\partial r}$.

Ainsi φ est harmonique pour la métrique $\tilde{g}_{\mathbb{R}^3}$, si et seulement si

$$\gamma'(r) = -\frac{1}{r},$$

ie

$$\gamma(r) = \ln\left(\frac{cst}{r}\right)$$

3.4.2 Déformation conforme de la métrique d'arrivée

Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés riemanniennes et $\tilde{h} = e^{2\gamma} h$, une déformation conforme de la métrique d'arrivée h .

Proposition 3.4.2. Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $\tilde{h} = e^{2\gamma}h$ est une déformation conforme de la métrique h , alors :

$$\tilde{\nabla}_X^\varphi V = \nabla_X^\varphi V + X(\gamma \circ \varphi)V + V(\gamma)d\varphi(X) - h(d\varphi(X), V)[grad(\gamma)] \circ \varphi \quad (3.30)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$. Où $\tilde{\nabla}^\varphi$ (resp ∇^φ) désigne la connexion du fibré inverse $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ relativement à la métrique $\tilde{h}$ (resp h).

Preuve : Soient $\tilde{X}, \tilde{V} \in \Gamma(TN)$ tels que $\tilde{X} \circ \varphi = d\varphi(X)$ et $\tilde{V} \circ \varphi = V$. Des formules 2.7 et 1.27, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X^\varphi V &= (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}^N \tilde{V}) \circ \varphi \\ &= [\nabla_{\tilde{X}} \tilde{V} + \tilde{X}(\gamma)\tilde{V} + \tilde{V}(\gamma)\tilde{X} - h(\tilde{X}, \tilde{V})grad(\gamma)] \circ \varphi \\ &= \nabla_X^\varphi V + [\tilde{X}(\gamma)\tilde{V} + \tilde{V}(\gamma)\tilde{X} - h(\tilde{X}, \tilde{V})grad(\gamma)] \circ \varphi \\ &= \nabla_X^\varphi V + d\varphi(X)(\gamma)V + V(\gamma)d\varphi(X) - h(d\varphi(X), V)[grad(\gamma)] \circ \varphi \\ &= \nabla_X^\varphi V + X(\gamma \circ \varphi)V + V(\gamma)d\varphi(X) - h(d\varphi(X), V)[grad(\gamma)] \circ \varphi \end{aligned}$$

■

De la Proposition 3.4.2, on a :

Proposition 3.4.3. Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si $\tilde{h} = e^{2\gamma}h$ est une déformation conforme de h , alors :

$$\tilde{\tau}(\varphi) = \tau(\varphi) + 2d\varphi(grad_M(\gamma \circ \varphi)) - |d\varphi|^2(grad_N(\gamma)) \circ \varphi. \quad (3.31)$$

Preuve : Soit $(e_i)_{i=1, \dots, m}$ une base orthonormée de (M, g) , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(\varphi) &= trace_g \tilde{\nabla} d\varphi \\ &= \sum_{i=1}^m \{ \tilde{\nabla}_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i) \} + \sum_{i=1}^m \{ e_i(\gamma \circ \varphi) d\varphi(e_i) + d\varphi(e_i)(\gamma) d\varphi(e_i) \} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \{ h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) [grad(\gamma)] \circ \varphi \} \\ &= \tau(\varphi) + \sum_{i=1}^m \{ 2e_i(\gamma \circ \varphi) d\varphi(e_i) - h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) [grad(\gamma)] \circ \varphi \} \\ &= \tau(\varphi) + 2d\varphi(grad(\gamma \circ \varphi)) - |d\varphi|^2 [grad(\gamma)] \circ \varphi \end{aligned}$$

3.4.3 Applications conformes

Définition 3.4.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variété riemanniennes, une application $\phi : M^m \rightarrow N^n$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ telle que pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y)$$

La fonction λ est appelée fonction de dilatation associée à ϕ .

Proposition 3.4.4. Si $\phi : M^m \rightarrow N^n$ est une application conforme, alors :

$$e(\phi) = \frac{1}{2} |d\phi|^2 = \frac{1}{2} m \lambda^2$$

Preuve : Soit (e_i) une base locale orthonormale, on a :

$$\begin{aligned} e(\phi) &= \frac{1}{2} \sum_i h(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \lambda^2 g(e_i, e_i) \\ &= \frac{m}{2} \lambda^2 \end{aligned}$$

■

Lemme 3.4.1. Si $\phi : M^m \rightarrow N^n$ est une application conforme, alors :

$$S(\phi) = \frac{(m-2)\lambda^2}{2} g$$

Preuve : Soit (e_i) une base locale orthonormale, on a :

$$\begin{aligned} S(\phi)(e_i, e_j) &= e(\phi)g(e_i, e_j) - h(d\phi(e_i), d\phi(e_j)) \\ &= \frac{1}{2} m \lambda^2 g(e_i, e_j) - \lambda^2 g(e_i, e_j) \\ &= \left(\frac{1}{2} m \lambda^2 - \lambda^2 \right) g(e_i, e_j) \end{aligned}$$

■

Proposition 3.4.5. Si $\phi : M^m \rightarrow N^n$ est une submersion conforme, alors le champ de tension est donné par :

$$\tau(\phi) = (2 - m)d\phi(\text{grad } \ln \lambda)$$

Preuve :(version 1.)

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i}^M e_j = 0$ au point x , pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Au point x , on a :

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) &= \sum_{i=1}^n h(\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ e_i \left(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \right) - h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_j)) \right\}. \end{aligned}$$

Puisque φ est conforme de dilatation λ et $\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_j) = \nabla_{e_j}^\varphi d\varphi(e_i)$, alors :

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) &= \sum_{i=1}^n \left\{ e_i(\lambda^2) \left(g(e_i, e_j) \right) - h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi d\varphi(e_i)) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ 2\lambda^2 \left(g(e_i(\ln \lambda)e_i, e_j) \right) - \frac{1}{2}e_j(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))) \right\} \\ &= 2\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) - n\lambda^2 e_j(\ln \lambda) \\ &= 2\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) - n\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) \\ &= (2 - n)\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) \\ &= (2 - n) h(d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda), d\varphi(e_j)). \end{aligned}$$

■

Preuve :(version 2.) Soit (e_i) une base locale orthonormale, du Théorème 3.3.2, on a :

$$\begin{aligned} -h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) &= \text{div}(S(\phi))(e_j) \\ &= \sum_i (\nabla_{e_i} S(\phi))(e_i, e_j) \\ &= \sum_i e_i(S(\phi)(e_i, e_j)) \\ &= \sum_i e_i \left(\frac{(m-2)\lambda^2}{2} g(e_i, e_j) \right) \\ &= \sum_i \frac{(m-2)}{2} e_i(\lambda^2) \delta_i^j \\ &= \frac{(m-2)}{2} e_j(\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) &= \frac{(m-2)}{2} g(e_j, \text{grad}(\lambda^2)) \\
&= (m-2) \lambda g(e_j, \text{grad}(\lambda)) \\
&= (m-2) \lambda^2 g(e_j, \frac{\text{grad}(\lambda)}{\lambda}) \\
&= (m-2) \lambda^2 g(e_j, \text{grad}(\ln \lambda)) \\
&= (m-2) h(d\phi(e_j), d\phi(\text{grad}(\ln \lambda))) \\
&= h((m-2) d\phi(\text{grad}(\ln \lambda)), d\phi(e_j))
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.4.1. *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une submersion conforme, alors ϕ est harmonique si et seulement si $n = 2$ ou la dilatation λ est constante.*

3.4.4 Application semi-conforme

Soit $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , entre deux variétés riemanniennes. L'espace tangent au point $x \in M$ se décompose en somme directe :

$$T_x M = H_x \oplus V_x$$

d'un espace vertical $V_x = \ker d\phi_x$ et d'un espace horizontal $H_x = V_x^\perp$ (complément orthogonal de V_x).

On note :

$$C_\phi = \{x \in M / d\phi_x \cong 0\} \quad (3.32)$$

L'ensemble des points critiques de ϕ .

$$\overline{M} = M \setminus C_\phi \quad (3.33)$$

Définition 3.4.2. *Supposons $m \geq n$, l'application $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ est dite semi-conforme si pour tout $x \in \overline{M}$,*

$$d\phi_{x/H_x} : H_x \rightarrow T_{\phi(x)} N$$

est une application linéaire surjective et conforme.

i.e : il existe une fonction $\lambda : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}_+^$ tel que pour tout $X, Y \in H_x$, on a*

$$h(d_x \phi(X), d_x \phi(Y)) = \lambda^2(x) g(X, Y). \quad (3.34)$$

Remarques 3.4.1. :

- Sur $\overline{M}$, on a : $\lambda^2 = \frac{1}{n} |d\phi|^2$.
- La fonction λ peut-être étendue d'une manière régulière à M , en posant $\lambda|_{C_\phi} \equiv 0$.
- La fonction $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée fonction de dilatation de ϕ .
- Si $m < n$, alors la seule application semi-conforme est l'application constante $\phi = Cst$ ($\overline{M} = \emptyset$, $C_\phi = M$) puisque $d_x \phi$ ne peut pas être surjective. Par la suite, on considère dans le cas semi conforme $m \geq n$.

- Si $C_\phi = \emptyset$, alors ϕ est dite conforme de dilatation λ .
- Si φ est semi-conforme, alors localement, on a :

$$g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\beta) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} = \lambda^2 (h^{\alpha\beta} \circ \varphi) \quad (3.35)$$

pour tout $\alpha, \beta = 1, \dots, n$.

Définition 3.4.3. Soit $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ une application semi-conforme de dilatation λ , alors :

- ϕ est dite submersion semi-conforme, si $C_\phi = \emptyset$.
- ϕ est dite submersion riemannienne, si $C_\phi = \emptyset$ et $\lambda = \mathbf{1}_M$.

Proposition 3.4.6. Soient $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ et $\psi : (N^n, h) \rightarrow (P^p, k)$ deux applications semi-conformes de dilatations λ et μ respectivement, alors $\psi \circ \phi$ est semi-conforme de dilatation $\alpha_{\psi \circ \phi} = \lambda(x) \cdot \mu(\phi(x))$.

Preuve : Remarquons que :

- $H_x^{\psi \circ \phi} \subset H_x^\phi$
 - $d_{\phi(x)} \psi \circ d_x \phi$ est surjective sur $H_x^{\psi \circ \phi}$.
- Soient $X, Y \in H_x^{\psi \circ \phi}$, on a :

$$\begin{aligned} k(d_x(\psi \circ \phi)(X), d_x(\psi \circ \phi)(Y)) &= k(d_{\phi(x)} \psi(d_x \phi(X)), d_{\phi(x)} \psi(d_x \phi(Y))) \\ &= \mu^2(\phi(x)) h(d_x \phi(X), d_x \phi(Y)) \\ &= \mu^2(\phi(x)) \cdot \lambda^2(x) g_x(X, Y) \end{aligned}$$

■

Proposition 3.4.7. Soient $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ une application semi-conforme. Si $f \in C^\infty(N)$, alors :

$$\Delta^M(f \circ \phi) = df(\tau(\phi)) + \lambda^2(\Delta^N f) \circ \phi \quad (3.36)$$

Preuve :

Soient $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une base orthonormée sur M , et $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée sur N telles que

$$e_1, \dots, e_n \in H_x \quad ; \quad e_{n+1}, \dots, e_m \in V_x \quad ; \quad d\phi(e_i) = \lambda(f_i \circ \phi), (1 \leq i \leq n)$$

alors d'après la formule (3.6) de la Proposition 3.1.4, on a :

$$\Delta^M(f \circ \phi) = \tau(f \circ \phi) = df(\tau(\phi)) + \text{Tr}_g \nabla df(d\phi, d\phi),$$

Comme $\nabla df(d\phi, d\phi)$ est une forme vectoriel $C^\infty(M)$ bilinéaire. on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_g \nabla df(d\phi, d\phi) &= \sum_{i=1}^m \nabla df(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n [\nabla df(\lambda.f_i, \lambda.f_i)] \circ \phi \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda^2 [\nabla df(f_i, f_i)] \circ \phi \\ &= \lambda^2.(\Delta^N f) \circ \phi, \end{aligned}$$

■

3.4.5 Morphisme harmonique

Les morphismes hamoniques entre deux variétés riemanniennes sont des applications qui préservent l'harmonicité.

Définition 3.4.4. *soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés reimanniennes de dimensions m et n respectivement. ϕ est dite morphisme harmonique si et seulement si, pour toute fonction harmonique*

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

où V est un ouvert de N tel que $\phi^{-1}(V) \neq \emptyset$, la fonction

$$f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est harmonique.

Théorème 3.4.1. (*Caractérisation*)

Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , alors ϕ est un morphisme harmonique si et seulement si ϕ est harmonique et semi-conforme.

Voir le livre de Paul Baird [7].

Remarque 3.4.2. *D'après la formule (3.36) de la Proposition 3.4.7, $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme harmonique, si et seulement si, pour toute fonction harmonique $f \in C^\infty(N)$, on a :*

$$df(\tau(\phi)) = 0$$

Contrairement aux applications harmoniques, on a :

Proposition 3.4.8. *La composéé de deux morphismes harmoniques est un morphisme harmonique.*

Preuve : Soient $\phi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux morphisme harmoniques, alors si

$$f : W \subset P \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction harmonique telle que $\psi^{-1}(W) \neq \emptyset$ alors :

$$f \circ \psi : \psi^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est harmonique car ψ est morphisme harmonique. donc

$$f \circ \psi \circ \phi : (\psi \circ \phi)^{-1}(W) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est harmonique car ϕ est morphisme harmonique ■

Théorème 3.4.2. Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. φ est un morphisme harmonique ;
2. φ est harmonique et semi-conforme ;
3. Pour toute fonction v définie sur un ouvert V de N tel que $\varphi^{-1}(V)$ soit non vide,

$$\Delta^M(v \circ \varphi) = \lambda^2 (\Delta^N v) \circ \varphi,$$

où λ est une fonction positive sur M .

Démonstration.

Lemme 3.4.2 ([115]). Soit $y_0 \in N^n$, (y^γ) des coordonnées normales en y_0 et $\{C_\gamma, C_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n$ des constantes avec $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$, $\sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha\alpha} = 0$. Il existe alors un voisinage V de y_0 dans N et une fonction harmonique $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = C_\alpha, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = C_{\alpha\beta}, \quad (3.37)$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$.

Supposons que $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme harmonique. Munissons les deux variétés différentiables M et N de coordonnées locales (x^i) et (y^α) respectivement, autour des point $x_0 \in M$ et $y_0 = \varphi(x_0)$ et supposons que (y^α) sont des coordonnées normales en y_0 . D'après le lemme 3.4.2 il existe une fonction harmonique v telle que pour tous $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, on a :

$$\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}(y_0) = c_{\alpha\beta}, \quad (3.38)$$

avec $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ et $\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha\alpha} = 0$.

La fonction $v \circ \varphi$ est harmonique dans un voisinage de x_0 , d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^M(v \circ \varphi) \\ &= dv(\tau(\varphi)) + \text{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &= \text{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\nabla dv = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta. \quad (3.40)$$

D'après (3.39) et (3.40), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha, \beta} g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\alpha) c_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta} g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Puisque $\sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha\alpha} = 0$, on déduit :

$$0 = \sum_{\alpha} g(\text{grad}^M \varphi^1, \text{grad}^M \varphi^1) c_{\alpha\alpha}. \quad (3.42)$$

D'après (3.41) et (3.42), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha} \left[g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\alpha) - g(\text{grad}^M \varphi^1, \text{grad}^M \varphi^1) \right] c_{\alpha\alpha} \\ &\quad + \sum_{\alpha \neq \beta} g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\beta) c_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Soient $\alpha_0 \neq 1$, on pose

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta = 1; \\ -1, & \text{si } \alpha = \beta = \alpha_0; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta \neq 1, \alpha_0; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

D'après (3.43), on a :

$$g(\text{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \text{grad}^M \varphi^{\alpha_0}) = g(\text{grad}^M \varphi^1, \text{grad}^M \varphi^1). \quad (3.44)$$

C'est-à-dire, pour tout $\alpha = 1, \dots, n$, on a :

$$g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\alpha) = g(\text{grad}^M \varphi^1, \text{grad}^M \varphi^1). \quad (3.45)$$

Soit $\alpha_0 \neq \beta_0$ et soit :

$$c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \alpha_0 \text{ et } \beta = \beta_0; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \text{ ou } \beta \neq \beta_0; \\ 0, & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

D'après (3.43), on a :

$$g(\text{grad}^M \varphi^{\alpha_0}, \text{grad}^M \varphi^{\beta_0}) = 0. \quad (3.46)$$

C'est-à-dire, pour tous $\alpha \neq \beta = 1, \dots, n$, on a :

$$g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\beta) = 0. \quad (3.47)$$

des formules (3.45) et (3.47), on obtient :

$$g(\text{grad}^M \varphi^\alpha, \text{grad}^M \varphi^\beta) = \lambda^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.48)$$

pour tous $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, où $\lambda = |\text{grad}^M \varphi^1|$. Ainsi, d'après (3.35) l'application φ est semi-conforme. Si $v : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ , définie sur un ouvert V de N , de la Proposition 3.4.7 on a :

$$\begin{aligned} \Delta^M(v \circ \varphi) &= dv(\tau(\varphi)) + \text{trace}_g \nabla dv(d\varphi, d\varphi) \\ &= dv(\tau(\phi)) + \lambda^2(\Delta^N v) \circ \phi \end{aligned} \quad (3.49)$$

Tenant compte que φ est un morphisme harmonique, de la formule (3.49), on déduit $\tau(\varphi) = 0$ c'est-à-dire l'application φ est harmonique, d'où (1) $\implies$ (2). D'après la formule (3.49) on a (2) $\implies$ (3). Enfin (3) $\implies$ (1). $\square$

3.4.6 Application de Hopf

Soit l'application de Hopf, définie en fonction de sa paramétrisation :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\phi} : S^3 \subset \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ (\cos(s)e^{ia}, \sin(s)e^{ib}) & \mapsto & (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s))e^{i\psi(a,b)}) \\ \varphi_1 \uparrow & & \uparrow \varphi_2 \\ \phi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (s, a, b) & \longmapsto & (\alpha(s), \psi(a, b)) \end{array}$$

notée en abrégé

$$\begin{array}{ccc} \phi : S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ (s, a, b) & \longmapsto & (\alpha(s), \psi(a, b)) \end{array}$$

où $\psi(a, b) = ka + lb$ et $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, \pi]$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$.

Soient :

$$g_{S^3} = ds^2 + \cos^2 s da^2 + \sin^2 s db^2$$

la métrique Riemannienne sur S^3 obtenue par lamatrice ${}^t D_{(s,a,b)} \varphi_1 \cdot D_{(s,a,b)} \varphi_1$.

$$h_{S^2} = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\psi^2$$

la métrique Riemannienne sur S^2 obtenue par lamatrice ${}^t D_{(\alpha,\psi)} \varphi_2 \cdot D_{(\alpha,\psi)} \varphi_2$.

a) Calcul du champ de tension $\tau(\phi)$

On a :

- $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_2 = \frac{1}{\cos s} \frac{\partial}{\partial a}, e_3 = \frac{1}{\sin s} \frac{\partial}{\partial b}\}$ est une base orthonormée sur S^3 .
- $\{f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}, f_2 = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \psi}\}$ est une base orthonormée sur S^2 .
- $d\phi = \begin{pmatrix} \alpha'(s) & 0 & 0 \\ 0 & k & l \end{pmatrix}$, relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b})$ sur S^3 , (resp $(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \psi})$ sur S^2).
- $d\phi(e_1) = \alpha'(s) \frac{\partial}{\partial \alpha} = \alpha'(s) f_1$
- $d\phi(e_2) = \frac{k}{\cos(s)} \frac{\partial}{\partial \psi} = k \frac{\sin(\alpha)}{\cos(s)} f_2$
- $d\phi(e_3) = \frac{l}{\sin(s)} \frac{\partial}{\partial \psi} = l \frac{\sin(\alpha)}{\sin(s)} f_2$
- $\nabla_{e_1} e_1 = 0$

- $\nabla_{e_2} e_2 = \tan(s) \frac{\partial}{\partial s} = \tan(s) e_1$
 - $\nabla_{e_3} e_3 = -\cot(s) \frac{\partial}{\partial s} = -\cot(s) e_1$
 - $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0$
 - $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} = -\sin(\alpha) \cos(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha}$.
 - $\nabla_{e_1}^\phi d\phi(e_1) = \alpha'' \frac{\partial}{\partial \alpha}$
 - $\nabla_{e_2}^\phi d\phi(e_2) = -\frac{k^2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 s} \frac{\partial}{\partial \alpha}$
 - $\nabla_{e_3}^\phi d\phi(e_3) = -\frac{l^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos^2(s)} \frac{\partial}{\partial \alpha}$
- où $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$.

Par définition, on a :

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^3 \{ \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i) \} = \sum_{i=1}^3 \{ \nabla_{d\phi(e_i)}^{S^2} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}^{S^3} e_i) \},$$

il suit que :

$$\tau(\phi) = \left(\alpha''(s) + \alpha'(s)(\cot(s) - \tan(s)) - \sin(\alpha) \cos(\alpha) \left(\frac{k^2}{\cos^2(s)} + \frac{l^2}{\sin^2(s)} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (3.50)$$

b) Condition de semi-conformalité de ϕ :

on a :

1) $d\phi$ est surjective si et seulement si $\alpha'(s) \neq 0$ et $(k, l) \neq (0, 0)$.

2) $(u, v, w) \in V_{(s,a,b)} = \text{Ker } d_{(s,a,b)} \phi \Leftrightarrow u = 0 \quad \text{et} \quad kv + lw = 0$

d'où : $V_{(s,a,b)} = \langle (0, -l, k) \rangle$

3) $(u, v, w) \in H_{(s,a,b)} \Leftrightarrow g((u, v, w), (0, -l, k)) = -lv \cos^2(s) + kw \sin^2(s) = 0$

d'où : $H_{(s,a,b)} = \langle (1, 0, 0), (0, k \sin^2(s), l \cos^2(s)) \rangle = \langle e_1, \bar{e} \rangle$

tel que :

- $\bar{e} = k \sin^2(s) \frac{\partial}{\partial a} + l \cos^2(s) \frac{\partial}{\partial b} = k \sin^2(s) \cos(s) e_2 + l \cos^2(s) \sin(s) e_3$.
- $d\phi(\bar{e}) = (k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)) \frac{\partial}{\partial \psi} = \sin(\alpha(s)) (k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)) f_2$

4) Utilisant la formule (3.34) de la Définition 3.4.2, on obtient

$$\begin{aligned}
h(d\phi(e_1), d\phi(e_1)) &= (\alpha'(s))^2 \\
&= \lambda^2 g(e_1, e_1) \\
&= \lambda^2 \\
h(d\phi(\bar{e}), d\phi(\bar{e})) &= [\sin(\alpha(s))]^2 [k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)]^2 \\
&= \lambda^2 g(\bar{e}, \bar{e}) \\
&= \lambda^2 [k^2 \sin^4 \cos^2(s) + l^2 \cos^4 \sin^2(s)] \\
&= \lambda^2 \sin^2 \cos^2 [k^2 \sin^2 + l^2 \cos^2]
\end{aligned}$$

d'où :

$$(\alpha'(s))^2 = \lambda(s)^2 = \frac{[\sin(\alpha(s))]^2}{\sin^2 \cos^2} [k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)] \quad (3.51)$$

De la formule (3.51), on obtient :

$$\alpha'(s) = \frac{\sin \alpha(s)}{\sin s \cdot \cos s} \cdot \beta(s),$$

$$\text{avec } \beta(s) = \sqrt{k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)}.$$

c) Condition d'harmonicité de ϕ

En dérivant $\alpha'(s)$ on déduit que la condition de semi-conformalité se traduit par l'équation :

$$\begin{aligned}
\alpha''(s) &= \frac{\sin \alpha(s)}{\sin(s) \cdot \cos(s)} \cdot \beta'(s) + \left[\frac{\sin \alpha(s)}{\sin(s) \cdot \cos(s)} \right]' \cdot \beta(s) \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \left[\frac{\alpha'(s) \cos \alpha(s)}{\sin s \cdot \cos s} - \frac{\sin \alpha(s)(\cos^2(s) - \sin^2(s))}{\sin^2(s) \cdot \cos^2(s)} \right] \cdot \beta(s) \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \frac{\alpha'(s) \beta(s) \cos \alpha(s)}{\sin(s) \cdot \cos(s)} - \frac{\sin \alpha(s) \beta(s)(\cos^2(s) - \sin^2(s))}{\sin^2(s) \cdot \cos^2(s)} \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \frac{\beta^2(s) \cos \alpha(s) \sin \alpha(s)}{\sin^2(s) \cdot \cos^2(s)} - \frac{\alpha'(s)(\cos^2(s) - \sin^2(s))}{\sin(s) \cdot \cos(s)} \\
&= (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \cos \alpha(s) \sin \alpha(s) \left(\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s} \right) - \alpha'(s)(\cot(s) - \tan(s))
\end{aligned}$$

ainsi

$$\alpha''(s) = (k^2 - l^2) \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} + \cos \alpha(s) \sin \alpha(s) \left(\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s} \right) - \alpha'(s)(\cot(s) - \tan(s)) \quad (3.52)$$

Substituant (3.52) dans l'expression de $\tau(\phi)$, donnée par la formule (3.50), on déduit :

$$\tau(\phi) = \frac{\sin \alpha(s)}{\beta(s)} (k^2 - l^2) \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.53)$$

Conclusion :

- Si $|k| = |l|$, alors ϕ est un morphisme harmonique.
- Si $|k| \neq |l|$, alors ϕ n'est pas un morphisme harmonique .

■

3.5 Applications biharmoniques

Soit $M = (M^m, g)$ et $N = (N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes, et soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. La biénergie de l'application φ sur un domaine compact D dans M est définie par

$$E_2(\varphi, D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

où $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de l'application φ et v_g est la forme volume sur M associée à la métrique g .

Définition 3.5.1. L'application $\varphi : M \longrightarrow N$ est dite biharmonique si

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)|_{t=0}$$

pour tout domaine compact D dans M et pour toute variation (φ_t) à support inclu dans D .

Proposition 3.5.1. (Première variation de la biénergie).

Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable et $\{\varphi_t\}_{t \in I, I =]-\epsilon, \epsilon[}$, une variation de φ à support incluse dans D . Alors

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = \int_D h(v, \tau_2(\varphi)) v_g$$

où $v(x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t |_{t=0}$ et

$$\tau_2(\varphi) = \text{tr}_g(\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi) + \text{tr}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi$$

est le champ de bitension de l'application φ . Où, $\text{tr}_g(\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi) = \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi) - \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\varphi \tau(\varphi)$
 $\text{tr}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi = R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i)$ et R^N désigne le tenseur de courbure de la variété N .

Preuve : Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de φ à support inclu dans un domaine compact D de M , on a

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t)) v_g$$

et pour tout $(x, t) \in M \times]-\epsilon, \epsilon[$, on a :

- $\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0))_{(x,t)} = \tau(\varphi_t)_x$
- $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} h(\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)))|_{t=0}$
 $= h(\nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)))$

et

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)) &= \nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi \{ \nabla_{(e_i, 0)}^\phi d\phi((e_i, 0)) - d\phi(\nabla_{(e_i, 0)}(e_i, 0)) \} \\
&= \nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi \nabla_{(e_i, 0)}^\phi d\phi(e_i, 0) - \nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi d\phi(\nabla_{(e_i, 0)}(e_i, 0)) \\
&= R((0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0)) d\phi(e_i, 0) + \nabla_{(e_i, 0)}^\phi \nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi d\phi(e_i, 0) \\
&\quad + \nabla_{[(0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0)]}^\phi d\phi(e_i, 0) - \nabla_{\nabla_{(e_i, 0)}(e_i, 0)}^\phi d\phi(0, \frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

comme $[(0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0)] = 0$ et on pose $\nabla_{(e_i, 0)}(e_i, 0) = (\nabla_{e_i}^M e_i, 0)$ en $(x, 0)$, donc

$$\nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)) = R((0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0)) d\phi(e_i, 0) + \nabla_{(e_i, 0)}^\phi \nabla_{(e_i, 0)}^\phi d\phi(0, \frac{d}{dt})$$

d'où,

$$\begin{aligned}
h(\nabla_{(0, \frac{d}{dt})}^\phi \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \quad \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)))|_{t=0} \\
&= h(R(v, d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) + h(\nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi v, \tau(\varphi)) \\
&= h(R(d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) v, d\varphi(e_i)) + e_i(h(\nabla_{e_i}^\varphi v, \tau(\varphi))) \\
&\quad - h(\nabla_{e_i}^\varphi v, \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)) \\
&= h(R(\tau(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i), v) + e_i(h(\nabla_{e_i}^\varphi v, \tau(\varphi))) \\
&\quad - e_i(h(v, \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi))) + h(v, \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi))
\end{aligned}$$

si on pose $\omega(\cdot) = h(\nabla_{e_i}^\varphi v, \tau(\varphi))$ et $\eta(\cdot) = h(v, \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi))$ deux 1-formes sur M , alors

$$\begin{aligned}
div \omega &= e_i(\omega(e_i)) = e_i(h(\nabla_{e_i}^\varphi v, \tau(\varphi))) \\
div \eta &= e_i(\eta(e_i)) = e_i(h(v, \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)))
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_D \frac{d}{dt} h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t))|_{t=0} v_g \\
&= \int_D \{ h(tr_g R(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi, v) + h(tr_g (\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi), v) \} v_g \\
&= \int_D h(\tau_2(\varphi), v) v_g
\end{aligned}$$

□

La première variation de la biénergie nous permet de caractériser les applications biharmoniques

Théorème 3.5.1. *Une application différentiable $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est biharmonique si et seulement si*

$$\tau_2(\varphi) = 0$$

Remarque 3.5.1. Soit l'application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ et $(U, x^i), (V, y^\alpha)$ deux cartes locales en p dans M et en $\varphi(p)$ dans N respectivement. Alors :

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi) = & g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \tau^\sigma}{\partial x^i \partial x^j} + 2 \frac{\partial \tau^\alpha \tau^\beta}{\partial x^j \partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^N + \tau^\alpha \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^N + \tau^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta \partial \Gamma_{\alpha\beta}^N}{\partial x^i \partial x^j} \right. \\ & \left. + \tau^\alpha \frac{\partial \tau^\beta \partial \tau^\rho}{\partial x^i \partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^N \Gamma_{\nu\rho}^N - \Gamma_{ij}^M \left(\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial x^i} + \tau^\alpha \frac{\partial \beta}{\partial x^K} \Gamma_{\alpha\beta}^N \right) - \tau^\nu \frac{\partial \varphi^\alpha \partial \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} R_{\beta\alpha\nu}^N \right) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \circ \varphi, \end{aligned}$$

où

$$\tau^\alpha = \Delta(\varphi^\alpha) + g^{ij} \Gamma_{\beta\delta}^N \frac{\partial \varphi^\beta \partial \varphi^\delta}{\partial x^i \partial x^j}$$

2) l'application φ est biharmonique si et seulement si $\tau(\varphi) \in \ker J_\varphi$, où

$$\begin{aligned} J_\varphi : \Gamma(\varphi^{-1}(TN)) &\longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(TN)) \\ V &\longmapsto J_\varphi(V) = \Delta^\varphi V + \text{tr}_g R^N(V, d\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (3.54)$$

où $\Delta^\varphi V = \text{tr}_g(\nabla^\varphi)^2 V$. On a :

$$\tau_2(\varphi) = -J_\varphi(\tau(\varphi)) = -(\Delta^\varphi \tau(\varphi) + \text{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi), \quad (3.55)$$

Théorème 3.5.2. (Deuxième variation de l'énergie) Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application harmonique entre deux variétés riemanniennes et D un domaine compacte de M . Si $\{\varphi_{t,s}\}$ est une variation de φ à support dans D , alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D) \Big|_{(t,s)=(0,0)} = \int_D h \left(-\text{trace}_g R^N(v, d\varphi) d\varphi - \text{trace}_g (\nabla^\varphi)^2 v, w \right) v_g,$$

où

$$v = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t} \Big|_{(t,s)=(0,0)}, \quad w = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s} \Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

dénote les champs de vecteurs de variation.

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ base orthonormée sur M . Posons

$$\phi : (x, t, s) \in M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \varphi_{t,s}(x) \in N,$$

$$E_i = (e_i, 0, 0), \quad \frac{\partial}{\partial t} = (0, \frac{d}{dt}, 0) \text{ et } \frac{\partial}{\partial s} = (0, 0, \frac{d}{ds}).$$

On a :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D) \Big|_{(t,s)=(0,0)} = \frac{1}{2} \int_D \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i), d\phi(E_i)) v_g \Big|_{(t,s)=(0,0)}. \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i), d\phi(E_i)) &= \frac{\partial}{\partial t} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\phi d\phi(E_i), d\phi(E_i)) \\ &= h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\phi d\phi(E_i), d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\phi d\phi(E_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(E_i)). \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\phi d\phi(E_i), d\phi(E_i)) &= h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi \nabla_{E_i}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\ &= h(R^N(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(E_i)) d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla_{E_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, E_i]}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D , définie sur M par :

$$\omega(X) = h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(X)\right), \quad X \in \Gamma(TM).$$

En tenant compte que φ est harmonique, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^m \{e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i}^M e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ e_i \left(h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i)\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ h\left(\nabla_{E_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\right) \right. \\ &\quad + h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i)\right) \\ &\quad \left. - h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i)\right) \right\}. \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ h\left(\nabla_{E_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\right) \right. \\ &\quad \left. + h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, \tau(\varphi)\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{E_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) \Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

D'après les formules (3.58) et (3.59), on a :

$$\sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\phi} d\phi(E_i), d\phi(E_i)\right)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \sum_{i=1}^m h(R^N(v, d\phi(e_i))w, d\phi(e_i)) + \operatorname{div}^M \omega. \quad (3.60)$$

En développant le deuxième terme à droite de l'égalité (3.57), on trouve :

$$\begin{aligned} h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\phi} d\phi(E_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(E_i)\right) &= h\left(\nabla_{E_i}^{\phi} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \nabla_{E_i}^{\phi} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \\ &= E_i\left(h\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \nabla_{E_i}^{\phi} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right) \\ &\quad - h\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \nabla_{E_i}^{\phi} \nabla_{E_i}^{\phi} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Si η désigne la 1-forme différentielle à support dans D , définie sur M par :

$$\eta(X) = h(w, \nabla_X^{\varphi} v), \quad X \in \Gamma(TM).$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M \eta &= \sum_{i=1}^m \{e_i(\eta(e_i)) - \eta(\nabla_{e_i}^M e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^m \{e_i(h(w, \nabla_{e_i}^{\varphi} v)) - h(w, \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^{\varphi} v)\}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

D'après les formules (3.61) et (3.62), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\phi} d\phi(E_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(E_i)\right)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \operatorname{div}^M \eta + \sum_{i=1}^m h(w, \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^{\varphi} v) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m h(w, \nabla_{e_i}^{\varphi} \nabla_{e_i}^{\varphi} v). \end{aligned} \quad (3.63)$$

En utilisant les formules (3.56), (3.57), (3.60), (3.63) et le théorème de Stokes, on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \int_D \sum_{i=1}^m \left\{ -h(R^N(v, d\phi(e_i))d\phi(e_i), w) \right. \\ &\quad \left. + h(w, \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^{\varphi} v) - h(w, \nabla_{e_i}^{\varphi} \nabla_{e_i}^{\varphi} v) \right\} v_g. \end{aligned}$$

□

3.6 Cas des applications conformes

Définition 3.6.1. Soient (M^n, g) et (N^n, h) des variétés riemannienne. Une application $\varphi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \longrightarrow (0, \infty)$ de classe C^∞ , telle que :

$$h(d\varphi(X), d\varphi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. La fonction λ est appelée dilatation de φ .

Proposition 3.6.1. *Soient (M^n, g) et (N^n, h) des variétés riemannienne. Si $\varphi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est une submersion conforme de dilatation λ , alors le champ de tension de φ est donné par l'équation :*

$$\tau(\varphi) = (2 - n) d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda).$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i}^M e_j = 0$ au point x , pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Au point x , on a :

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) &= \sum_{i=1}^n h(\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ e_i \left(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \right) - h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_j)) \right\}. \end{aligned}$$

Puisque φ est conforme de dilatation λ et $\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_j) = \nabla_{e_j}^\varphi d\varphi(e_i)$, alors :

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) &= \sum_{i=1}^n \left\{ e_i(\lambda^2) \left(g(e_i, e_j) \right) - h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi d\varphi(e_i)) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ 2\lambda^2 \left(g(e_i(\ln \lambda) e_i, e_j) \right) - \frac{1}{2} e_j(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))) \right\} \\ &= 2\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) - n\lambda^2 e_j(\ln \lambda) \\ &= 2\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) - n\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) \\ &= (2 - n)\lambda^2 g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) \\ &= (2 - n) h(d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda), d\varphi(e_j)). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.6.2. *Si $\varphi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une submersion conforme de dilatation λ , alors le champ de bi-tension de φ est donné par l'équation :*

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi) &= -(2 - n)^2 \nabla_{\text{grad}^M \ln \lambda}^\varphi d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda) - 2(2 - n) d\varphi(\text{Ricci}^M \text{grad}^M \ln \lambda) \\ &\quad - (2 - n) d\varphi(\text{grad}^M (\Delta^M \ln \lambda)) - 2(2 - n) \langle \nabla d\varphi, \nabla d \ln \lambda \rangle. \end{aligned}$$

où $\langle \nabla d\varphi, \nabla d \ln \lambda \rangle = \sum_{i,j=1}^n \nabla d\varphi(e_i, e_j) \nabla d \ln \lambda(e_i, e_j)$, relativement à $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée sur M .

Pour démontrer la Proposition 3.6.2, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.6.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ . Si $\gamma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ , alors :*

$$\begin{aligned} \text{trace}_g(\nabla^\varphi)^2 d\varphi(\text{grad}^M \gamma) &= \nabla_{\text{grad}^M \gamma}^\varphi \tau(\varphi) + 2 d\varphi(\text{Ricci}^M \text{grad}^M \gamma) + d\varphi(\text{grad}^M (\Delta^M \gamma)) \\ &\quad - \text{trace}_g R^N(d\varphi(\text{grad}^M \gamma), d\varphi) d\varphi + 2 \langle \nabla d\varphi, \nabla d\gamma \rangle, \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i}^M e_j = 0$ en x ($1 \leq i, j \leq n$). Au point x , on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla d\varphi, \nabla d\gamma \rangle &= \sum_{i,j=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_j) \nabla d\gamma(e_i, e_j) \\
 &= \sum_{i,j=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_j) g(\nabla_{e_i}^M \text{grad}^M \gamma, e_j). \\
 \text{trace}_g(\nabla^\varphi)^2 d\varphi(\text{grad}^M \gamma) &= \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(\text{grad}^M \gamma) \\
 &= \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\varphi \nabla d\varphi(e_i, \text{grad}^M \gamma) + \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(\nabla_{e_i}^M \text{grad}^M \gamma) \\
 &= \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\varphi \nabla d\varphi(e_i, \text{grad}^M \gamma) + \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, \nabla_{e_i}^M \text{grad}^M \gamma) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m d\varphi(\nabla_{e_i}^M \nabla_{e_i}^M \text{grad}^M \gamma) \\
 &= \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\varphi \nabla d\varphi(e_i, \text{grad}^M \gamma) + \langle \nabla d\varphi, \nabla d\gamma \rangle \\
 &\quad + d\varphi(\text{trace}_g(\nabla^M)^2 \text{grad}^M \gamma). \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Soit $\nabla^2 d\varphi$ la troisième forme fondamentale définie par :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla_X^\varphi \nabla d\varphi(Y, Z) - \nabla d\varphi(\nabla_X^\varphi Y, Z) - \nabla d\varphi(Y, \nabla_X^\varphi Z), \tag{3.65}$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. On a :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) &= \nabla^2 d\varphi(Z, Y, X) + d\varphi(R^M(Z, X)Y) \\
 &\quad - R^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y). \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

de la formule (3.66) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\varphi \nabla d\varphi(e_i, \text{grad}^M \gamma) &= \sum_{i=1}^m \nabla^2 d\varphi(e_i, e_i, \text{grad}^M \gamma) + \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, \nabla_{e_i}^M \text{grad}^M \gamma) \\
 &= \sum_{i=1}^m \nabla^2 d\varphi(\text{grad}^M \gamma, e_i, e_i) + \sum_{i=1}^m d\varphi(R^M(\text{grad}^M \gamma, e_i)e_i) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^m R^N(d\varphi(\text{grad}^M \gamma), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) + \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, \nabla_{e_i}^M \text{grad}^M \gamma) \\
 &= \nabla_{\text{grad}^M \gamma}^\varphi \tau(\varphi) + d\varphi(\text{Ricci}^M \text{grad}^M \gamma) \\
 &\quad - \text{trace}_g R^N(d\varphi(\text{grad}^M \gamma), d\varphi)d\varphi + \langle \nabla d\varphi, \nabla d\gamma \rangle. \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

En substituant la formule :

$$\text{trace}_g(\nabla^M)^2 \text{grad}^M \gamma = \text{Ricci}^M(\text{grad}^M \gamma) + \text{grad}^M(\Delta^M \gamma),$$

et la formule (3.67) dans (3.64), on déduit le Lemme 3.6.1. $\square$

Démonstration de la proposition 3.6.2. Par définition, on a :

$$\tau_2(\varphi) = -\text{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \text{trace}_g(\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi).$$

D'après la proposition 3.6.1, on a :

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi) = & -(2-n) \text{trace}_g R^N(d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda), d\varphi)d\varphi \\ & -(2-n) \text{trace}_g(\nabla^\varphi)^2 d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Du Lemme 3.6.1, on obtient :

$$\begin{aligned} -(2-n) \text{trace}_g(\nabla^\varphi)^2 d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda) = & -(2-n)^2 \nabla_{\text{grad}^M \ln \lambda}^\varphi d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda) \\ & -2(2-n) d\varphi(\text{Ricci}^M \text{grad}^M \ln \lambda) \\ & -(2-n) d\varphi(\text{grad}^M(\Delta^M \ln \lambda)) \\ & +(2-n) \text{trace}_g R^N(d\varphi(\text{grad}^M \ln \lambda), d\varphi)d\varphi \\ & -2(2-n) \langle \nabla d\varphi, \nabla d \ln \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (3.69)$$

En substituant la formule (3.69) dans (3.68), la Proposition 3.6.2 découle. $\square$

3.6.1 Exemples d'applications biharmoniques

Exemple 3.6.1. *Tout application harmonique et biharmonique.*

Exemple 3.6.2. *Considérons l'application différentiable :*

$$\begin{aligned} \varphi : (M, g) & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p & \longmapsto \varphi(p) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^n(p)). \end{aligned}$$

Alors $\tau_2(\varphi) = (\tau_2(\varphi^1), \dots, \tau_2(\varphi^n))$ donc φ biharmonique si et seulement si les applications $\varphi^i, i = 1, \dots, n$ sont biharmoniques.

Exemple 3.6.3. *Le simple exemple d'une application biharmonique, les polynômes de degrés 3 et 2 sur $\mathbb{R}$*

Exemple 3.6.4. *Soit l'application :*

$$\varphi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, h)$$

φ et biharmonique si et seulement si :

$$\text{tr}_g(\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi) + 2e(\varphi)\tau(\varphi) - \text{tr}_h h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = 0$$

En effet, remarque que la sphère unité $\mathbb{S}^n$ à courbure constante égale à 1 d'où d'après la formule :

$$R(X, Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{tr}_g R^{S^n}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi &= \text{tr}_g(h(d\varphi, d\varphi)\tau(\varphi) - h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi) \\ &= |d\varphi|^2 \tau(\varphi) - \text{tr}_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \\ &= 2e(\varphi)\tau(\varphi) - \text{tr}_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Exemple 3.6.5. Soit M^{n-1} une hypersurface de la sphère unité (S^n, h) , alors l'injection canonique $i : M^{n-1} \longrightarrow S^n$ munie de la métrique induite g est biharmonique. En effet on a :

$$\begin{aligned} \tau(i) &= \text{tr}_g \nabla di = \text{tr}_g B = H \\ \tau_2(i) &= \text{tr}_g (\nabla^i)^2 H + \text{tr}_g R^{S^n}(H, di)di \end{aligned}$$

est

$$H = (1 - n)\mathcal{N}.$$

Alors, pour une base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ sur M avec $(\nabla_{e_i}^M e_j)_x = 0, x \in M$ on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}_g (\nabla^i)^2 H &= (1 - n) \nabla_{e_i}^i \nabla_{e_i}^i \mathcal{N} = (1 - n) \nabla_{\tilde{e}_i}^{S^n} \nabla_{\tilde{e}_i}^{S^n} \mathcal{N} = (1 - n) \nabla_{\tilde{e}_i}^{S^n} \tilde{e}_i \\ &= (1 - n) ((\nabla_{\tilde{e}_i}^{S^n} \tilde{e}_i)^\perp + (\nabla_{\tilde{e}_i}^{S^n} \tilde{e}_i)^\top) \\ &= (1 - n)(H + \nabla_{e_i}^M e_i) = (1 - n)H \end{aligned}$$

et, comme S^n est courbure constante on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}_g R^{S^n}(H, di)di &= R^{S^n}(H, di(e_i))di(e_i) = R^{S^n}(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i \\ &= h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)H - h(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i \\ &= (n - 1)H - (1 - n)g(\mathcal{N}, e_i)e_i = (n - 1)H \end{aligned}$$

d'où : $\tau_2(i) = 0$

3.7 Tenseur bi-énergie impulsion

Définition 3.7.1. Soient $\varphi : (M^m, g), (N^n, h)$ des variétés riemanniennes et $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application de classe C^∞ . Le tenseur bi-énergie impulsion $S_2(\varphi) \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ associé à l'application φ est défini pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ par :

$$\begin{aligned} S_2(\varphi)(X, Y) &= -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X, Y) - \langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle g(X, Y) \\ &\quad + h(d\varphi(X), \nabla_Y^\varphi \tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla_X^\varphi \tau(\varphi)), \end{aligned} \quad (3.70)$$

où

$$\langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle = \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)),$$

relativement à une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_m\}$ sur M .

Proposition 3.7.1. Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , D un domaine compacte de M et $\{g_t\}$ une variation de classe C^∞ de g , alors :

$$\left. \frac{d}{dt} E_2(\varphi; D) \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_D \langle S_2(\varphi), \delta g \rangle v_g. \quad (3.71)$$

Pour la démonstration de la Proposition 3.7.1, on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.7.1 ([81]). Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $\{g_t\}$ une variation C^∞ de g . Le champ de vecteurs $\xi = (\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp - \frac{1}{2} \operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}_g(\delta g))$ satisfait :

$$\delta(|\tau(\varphi)|^2) = -2 \langle h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g \rangle - 2 h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)). \quad (3.72)$$

Démonstration. Localement, on a :

$$\delta(\tau(\varphi)^\alpha) = -g^{ai} g^{bj} \delta(g_{ab}) (\nabla d\varphi)_{ij}^\alpha - \xi^k \varphi_k^\alpha \quad (3.73)$$

$$\langle h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g \rangle = g^{ai} g^{bj} \delta(g_{ab}) (\nabla d\varphi)_{ij}^\alpha \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \quad (3.74)$$

$$h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)) = \xi^k \varphi_k^\alpha \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \delta(|\tau(\varphi)|^2) &= \delta(\tau(\varphi)^\alpha \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}) \\ &= 2 \delta(\tau(\varphi)^\alpha) \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} \\ &= -2 g^{ai} g^{bj} \delta(g_{ab}) (\nabla d\varphi)_{ij}^\alpha \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta} - 2 \xi^k \varphi_k^\alpha \tau(\varphi)^\beta h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Substituant les formules (3.74) et (3.75) dans (3.76), on obtient (3.72). $\square$

Lemme 3.7.2. Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , D un domaine compacte de M et $\{g_t\}$ une variation C^∞ de g . Si on pose

$$\xi = (\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp - \frac{1}{2} \operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g)),$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_D h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)) v_g &= \int_D \langle -\operatorname{sym}(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))) \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{div}^M(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp) g, \delta g \rangle v_g. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Démonstration. Soit $\omega = h(d\varphi, \tau(\varphi))$, alors :

$$\int_D \omega(\xi) v_g = \int_D \omega((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp) v_g - \frac{1}{2} \int_D \omega(\operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g))) v_g. \quad (3.78)$$

Le premier terme à droite de l'égalité (3.78) est donné par :

$$\begin{aligned} \int_D \omega((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp) v_g &= \int_D g(\omega^\sharp, (\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp) v_g \\ &= \int_D g^*(\omega, \operatorname{div}^M(\delta g)) v_g, \end{aligned}$$

où g^* est la métrique riemannienne induit sur T^*M .

D'autre part, si pour $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, on pose $C(\omega, \sigma) = \omega^i \sigma_{ij} dx^j$, on obtient :

$$g^*(\omega, \operatorname{div}^M \sigma) = \operatorname{div}^M(C(\omega, \sigma)^\sharp) - \langle \operatorname{sym}(\nabla \omega), \sigma \rangle. \quad (3.79)$$

Pour $\sigma = \delta g$, de la formule (3.79), on trouve :

$$\int_D \omega((\operatorname{div}^M(\delta g))^\sharp) v_g = - \int_D \langle \operatorname{sym}(\nabla \omega), \delta g \rangle. \quad (3.80)$$

Remarquant pour $\lambda \in C^\infty(M)$, on a :

$$\omega(\operatorname{grad}^M \lambda) = g^*(\omega, d\lambda). \quad (3.81)$$

Pour $\lambda = \operatorname{trace}(\delta g)$, de la formule (3.81) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_D \omega(\operatorname{grad}(\operatorname{trace}(\delta g))) v_g &= -\frac{1}{2} \int_D g^*(\omega, d(\operatorname{trace}(\delta g))) v_g \\ &= -\frac{1}{2} \int_D g(\omega^\sharp, \operatorname{grad}^M(\operatorname{trace}(\delta g))) v_g \\ &= \frac{1}{2} \int_D \operatorname{trace}(\delta g) \operatorname{div}^M(\omega^\sharp) v_g \\ &= \frac{1}{2} \int_D \langle \operatorname{div}^M(\omega^\sharp) g, \delta g \rangle v_g. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Substituant les formules (3.80) et (3.82) dans (3.78), on obtient (3.77). $\square$

Démonstration de la Proposition 3.7.1.

D'après la formule (3.72) et le Lemme 3.7.1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_2(\varphi; D) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_D \delta(|\tau(\varphi)|^2) v_g + \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 \delta(v_{g_t}) \\ &= \frac{1}{2} \int_D \left(-2 \langle h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g \rangle - 2h(d\varphi(\xi), \tau(\varphi)) \right) v_g \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_D \langle \frac{1}{2} |\tau(\varphi)|^2 g, \delta g \rangle v_g, \end{aligned}$$

et d'après le Lemme 3.7.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_2(\varphi; D) \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \int_D -2 \langle h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)), \delta g \rangle v_g + \frac{1}{2} \int_D \langle \frac{1}{2} |\tau(\varphi)|^2 g, \delta g \rangle v_g \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_D \left(\langle 2 \operatorname{sym}(\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))) - \operatorname{div}^M(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\sharp) g, \delta g \rangle \right) v_g. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Posons :

$$\begin{aligned} S_2(\varphi) &= -2h(\nabla d\varphi, \tau(\varphi)) + 2 \operatorname{sym} (\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi))) \\ &\quad - \operatorname{div}^M (h(d\varphi, \tau(\varphi))^\#)g + \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i}^M e_j = 0$ au point x , pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Au point x , on a :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sym} (\nabla h(d\varphi, \tau(\varphi)))(e_i, e_j) &= \nabla_{e_i}^\varphi h(d\varphi(e_j), \tau(\varphi)) + \nabla_{e_j}^\varphi h(d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) \\ &= 2h(\nabla d\varphi(e_i, e_j), \tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi)) \\ &\quad + h(d\varphi(e_j), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)), \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M (h(d\varphi, \tau(\varphi))^\#) &= \sum_{i=1}^m e_i (g(h(d\varphi, \tau(\varphi))^\#, e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i (h(d\varphi(e_i), \tau(\varphi))) \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ h(\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)) \right\} \\ &= |\tau(\varphi)|^2 + \langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle. \end{aligned} \quad (3.86)$$

En substituant les formules (3.85) et (3.86) dans (3.84) puis dans (3.83), on obtient (3.71)

□

Théorème 3.7.1. Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , alors :

$$\operatorname{div}^M S_2(\varphi) = -h(\tau_2(\varphi), d\varphi).$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i}^M e_j = 0$ au point x , ($1 \leq i, j \leq m$).

Si on note

$$S_2(\varphi) = T_1 + T_2$$

où $T_1, T_2 \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ sont deux champs de tenseurs définis par :

$$\begin{aligned} T_1(X, Y) &= -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X, Y) - \langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle g(X, Y), \\ T_2(X, Y) &= h(d\varphi(X), \nabla_Y^\varphi \tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla_X^\varphi \tau(\varphi)). \end{aligned}$$

Alor au point x , on a :

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div}^M T_1)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i(T_1(e_i, e_j)) \\
 &= \sum_{i=1}^m e_i\left(-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2\delta_{ij} - \langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle \delta_{ij}\right) \\
 &= -h(\nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi), \tau(\varphi)) - e_j(\langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle) \\
 &= -h(\nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi), \tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_j}^\varphi d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)). \\
 (\operatorname{div}^M T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i(T_2(e_i, e_j)) \\
 &= \sum_{i=1}^m e_i(h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_j), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi))) \\
 &= \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_j), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_j), \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)).
 \end{aligned}$$

Tenant compte qu'au point x , on a :

$$\begin{aligned}
 \tau(\varphi) &= \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_i) \quad \text{et} \quad \nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(e_j) = \nabla_{e_j}^\varphi d\varphi(e_i) \\
 \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi) - \nabla_{e_j}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi) &= R^N(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\tau(\varphi)
 \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div}^M T_1)(e_j) + (\operatorname{div}^M T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_j}^\varphi \tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_j), \nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi)) \\
 &= -h(\tau_2(\varphi), d\varphi).
 \end{aligned}$$

□

Du Théorème 3.7.1, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.7.1. Soient $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ .

1. Si φ est bi-harmonique, alors $\operatorname{div}^M S_2(\varphi) = 0$.
2. Si φ est une submersion et si $\operatorname{div}^M S_2(\varphi) = 0$, alors φ est bi-harmonique.

3.8 Théorème de Liouville des applications harmoniques

Théorème 3.8.1. *Soit (N^n, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ($\text{Sect}^N \leq 0$). Si $\varphi : (\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}) \longrightarrow (N^n, h)$ une application harmonique telle que :*

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 dx < \infty,$$

Alors φ est une application constante.

Démonstration. En utilisant la formule standard de Bochner pour l'application φ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta^{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 &= |\nabla d\varphi|^2 + \langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(\text{Ricci}^{\mathbb{R}^m} e_i), d\varphi(e_i)) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^m h(R^N(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) d\varphi(e_j), d\varphi(e_i)), \end{aligned} \quad (3.87)$$

où $|\nabla d\varphi|^2 = \sum_{i,j=1}^m h(\nabla d\varphi(e_i, e_j), \nabla d\varphi(e_i, e_j))$ et $\langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi) \rangle = \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i}^\varphi \tau(\varphi))$.

relativement à une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_m\}$ sur $\mathbb{R}^m$. Tenant compte que :

$$\tau(\varphi) = 0 \quad , \quad \text{Ricci}^{\mathbb{R}^m} = 0 \quad \text{et} \quad \text{Sect}^N \leq 0$$

, de la formule (3.87) on obtient :

$$\frac{1}{2} \Delta^{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 \geq |\nabla d\varphi|^2. \quad (3.88)$$

comme

$$\frac{1}{2} \Delta^{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 = |d\varphi| \Delta^{\mathbb{R}^m} |d\varphi| + |\text{grad}^{\mathbb{R}^m} |d\varphi||^2$$

d'après la formule (3.88) et l'inégalité de Kato ([39], [71]), on obtient l'inégalité :

$$|d\varphi| \Delta^{\mathbb{R}^m} |d\varphi| \geq |\nabla d\varphi|^2 - |\text{grad}^{\mathbb{R}^m} |d\varphi||^2 \geq 0.$$

Ainsi $|d\varphi|$ est une fonction sub-harmonique positive. C'est-à-dire :

$$|d\varphi| \geq 0, \quad \Delta^{\mathbb{R}^m} |d\varphi| \geq 0.$$

On déduit : $\int_{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 dx = \infty$ ou $|d\varphi|$ est constante (voir [119]).

Puisque $\text{Vol}(\mathbb{R}^m) = \infty$ et $E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 dx < \infty$, alors $|d\varphi| = 0$. □

Chapitre 4

Géométrie des variétés Produits

4.1 Variété Produit

Définition 4.1.1. Soient M et N deux variétés de classe C^∞ . Le produit $M \times N$ munie de l'atlas W défini par

$$W = \left\{ (U \times V, \varphi \times \phi) / (U, \varphi) \in \text{atl}(M), (V, \phi) \in \text{atl}(N) \right\}$$

est dit variété produit

Propriétés 4.1.1.

1. Les deux projections $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ sont des submersions.
2. Pour tout $(x, y) \in M \times N$ le sous-espace $M \times \{y\}$ et $\{x\} \times N$ sont deux sous-variétés de la variété produit $M \times N$.
3. Pour tout $(x, y) \in M \times N$ on a :

$$T_{(x,y)}M \times N \cong T_x M \times T_y N$$

.

4. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M et N respectivement, le couple (X, Y) défini par

$$\begin{aligned} (X, Y) : M \times N &\longrightarrow TM \times TN \\ (x, y) &\longmapsto (X_x, Y_y) \end{aligned}$$

est un champ de vecteurs sur la variété produit $M \times N$

Remarque 4.1.1. Les applications

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M \times N) \\ X &\longmapsto \tilde{X} = (X, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(N) &\longrightarrow \mathcal{H}(M \times N) \\ Y &\longmapsto \widehat{Y} = (0, Y)\end{aligned}$$

définissent des relèvements de champ de vecteurs à $H(M \times N)$ tel que :

$$\begin{aligned}d_{(x,y)}\pi(\widetilde{X}) &= X \circ \pi \quad \text{et} \quad d_{(x,y)}\eta(\widetilde{X}) = 0 \\ d_{(x,y)}\eta(\widehat{Y}) &= Y \circ \eta \quad \text{et} \quad d_{(x,y)}\pi(\widehat{Y}) = 0\end{aligned}$$

Proposition 4.1.1. Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ deux champs de vecteurs sur M et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$ deux champs de vecteurs sur N . Si $f \in C^\infty(M)$ et $g \in C^\infty(N)$ alors :

$$1) \widetilde{X}_1(f \circ \pi) = (X_1(f)) \circ \pi \quad \text{et} \quad \widetilde{X}_1(g \circ \eta) = 0$$

$$2) \widehat{Y}_1(g \circ \eta) = (Y_1(g)) \circ \eta \quad \text{et} \quad \widehat{Y}_1(f \circ \pi) = 0$$

$$3) \begin{cases} [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = ([X_1, X_2], 0) \\ [\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2] = (0, [Y_1, Y_2]) \\ [\widetilde{X}_1, \widehat{Y}_1] = 0 \end{cases}$$

$$4) [(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$$

$$5) f\widetilde{X}_1 = (f \circ \pi)\widetilde{X}_1 \quad \text{et} \quad g\widehat{Y}_1 = (g \circ \eta)\widehat{Y}_1$$

Remarque 4.1.2. Soient $(U, \varphi) \in \text{atl}(M)$ une carte de la variété M et $(V, \psi) \in \text{atl}(N)$ une carte de la variété N . Si $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ (resp $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n})$) désigne la base locale de champ de vecteurs relativement à la carte (U, φ) (resp (V, ψ)), alors

$$\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_1}} \dots \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_m}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial y_1}} \dots \widehat{\frac{\partial}{\partial y_n}} \right)$$

est la base locale de champ de vecteurs sur $M \times N$ relativement à la carte $(U \times V, \varphi \times \psi) \in \text{atl}(M \times N)$

Proposition 4.1.2. Soient M et N deux variétés. Si S_1 et S_2 sont deux tenseurs sur la variété produit $M \times N$ de type $(0, r)$ ou $(1, r)$, alors $S_1 = S_2$, si et seulement si, pour tout champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{H}(M)$ et $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{H}(N)$, on a

$$S_1(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r) = S_2(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_r)$$

et

$$S_1(\widehat{Y}_1, \dots, \widehat{Y}_r) = S_2(\widehat{Y}_1, \dots, \widehat{Y}_r)$$

4.1.1 Connexion linéaire produit

Proposition 4.1.3. *Soient M et N deux variétés. Si ∇^M et ∇^N sont deux connexions linéaires sur M et N respectivement, alors il existe une unique connexion linéaire ∇ sur $M \times N$ telle que pour tous $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, on a*

$$\begin{aligned}\nabla_{(X_1, Y_1)}(X_2, Y_2) &= \left(\nabla_{X_1}^M X_2, 0\right) + \left(0, \nabla_{Y_1}^N Y_2\right) \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} &= \left(\nabla_{X_1}^M X_2, 0\right) \\ \nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} &= \left(0, \nabla_{Y_1}^N Y_2\right) \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{Y_2} &= \nabla_{\widehat{Y_1}} \widetilde{X_2} = 0\end{aligned}$$

∇ est appelé connexion linéaire produit.

4.1.2 Tenseur de torsion produit

Proposition 4.1.4. *Soient ∇^M une connexion linéaire sur M et ∇^N une connexion linéaire sur N . Si T_M et T_N désignent les tenseurs de torsions sur M et N respectivement, alors le tenseur de torsion produit sur $M \times N$ est donné par*

$$T = \left(T_M, 0\right) + \left(0, T_N\right) = \left(T_M, T_N\right)$$

Preuve : De la Proposition 4.1.2, on a :

$$\begin{aligned}T(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) &= \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} - \nabla_{\widetilde{X_2}} \widetilde{X_1} - [\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}] \\ &= \left(\nabla_{X_1}^M X_2, 0\right) - \left(\nabla_{X_2}^M X_1, 0\right) - ([X_1, X_2], 0) \\ &= \left(\nabla_{X_1}^M X_2 - \nabla_{X_2}^M X_1 - [X_1, X_2], 0\right) \\ &= \left(T_M(X_1, X_2), 0\right) \\ &= (T_M, T_N)(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2})\end{aligned}$$

pour tout $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$, et

$$\begin{aligned}T(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) &= \nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} - \nabla_{\widehat{Y_2}} \widehat{Y_1} - [\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}] \\ &= \left(0, T_N(Y_1, Y_2)\right) \\ &= (T_M, T_N)(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2})\end{aligned}$$

pour tout $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$. □

4.1.3 Tenseur de courbure produit.

Proposition 4.1.5. Soient M une variété munie d'une connexion linéaire ∇^M et N une variété munie d'une connexion linéaire ∇^N . Si R_M et R_N désignent les tenseurs de courbures sur M et N respectivement, alors le tenseur de courbure produit sur la variété produit $M \times N$ est donné par

$$R = (R_M, R_N)$$

Preuve : même démonstration que la Proposition 4.1.4

Remarque 4.1.3. Des Propositions 4.1.4 et 4.1.5, on déduit :

1. La variété produit $M \times N$ est sans torsion si et seulement si les variétés M et N sont sans torsion.
2. La variété produit $M \times N$ est localement plate si et seulement si les variétés M et N sont localement plates.

4.1.4 Métrique produit (diagonale)

Définition 4.1.2. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement. On définit la métrique Riemannienne produit sur $M \times N$ par

$$G = \pi^*g + \eta^*h$$

où $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent la première et la deuxième projection canonique.

De la Définition 4.1.2, on déduit la proposition suivante

Proposition 4.1.6. Pour tout $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$ on a

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= g(X_1, Y_1) + h(X_2, Y_2) \\ G(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) &= g(X_1, X_2) \\ G(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) &= h(Y_1, Y_2) \\ G(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2}) &= 0 \end{aligned}$$

où $X = (X_1, Y_1)$ et $Y = (X_2, Y_2)$.

Proposition 4.1.7. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Si ∇^M (resp ∇^N) désigne la connexion de Levi-Civita sur M (resp N), alors la connexion de Levi-Civita sur la variété $M \times N$ associée à la métrique produit $G = \pi^*g + \eta^*h$ coïncide avec la connexion linéaire produit définie dans la Proposition 4.1.3, i.e :

$$\begin{cases} \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Y_1} = (\nabla_{X_1}^M Y_1, 0) \\ \nabla_{\widetilde{X_2}} \widehat{Y_2} = (0, \nabla_{X_2}^N Y_2) \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{X_2} = \nabla_{\widehat{X_2}} \widetilde{X_1} = 0 \end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$.

Preuve :

Utilisant la formule de Koszul

$$\begin{aligned}
\bullet G(\nabla_{\widetilde{X}_1} \widetilde{Y}_1, \widetilde{Z}_1) &= \frac{1}{2} \left\{ \widetilde{X}_1(G(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Z}_1)) + \widetilde{Y}_1(G(\widetilde{X}_1, \widetilde{Z}_1)) - \widetilde{Z}_1(G(\widetilde{X}_1, \widetilde{Y}_1)) \right. \\
&\quad \left. + G(\widetilde{Z}_1, [\widetilde{X}_1, \widetilde{Y}_1]) + G(\widetilde{Y}_1, [\widetilde{Z}_1, \widetilde{X}_1]) - G(\widetilde{X}_1, [\widetilde{Y}_1, \widetilde{Z}_1]) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ X_1(g(Y_1, Z_1)) + Y_1(g(X_1, Z_1)) - Z_1(g(X_1, Y_1)) \right. \\
&\quad \left. + g(Z_1, [X_1, Y_1]) + g(Y_1, [Z_1, X_1]) - g(X_1, [Y_1, Z_1]) \right\} \\
&= g(\nabla_{X_1}^M Y_1, Z_1) \\
&= G((\nabla_{X_1}^M Y_1, 0), \widetilde{Z}_1). \\
\bullet G(\nabla_{\widetilde{X}_1} \widetilde{Y}_1, \widehat{Z}_2) &= 0. \\
\bullet G(\nabla_{\widehat{X}_2} \widehat{Y}_2, \widetilde{Z}_1) &= 0. \\
\bullet G(\nabla_{\widehat{X}_2} \widehat{Y}_2, \widehat{Z}_2) &= \frac{1}{2} \left\{ \widehat{X}_2(G(\widehat{Y}_2, \widehat{Z}_2)) + \widehat{Y}_2(G(\widehat{X}_2, \widehat{Z}_2)) - \widehat{Z}_2(G(\widehat{X}_2, \widehat{Y}_2)) \right. \\
&\quad \left. + G(\widehat{Z}_2, [\widehat{X}_2, \widehat{Y}_2]) + G(\widehat{Y}_2, [\widehat{Z}_2, \widehat{X}_2]) - G(\widehat{X}_2, [\widehat{Y}_2, \widehat{Z}_2]) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ X_2(h(Y_2, Z_2)) + Y_2(h(X_2, Z_2)) - Z_2(h(X_2, Y_2)) \right. \\
&\quad \left. + h(Z_2, [X_2, Y_2]) + h(Y_2, [Z_2, X_2]) - h(X_2, [Y_2, Z_2]) \right\} \\
&= h(\nabla_{X_2}^N Y_2, Z_2) \\
&= G((0, \nabla_{X_2}^N Y_2), \widehat{Z}_2) \\
\bullet G(\nabla_{\widetilde{X}_1} \widehat{Y}_2, \widetilde{Z}_1) &= G(\nabla_{\widetilde{X}_1} \widehat{Y}_2, \widehat{Z}_2) = G(\nabla_{\widehat{X}_2} \widetilde{Y}_1, \widetilde{Z}_1) = G(\nabla_{\widehat{X}_2} \widetilde{Y}_1, \widehat{Z}_2) = 0
\end{aligned}$$

Des Proposition 4.1.5 et 4.1.6, on déduit

Proposition 4.1.8. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. alors le tenseur et la courbure de Ricci ainsi que la courbure scalaire sur la variété Riemannienne produit $(M \times N, G = \pi^*g + \eta^*h)$ sont donnés par :*

$$\begin{aligned} \text{Ricci}(X) &= (\text{Ricci}_M(X_1), \text{Ricci}_N(X_2)) \\ \text{Ric}(X, Y) &= \text{Ric}_M(X_1, Y_1) + \text{Ric}_N(X_2, Y_2) \\ S &= S_M + S_N \end{aligned}$$

Pour tout $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

4.1.5 L'Opérateur Laplacien produit

Remarques 4.1.1. :

1. Si $l_1 \in C^\infty(M)$, alors $l_1 \circ \pi \in C^\infty(M \times N)$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\pi} & M \\ & \searrow l_1 \circ \pi & \downarrow l_1 \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

2. Si $l_2 \in C^\infty(N)$, alors $l_2 \circ \eta \in C^\infty(M \times N)$

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\eta} & N \\ & \searrow l_2 \circ \eta & \downarrow l_2 \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

3. Si $\alpha \in C^\infty(M \times N)$, alors

$$\begin{aligned} \alpha_y : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \alpha(x, y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_x : N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \alpha(x, y) \end{aligned}$$

sont des applications de classe C^∞ .

Proposition 4.1.9. *Soient (M, g) et (N, h) des variétés Riemanniennes, alors*

$$\begin{aligned}\Delta(l_1 \circ \pi) &= \Delta_M(l_1) \circ \pi \\ \Delta(l_2 \circ \eta) &= \Delta_N(l_2) \circ \eta \\ (\Delta\alpha)(x, y) &= (\Delta_M\alpha_y)(x) + (\Delta_N\alpha_x)(y)\end{aligned}$$

Preuve : Si $(e_1, \dots, e_m)$ (resp $(e_{m+1}, \dots, e_{m+n})$) une base orthonormale locale de champ de vecteurs sur la variété Riemannienne (M, g) (resp (N, h)), alors $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m, \widehat{e_{m+1}}, \dots, \widehat{e_{m+n}})$ est une base orthonormale locale de la variété Riemannienne produit $(M \times N, G)$, et on a

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) &= \text{trace}(\nabla d\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{\tilde{e}_i} d\alpha)(\tilde{e}_i) + \sum_{i=m+1}^{n+m} (\nabla_{\widehat{e}_i} d\alpha)(\widehat{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^m (\tilde{e}_i(\tilde{e}_i(\alpha)) - \sum_{i=1}^m (d\alpha(\nabla_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_i) + \sum_{i=1+m}^{n+m} (\widehat{e}_i(\widehat{e}_i(\alpha)) - \sum_{i=1}^{n+m} (d\alpha(\nabla_{\widehat{e}_i} \widehat{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ (e_i(e_i(\alpha_y)) - d\alpha_y(\nabla_{e_i}^M e_i) \right\} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \left\{ (e_i(e_i(\alpha_x)) - d\alpha_x(\nabla_{e_i}^N e_i) \right\} \\ &= \Delta_M(\alpha_y) + \Delta_N(\alpha_x)\end{aligned}$$

□

4.2 Variété Produit Tordu

Définition 4.2.1. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de dimension m et n respectivement et $f \in C^\infty(M)$ une fonction strictement positive. La variété produit tordu $M \times_{f^2} N$ est définie comme étant la variété $M \times N$ munie de la métrique G_{f^2} telle que

$$G_{f^2} = \pi^*g + (f \circ \pi)^2 \eta^*h$$

où $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent les projections canoniques.

Si $X, Y \in H(M \times N)$ on a

$$G_{f^2}(X, Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + (f \circ \pi)^2 h(d\eta(X), d\eta(Y))$$

Remarque 4.2.1. Relativement à des cartes locales $(U, x^i) \in \text{atl}(M)$ et $(V, y^i) \in \text{atl}(N)$, la matrice associée à G_{f^2} est donnée par

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2 \cdot h_{lk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2} \cdot h^{lk} \end{pmatrix}$$

La connexion de levi-civita de $M \times_{f^2} N$ peut être maintenant rapprochée à celle de M et de N comme suit.

4.2.1 Connexion de Levi-Civita de la Variété Produit Tordu

Proposition 4.2.1. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes. Si ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associé à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ associée à la variété produit tordu $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ est donnée par

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2} X_1(f^2) \begin{pmatrix} 0, Y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) \begin{pmatrix} 0, X_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} h(X_2, Y_2) \begin{pmatrix} \text{grad}(f^2), 0 \end{pmatrix}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in H(M)$, $X_2, Y_2 \in H(N)$, $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

Preuve :

Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in H(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in H(N)$, on pose $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $Z = (Z_1, Z_2)$ des champs de vecteurs sur $M \times_{f^2} N$. De la formule de Koszul on obtient

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(G_{f^2}(Y, Z)) + Y(G_{f^2}(X, Z)) - Z(G_{f^2}(X, Y)) \\
&\quad + G_{f^2}(Z, [X, Y]) + G_{f^2}(Y, [Z, X]) - G_{f^2}(X, [Y, Z]) \\
&= X(g(Y_1, Z_1) \circ \pi + f^2 \circ \pi.h(Y_2, Z_2) \circ \eta) + \\
&\quad Y(g(X_1, Z_1) \circ \pi + f^2 \circ \pi.h(X_2, Z_2) \circ \eta) - \\
&\quad Z(g(X_1, Y_1) \circ \pi + f^2 \circ \pi.h(X_2, Y_2) \circ \eta) \\
&\quad + g(Z_1, [X_1, Y_1]) \circ \pi + f^2 \circ \pi.h(Z_2, [X_2, Y_2]) \circ \eta \\
&\quad + g(Y_1, [Z_1, X_1]) \circ \pi + f^2 \circ \pi.h(Y_2, [Z_2, X_2]) \circ \eta \\
&\quad - g(X_1, [Y_1, Z_1]) \circ \pi - f^2 \circ \pi.h(X_2, [Y_2, Z_2]) \circ \eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2g(\nabla_{X_1}^M Y_1, Z_1) \circ \pi + 2f^2 \circ \pi.h(\nabla_{X_2}^N Y_2, Z_2) \circ \eta \\
&\quad + X_1(f^2) \circ \pi.h(Y_2, Z_2) \circ \eta + Y_1(f^2) \circ \pi.h(X_2, Z_2) \circ \eta \\
&\quad - Z_1(f^2) \circ \pi.h(X_2, Y_2) \circ \eta \\
&= 2G_{f^2}((\nabla_{X_1}^M Y_1, \nabla_{X_2}^N Y_2), Z) + h(X_1(f^2) \circ \pi.Y_2 + Y_1(f^2) \circ \pi.X_2, Z_2) \circ \eta \\
&\quad - g(h(X_2, Y_2) \circ \eta.grad(f^2), Z_1) \circ \pi \\
&= 2G_{f^2}((\nabla_{X_1}^M Y_1, \nabla_{X_2}^N Y_2), Z) + G_{f^2}\left(\frac{X_1(f^2)}{f^2} \circ \pi.Y_2 + \frac{Y_1(f^2)}{f^2} \circ \pi.X_2, Z\right) \\
&\quad - G_{f^2}(h(X_2, Y_2) \circ \eta.grad(f^2), Z)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2G_{f^2}\left((\nabla_{X_1}^M Y_1, \nabla_{X_2}^N Y_2) + \left(\frac{X_1(f^2)}{2f^2} \circ \pi.Y_2 + \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \circ \pi.X_2\right.\right. \\
&\quad \left.\left.- \frac{1}{2}(h(X_2, Y_2) \circ \eta.grad(f^2), Z)\right)
\end{aligned}$$

□

4.2.2 Tenseur de Courbure du Produit Tordu

Proposition 4.2.2. Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Si R et $\tilde{R}$ désignent les tenseurs de courbures de la variété Riemannienne produit $(M \times N, G)$ et de la variété Riemannienne produit $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ respectivement, alors

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y) - R(X, Y) &= \frac{1}{2f^2} \left\{ \left(\nabla_{Y_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) \text{grad} f^2, 0 \right) \wedge_{G_{f^2}} (0, X_2) \right. \\ &\quad - \left(\nabla_{X_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} X_1(f^2) \text{grad} f^2, 0 \right) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2f^2} |\text{grad} f^2|^2 (0, X_2) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \right\}\end{aligned}$$

où

$$(X \wedge_{G_{f^2}} Y)Z = G_{f^2}(Z, Y)X - G_{f^2}(Z, X)Y$$

pour tout $X_1, Y_1 \in H(M)$, $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

Preuve :

Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in H(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in H(N)$, on pose $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $Z = (Z_1, Z_2)$

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{R}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))Z \\ &= \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1})Z + \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2})Z + \tilde{R}(\widehat{X_2}, \widetilde{Y_1})Z + \tilde{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})Z\end{aligned}$$

Développant chaque terme de la dernière équation

$$1) \quad \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1})Z = \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1})\widetilde{Z_1} + \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1})\widetilde{Z_2}$$

$$\begin{aligned}a) \quad \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1})\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}} \widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}]} \widetilde{Z_1} \\ &= \nabla_{X_1}^M \nabla_{Y_1}^M Z_1 - \nabla_{Y_1}^M \nabla_{X_1}^M Z_1 - \nabla_{[X_1, Y_1]}^M Z_1 \\ &= (R_M(X_1, Y_1)Z_1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \quad \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1})\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}} \widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}} \widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}]} \widehat{Z_2} \\ &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}} \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}} \frac{X_1(f^2)}{2f^2} \widehat{Z_2} - \frac{[X_1, Y_1](f^2)}{2f^2} \widehat{Z_2} \\ &= \left[X_1(Y_1(f^2)/2f^2) + \frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2} - Y_1(X_1(f^2)/2f^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2} - \frac{[X_1, Y_1](f^2)}{2f^2} \right] \widehat{Z_2} \\ &= 0\end{aligned}$$

de a) et b) on déduit que :

$$\tilde{R}(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1)Z = (R_M(X_1, Y_1)Z_1, 0) \quad (4.1)$$

$$2) \quad \tilde{R}(\tilde{X}_1, \hat{Y}_2)Z = \tilde{R}(\tilde{X}_1, \hat{Y}_2)\tilde{Z}_1 + \tilde{R}(\tilde{X}_1, \hat{Y}_2)\hat{Z}_2$$

$$\begin{aligned} a) \quad \tilde{R}(\tilde{X}_1, \hat{Y}_2)\tilde{Z}_1 &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1}\tilde{\nabla}_{\hat{Y}_2}\tilde{Z}_1 - \tilde{\nabla}_{\hat{Y}_2}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1}\tilde{Z}_1 - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}_1, \hat{Y}_2]}\tilde{Z}_1 \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1}\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\hat{Y}_2 - \tilde{\nabla}_{\hat{Y}_2}\widetilde{\nabla_{X_1}^M Z_1} \\ &= X_1(Z_1(f^2)/2f^2)\hat{Y}_2 + \frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2}\hat{Y}_2 - \frac{1}{2f^2}\nabla_{X_1}^M Z_1(f^2)\hat{Y}_2 \\ &= \frac{1}{2f^2}\left[X_1(Z_1(f^2)) - \nabla_{\tilde{X}_1}^M \tilde{Z}_1(f^2) - \frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{2f^2}\right]\hat{Y}_2 \\ &= \frac{1}{2f^2}\left[g\left(\nabla_{X_1}^M \text{grad}f^2, Z_1\right) - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}g\left(\text{grad}f^2, Z_1\right)\right]\hat{Y}_2 \\ &= g\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla_{X_1}^M \text{grad}f^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\text{grad}f^2\right], Z_1\right)\hat{Y}_2 \\ &= G_{f^2}\left(\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla_{X_1}^M \text{grad}f^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\text{grad}f^2\right], 0\right), (Z_1, 0)\right)(0, Y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \tilde{R}(\tilde{X}_1, \hat{Y}_2)\hat{Z}_2 &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1}\tilde{\nabla}_{\hat{Y}_2}\hat{Z}_2 - \tilde{\nabla}_{\hat{Y}_2}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1}\hat{Z}_2 - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}_1, \hat{Y}_2]}\hat{Z}_2 \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_1}(0, \nabla_{Y_2}^N Z_2) - \frac{h(Y_2, Z_2)}{2}(\text{grad}f^2, 0) - \tilde{\nabla}_{\hat{Y}_2}\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\hat{Z}_2 \\ &= \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\nabla_{Y_2}^N Z_2 - \frac{h(Y_2, Z_2)}{2}\nabla_{X_1}^M \text{grad}f^2 \\ &\quad - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\left[\nabla_{Y_2}^N Z_2 - \frac{h(Y_2, Z_2)}{2}\text{grad}f^2\right] \\ &= -\frac{h(Y_2, Z_2)}{2}\nabla_{X_1}^M \text{grad}f^2 + \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\frac{h(Y_2, Z_2)}{2}\text{grad}f^2 \\ &= -\frac{h(Y_2, Z_2)}{2}\left[\nabla_{X_1}^M \text{grad}f^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\text{grad}f^2\right] \\ &= -G_{f^2}\left((0, Y_2), (0, Z_2)\right)\left(\frac{1}{2f^2}\left[\nabla_{X_1}^M \text{grad}f^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\text{grad}f^2\right], 0\right) \end{aligned}$$

de a) et b) on déduit

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2})Z &= G_{f^2} \left(\left(\frac{1}{2f^2} [\nabla_{X_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2} \text{grad} f^2], 0 \right), (Z_1, 0) \right) (0, Y_2) \\ &\quad - G_{f^2} \left((0, Y_2), (0, Z_2) \right) \left(\frac{1}{2f^2} [\nabla_{X_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2} \text{grad} f^2], 0 \right) \\ \tilde{R}(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2})Z &= -\frac{1}{2f^2} \left(\nabla_{X_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) \text{grad} f^2, 0 \right) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \quad (4.2)\end{aligned}$$

$$3) \quad \tilde{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})Z = \tilde{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})\widetilde{Z_1} + \tilde{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})\widehat{Z_2}$$

$$\begin{aligned}a) \quad \tilde{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}} \widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}} \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} \widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}]} \widetilde{Z_1} \\ &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} \frac{1}{2f^2} Z_1(f^2) \widehat{Y_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}} \frac{1}{2f^2} Z_1(f^2) \widehat{X_2} - \frac{1}{2f^2} Z_1(f^2) [X_2, Y_2] \\ &= \frac{1}{2f^2} Z_1(f^2) \left[(0, \nabla_{X_2}^N Y_2) - \frac{h(Y_2, X_2)}{2} (\text{grad} f^2, 0) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2f^2} Z_1(f^2) \left[(0, \nabla_{Y_2}^N X_2) - \frac{h(Y_2, X_2)}{2} (\text{grad} f^2, 0) \right] - \frac{1}{2f^2} Z_1(f^2) (0, [X_2, Y_2]) \\ &= \frac{1}{2f^2} Z_1(f^2) \left(0, (\nabla_{X_2}^N Y_2) - \nabla_{Y_2}^N X_2 - [X_2, Y_2] \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \quad \tilde{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}} \widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}} \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} \widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}]} \widehat{Z_2} \\ &= (0, R_N(X_2, Y_2) Z_2) \\ &\quad - \frac{|\text{grad} f^2|^2}{4f^4} \left[G_{f^2}((0, Y_2), (0, Z_2))(0, X_2) - G_{f^2}((0, X_2), (0, Z_2))(0, Y_2) \right] \\ &= (0, R_N(X_2, Y_2) Z_2) - \frac{1}{4f^4} |\text{grad} f^2|^2 (0, X_2) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}} \widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} \left((0, \nabla_{Y_2}^N Z_2) - \frac{h(Y_2, Z_2)}{2} (\text{grad} f^2, 0) \right) \\ &= (0, \nabla_{X_2}^N \nabla_{Y_2}^N Z_2) - \frac{h(X_2, \nabla_{Y_2}^N Z_2)}{2} (\text{grad} f^2, 0) - \frac{h(Y_2, Z_2)}{2} \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}} (\text{grad} f^2, 0) \\ &\quad - \frac{X_2(h(Y_2, Z_2))}{2} (\text{grad} f^2, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y}_2} \widetilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} \widehat{Z}_2 &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y}_2} \left((0, \nabla_{X_2}^N Z_2) - \frac{h(X_2, Z_2)}{2} (gradf^2, 0) \right) \\
&= \left(0, \nabla_{Y_2}^N \nabla_{X_2}^N Z_2 \right) - \frac{h(Y_2, \nabla_{X_2}^N Z_2)}{2} (gradf^2, 0) - \frac{h(X_2, Z_2)}{2} \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y}_2} (gradf^2, 0) \\
&\quad - \frac{Y_2(h(X_2, Z_2))}{2} (gradf^2, 0)
\end{aligned}$$

$$-\widetilde{\nabla}_{[\widehat{X}_2, \widehat{Y}_2]} \widehat{Z}_2 = -\left(0, \nabla_{[X_2, Y_2]}^N Z_2 \right) + \frac{h([X_2, Y_2], Z_2)}{2} (gradf^2, 0)$$

$$\widetilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} (gradf^2, 0) = \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2} (0, X_2) = \frac{1}{2f^2} |gradf^2|^2 (0, X_2)$$

$$\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y}_2} (gradf^2, 0) = \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2} (0, Y_2) = \frac{1}{2f^2} |gradf^2|^2 (0, Y_2)$$

$$-h(X_2, \nabla_{Y_2}^N Z_2) - X_2(h(Y_2, Z_2)) + h(Y_2, \nabla_{X_2}^N Z_2) + Y_2(h(X_2, Z_2)) + h([X_2, Y_2], Z_2) = 0$$

D'où

$$\widetilde{R}(\widehat{X}_2, \widehat{Y}_2)Z = \left(0, R_N(X_2, Y_2)Z_2 \right) - \frac{1}{4f^2} |gradf^2|^2 (0, X_2) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \quad (4.3)$$

$$4) \quad \widetilde{R}(\widehat{X}_2, \widetilde{Y}_1)Z = \widetilde{R}(\widehat{X}_2, \widetilde{Y}_1)\widetilde{Z}_1 + \widetilde{R}(\widehat{X}_2, \widetilde{Y}_1)\widehat{Z}_2$$

$$\begin{aligned}
a) \quad \widetilde{R}(\widehat{X}_2, \widetilde{Y}_1)\widetilde{Z}_1 &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}_1} \widetilde{Z}_1 - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}_1} \widetilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} \widetilde{Z}_1 - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X}_2, \widetilde{Y}_1]} \widetilde{Z}_1 \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} (\nabla_{Y_1}^M Z_1, 0) - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}_1} \frac{Z_1(f^2)}{2f^2} \widehat{X}_2 \\
&= \frac{\nabla_{Y_1}^M Z_1(f^2)}{2f^2} \widehat{X}_2 - Y_1 \left(\frac{Z_1(f^2)}{2f^2} \right) \widehat{X}_2 - \frac{Z_1(f^2)}{2f^2} \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \widehat{X}_2 \\
&= \left[\frac{\nabla_{Y_1}^M Z_1(f^2)}{2f^2} + \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^4} - \frac{Y_1(Z_1(f^2))}{2f^2} - \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{4f^4} \right] \widehat{X}_2 \\
&= \frac{1}{2f^2} \left[\nabla_{Y_1}^M Z_1(f^2) - Y_1(Z_1(f^2)) + \frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^2} \right] \widetilde{X}_2 \\
&= \frac{1}{2f^2} \left[-g\left(\nabla_{Y_1}^M gradf^2, Z_1 \right) + \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} g\left(gradf^2, Z_1 \right) \right] \widehat{X}_2 \\
&= -G_{f^2} \left(\frac{1}{2f^2} \left[\nabla_{Y_1}^M gradf^2 - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} gradf^2 \right], Z_1 \right) (0, X_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad \tilde{R}(\widehat{X}_2, \widehat{Y}_1) \widehat{Z}_2 &= \tilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} \tilde{\nabla}_{\widehat{Y}_1} \widehat{Z}_2 - \tilde{\nabla}_{\widehat{Y}_1} \tilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} \widehat{Z}_2 - \tilde{\nabla}_{[\widehat{X}_2, \widehat{Y}_1]} \widehat{Z}_2 \\
&= \tilde{\nabla}_{\widehat{X}_2} \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \widehat{Z}_2 - \tilde{\nabla}_{\widehat{Y}_1} \left((0, \nabla_{X_2}^N Z_2) - \frac{h(X_2, Z_2)}{2} \text{grad} f^2, 0 \right) \\
&= \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \left[\nabla_{X_2}^N Z_2 - \frac{h(X_2, Z_2)}{2} \text{grad} f^2 \right] \\
&\quad - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \nabla_{X_2}^N Z_2 + \frac{h(X_2, Z_2)}{2} \nabla_{Y_2}^M \text{grad} f^2 \\
&= \frac{h(X_2, Z_2)}{2} \left[\nabla_{Y_2}^M \text{grad} f^2 - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \text{grad} f^2 \right] \\
&= G_{f^2} \left((0, X_2), (0, Z_2) \right) \left(\frac{1}{2f^2} \left[\nabla_{Y_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \text{grad} f^2 \right], 0 \right)
\end{aligned}$$

De a) et b) on déduit

$$\tilde{R}(\widehat{X}_2, \widehat{Y}_1) Z = \frac{1}{2f^2} \left(\nabla_{Y_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) \text{grad} f^2, 0 \right) \wedge_{G_{f^2}} (0, X_2) \quad (4.4)$$

Des formules (1.5), (1.6), (1.7) et (1.8) on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y) - R(X, Y) &= \frac{1}{2f^2} \left\{ \left(\nabla_{Y_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) \text{grad} f^2, 0 \right) \wedge_{G_{f^2}} (0, X_2) \right. \\
&\quad - \left(\nabla_{X_1}^M \text{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) \text{grad} f^2, 0 \right) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2f^2} |\text{grad} f^2|^2 (0, X_2) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \right\}
\end{aligned}$$

4.2.3 L'Opérateur Laplacien dans le Produit Tordu

Proposition 4.2.3. Soient $(M, g), (N, h)$ deux variétés riemanniennes. Δ_M, Δ_N désignent les opérateurs laplaciens sur M et N respectivement. Si

$$\begin{aligned}
\alpha : M \times_{f^2} N &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longmapsto \alpha(x, y)
\end{aligned}$$

est une application de classe C^∞ , alors

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \left(\Delta_M(\alpha_y), 0 \right) + \left(0, \frac{1}{f^2} \Delta_N(\alpha_x) \right) + n \left(d\alpha_y(\text{grad} \ln f), 0 \right)$$

où $\tilde{\Delta}$ désigne l'opérateur laplacien sur la variété produit tordu $M \times_{f^2} N$.

Pour simplifier, on écrit

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \Delta_M(\alpha) + \frac{1}{f^2} \Delta_N(\alpha) + n \cdot d_M \alpha(\text{grad} \ln f)$$

Preuve : Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ (resp $\{b_{m+1}, \dots, b_{n+m}\}$) une base locale ortonormale sur M (resp N). On pose

$$h_i = \begin{cases} \tilde{e}_i = (e_i, 0), & si \quad i = 1, \dots, m \\ \frac{1}{f} \tilde{b}_{i-m} = \frac{1}{f} (0, b_{i-m}), & si \quad i = m+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Alors $\{h_1, \dots, h_{m+n}\}$ est une base locale ortonormale sur la variété produit tordue $M \times_{f^2} N$. On a

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \sum_{i=1}^{m+n} h_i(h_i(\alpha) - (\nabla_{h_i} h_i)(\alpha)).$$

Remarquons que $\tilde{b}_i(f) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\alpha) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \tilde{e}_i(\tilde{e}_i(\alpha)) - (\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_i)(\alpha) \right\} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \left\{ \frac{1}{f^2} \tilde{b}_i(\tilde{b}_i(\alpha)) - \frac{1}{f^2} (\tilde{\nabla}_{\tilde{b}_i} \tilde{b}_i)(\alpha) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ (e_i(e_i(\alpha_y)), 0) - ((\nabla_{e_i}^M e_i)(\alpha_y), 0) \right\} + \frac{1}{f^2} \sum_{i=m+1}^{m+n} \left\{ (0, b_i(b_i(\alpha_x))) - (0, (\nabla_{b_i}^N b_i)(\alpha_x)) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2f^2} \sum_{i=m+1}^{m+n} h(b_i, b_i)((grad f^2)(\alpha_y), 0) \\ &= (\Delta_M(\alpha_y), 0) + \frac{1}{f^2} (0, \Delta_N(\alpha_x)) + \frac{n}{2f^2} ((grad f^2)(\alpha_y), 0) \\ &= \left(\Delta_M(\alpha_y), 0 \right) + \frac{1}{f^2} \left(0, \Delta_N(\alpha_x) \right) + \frac{n}{2f^2} \left(d\alpha_y(grad f^2), 0 \right) \\ &= \left(\Delta_M(\alpha_y), 0 \right) + \frac{1}{f^2} \left(0, \Delta_N(\alpha_x) \right) + n \left(d\alpha_y(grad \ln f), 0 \right) \end{aligned}$$

De la Proposition 4.2.3, on déduit.

Corollaire 4.2.1.

– α harmonique si et seulement si

$$\begin{cases} \bullet \quad \alpha_x, \alpha_y \text{ sont harmoniques;} \\ \bullet \quad d\alpha_y(grad \ln f) = 0 \end{cases}$$

– Si f est constante, alors α harmonique si et seulement si α_x et α_y sont harmoniques.
i.e

$$(\tilde{\Delta}(\alpha) = 0) \Leftrightarrow (\Delta_M(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_N(\alpha) = 0).$$

pour tout $x \in M$ et $y \in N$.

4.2.4 L'Opérateur Bilaplacien dans le Produit Tordu

Définition 4.2.2. soit $(P, \hbar)$ une variété Riemannienne. L'Opérateur Bilaplacien d'une application $\varphi : (P, \hbar) \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$\Delta^2(\alpha) = \Delta(\Delta(\alpha))$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien sur la variété $(P, \hbar)$.

Proposition 4.2.4.

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^2(\alpha) &= \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}(\alpha)) \\ &= \Delta_M^2(\alpha) + \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(\alpha) + \frac{1}{f^2}\left[\Delta_M(\Delta_N(\alpha)) + \Delta_N(\Delta_M(\alpha))\right] + \frac{4-2n}{f^2}\Delta_N(\alpha)|\text{grad} \ln f|^2 \\ &\quad + \frac{n-2}{f^2}d \ln f \left(\text{grad} \Delta_N(\alpha)\right) + n\left(\Delta_M + \frac{1}{f^2}\Delta_N\right)\left(d_M \alpha(\text{grad} \ln f)\right) - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Delta_M(\ln f) \\ &\quad + nd \ln f \left(\text{grad} \left(\Delta_M(\alpha) + nd_M \alpha(\text{grad} \ln f)\right)\right) \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^2(\alpha) &= \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}(\alpha)) \\ &= \underbrace{\Delta_M(\tilde{\Delta}(\alpha))}_{T_1} + \frac{1}{f^2} \underbrace{\Delta_N(\tilde{\Delta}(\alpha))}_{T_2} + n \cdot \underbrace{d_M(\tilde{\Delta}(\alpha)) \left(\text{grad} \ln f\right)}_{T_3} \end{aligned}$$

1) Calcul de T_1

$$\begin{aligned} T_1 &= \Delta_M(\tilde{\Delta}(\alpha)) \\ &= \Delta_M\left(\Delta_M(\alpha)\right) + \Delta_M\left(\frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha)\right) + n\Delta_M\left(d_M \alpha(\text{grad} \ln f)\right) \\ &= \Delta_M^2(\alpha) + \Delta_M\left(\frac{1}{f^2}\right)\Delta_N(\alpha) + \frac{1}{f^2}\Delta_M\left(\Delta_N(\alpha)\right) + 2g\left(\text{grad} \frac{1}{f^2}, \text{grad} \Delta_N(\alpha)\right) \\ &\quad + n\Delta_M\left(d_M \alpha(\text{grad} \ln f)\right) \\ &= \Delta_M^2(\alpha) + \frac{4}{f^2}\Delta_N(\alpha)|\text{grad} \ln f|^2 - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Delta_M(\ln f) + \frac{1}{f^2}\Delta_M\left(\Delta_N(\alpha)\right) \\ &\quad - \frac{2}{f^2}d_M \ln f \left(\text{grad}_M \Delta_N(\alpha)\right) + n\Delta_M\left(d_M \alpha(\text{grad} \ln f)\right) \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{1}{f^2} &= \frac{-2}{f^2} \text{grad} \ln f \\ \Delta_M\left(\frac{1}{f^2}\right) &= \frac{2}{f^2} \left(2|\text{grad} \ln f|^2 - \Delta_M(\ln f)\right) \\ |\text{grad} \ln f|^2 &= g(\text{grad} \ln f, \text{grad} \ln f). \end{aligned}$$

2) Calcul de T_2

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \Delta_N(\tilde{\Delta}(\alpha)) \\
 &= \Delta_N(\Delta_M(\alpha)) + \Delta_N\left(\frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha)\right) + n\Delta_N(d_M\alpha(\text{grad}\ln f)) \\
 &= \Delta_N(\Delta_M(\alpha)) + \frac{1}{f^2}\Delta_N^2(\alpha) + n\Delta_N(d_M\alpha(\text{grad}\ln f)) \\
 \frac{1}{f^2}T_2 &= \frac{1}{f^2}\Delta_N(\Delta_M(\alpha)) + \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(\alpha) + \frac{n}{f^2}\Delta_N(d_M\alpha(\text{grad}\ln f))
 \end{aligned}$$

3) Calcul de T_3

$$\begin{aligned}
 T_3 &= d_M(\tilde{\Delta}(\alpha))(\text{grad}\ln f) \\
 &= g\left(\text{grad}\left(\Delta_M(\alpha) + \frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha) + nd_M\alpha(\text{grad}\ln f)\right), \text{grad}\ln f\right) \\
 &= g\left(\text{grad}\Delta_M(\alpha), \text{grad}\ln f\right) + g\left(\text{grad}\frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha), \text{grad}\ln f\right) \\
 &\quad + ng\left(\text{grad}(d_M\alpha(\text{grad}\ln f)), \text{grad}\ln f\right) \\
 &= d_M\ln f\left(\text{grad}(\Delta_M(\alpha)) + \frac{1}{f^2}d_M\ln f\left(\text{grad}\Delta_N(\alpha)\right)\right) \\
 &\quad - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)|\text{grad}\ln f|^2 + nd_M\ln f\left(\text{grad}(d_M\alpha(\text{grad}\ln f))\right)
 \end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Delta}^2(\alpha) &= \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}(\alpha)) \\
 &= \Delta_M^2(\alpha) + \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(\alpha) + \frac{1}{f^2}\left[\Delta_M(\Delta_N(\alpha)) + \Delta_N(\Delta_M(\alpha))\right] + \frac{4-2n}{f^2}\Delta_N(\alpha)|\text{grad}\ln f|^2 \\
 &\quad + \frac{n-2}{f^2}d\ln f\left(\text{grad}\Delta_N(\alpha)\right) + n\left(\Delta_M + \frac{1}{f^2}\Delta_N\right)(d_M\alpha(\text{grad}\ln f)) - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Delta_M(\ln f) \\
 &\quad + nd\ln f\left(\text{grad}\left(\Delta_M(\alpha) + nd_M\alpha(\text{grad}\ln f)\right)\right)
 \end{aligned}$$

□

Applications I :

Soient $l_1 \in C^\infty(M)$ et $l_2 \in C^\infty(N)$ alors $l_1 \circ \pi \in C^\infty(M \times_{f^2} N)$ et $l_2 \circ \eta \in C^\infty(M \times_{f^2} N)$

Proposition 4.2.5.

$$\tilde{\Delta}(l_1 \circ \pi) = \Delta_M(l_1) \circ \pi + n.dl_1(\text{grad}\ln f) \circ \pi \quad (4.5)$$

$$\tilde{\Delta}(l_2 \circ \eta) = \frac{1}{f^2}\Delta_N(l_2) \circ \eta \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^2(l_1 \circ \pi) &= \Delta_M^2(l_1) \circ \pi + n \left[\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + d(\ln f)(grad \Delta_M(l_1) \circ \pi) \right] \\ &\quad + n^2 d \ln f \left(grad(d_M l_1(grad \ln f)) \right)\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^2(l_2 \circ \eta) &= \frac{1}{f^4} \Delta_N^2(l_2) \circ \eta + \frac{4-2n}{f^2} \Delta_N(l_2) |grad \ln f|^2 \\ &\quad - \frac{2}{f^2} \Delta_N(l_2) \Delta_M(\ln f)\end{aligned}\quad (4.8)$$

Corollaire 4.2.2. *Si l_1 et l_2 sont harmoniques, alors*

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(l_1 \circ \pi) &= n \cdot dl_1(grad \ln f) \circ \pi \\ \tilde{\Delta}(l_2 \circ \eta) &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^2(l_1 \circ \pi) &= n \cdot \Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + n^2 d \ln f \left(grad(d_M l_1(grad \ln f)) \right) \\ \tilde{\Delta}^2(l_2 \circ \eta) &= 0.\end{aligned}$$

Corollaire 4.2.3. :

- 1) si l_2 harmonique alors $l_2 \circ \eta$ harmonique (donc biharmonique)
- 2) si f est constante alors $l_1 \circ \pi$ harmonique (donc biharmonique)
- 3) si l_1 harmonique, alors $l_1 \circ \pi$ est biharmonique non harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}dl_1(grad \ln f) &\neq 0, \\ \Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + n d \ln f \left(grad(d_M l_1(grad \ln f)) \right) &= 0.\end{aligned}$$

Applications II :

Soient $l_1 \in C^\infty(M)$ et $l_2 \in C^\infty(N)$, alors il existe $\alpha \in C^\infty(M \times_{f^2} N)$ définie par :

$$\begin{aligned}\alpha : M \times_{f^2} N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \alpha(x, y) = l_1(x) \cdot l_2(y)\end{aligned}$$

Proposition 4.2.6.

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \left(l_2 \Delta_M(l_1), 0 \right) + \left(0, \frac{l_1}{f^2} \Delta_N(l_2) \right) + n l_2 \left(dl_1(grad \ln f), 0 \right)$$

En abreviation, on note

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = l_2 \left[\Delta_M(l_1) + n \cdot dl_1(grad \ln f) \right] + \frac{l_1}{f^2} \Delta_N(l_2)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^2(\alpha) &= \tilde{\Delta} \left(\tilde{\Delta}(l_1 \cdot l_2) \right) \\ &= l_2^2 \Delta_M^2(l_1) + \frac{l_1^2}{f^4} \Delta_N^2(l_2) \\ &\quad + \frac{2}{f^2} \Delta_N(l_2) \left[\Delta_M(l_1) + (n-1) \cdot dl_1(grad \ln f) + l_1(2-n) \cdot |grad \ln f|^2 - l_1 \Delta_M(\ln f) \right] \\ &\quad + n \cdot l_2 \left[d \ln f \left(grad \left(\Delta_M(l_1) + n \cdot dl_1(grad \ln f) \right) \right) + \Delta_M(dl_1(grad \ln f)) \right]\end{aligned}$$

Preuve :

D'après le Proposition 4.2.3

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \left(\Delta_M(\alpha_y), 0 \right) + \left(0, \frac{1}{f^2} \Delta_N(\alpha_x) \right) + n \left(d\alpha_y(\text{grad} \ln f), 0 \right)$$

pour $\alpha(x, y) = l_1(x)l_2(y)$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\alpha) &= \tilde{\Delta}(l_1.l_2) \\ &= \left(\Delta_M(l_1.l_2), 0 \right) + \left(0, \frac{1}{f^2} \Delta_N(l_1.l_2) \right) + n \left(d(l_1.l_2)(\text{grad} \ln f), 0 \right) \\ &= \left(l_2.\Delta_M(l_1), 0 \right) + \left(0, \frac{l_1}{f^2} \Delta_N(l_2) \right) + n.l_2 \left(d(l_1)(\text{grad} \ln f), 0 \right) \\ &= l_2 \left[\Delta_M(l_1) + n.dl_1(\text{grad} \ln f) \right] + \frac{l_1}{f^2} \Delta_N(l_2) \end{aligned}$$

avec

$$\text{grad}(l_1.l_2) = l_2.\text{grad}l_1 + l_1.\text{grad}l_2$$

$$\begin{aligned} \Delta_M(l_1.l_2) &= l_2.\Delta_M(l_1) + \underbrace{l_1.\Delta_M(l_2)}_{=0} + \underbrace{2g(\text{grad}l_1, \text{grad}l_2)}_{=0} \\ &= l_2.\Delta_M(l_1) \\ \Delta_N(l_1.l_2) &= l_1.\Delta_N(l_2) + l_2.\underbrace{\Delta_N(l_1)}_{=0} + \underbrace{2h(\text{grad}l_1, \text{grad}l_2)}_{=0} \\ &= l_1.\Delta_N(l_2) \end{aligned}$$

et D'après le Proposition 4.2.4

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^2(l_1.l_2) &= \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta}(l_1.l_2)) \\ &= \Delta_M^2(l_1.l_2) + \frac{1}{f^4} \Delta_N^2(l_1.l_2) + \frac{1}{f^2} \left[\Delta_M(\Delta_N(l_1.l_2)) + \Delta_N(\Delta_M(l_1.l_2)) \right] \\ &\quad + \frac{n-2}{f^2} d \ln f \left(\text{grad} \Delta_N(l_1.l_2) \right) + \frac{4-2n}{f^2} \Delta_N(l_1.l_2) | \text{grad} \ln f |^2 \\ &\quad - \frac{2}{f^2} \Delta_N(l_1.l_2) \Delta_M(\ln f) + n \left(\Delta_M + \frac{1}{f^2} \Delta_N \right) \left(d_M(l_1.l_2)(\text{grad} \ln f) \right) \\ &\quad + nd \ln f \left(\text{grad} \left(\Delta_M(l_1.l_2) + nd_M l_1.l_2(\text{grad} \ln f) \right) \right) \end{aligned}$$

avec

$$\Delta_M(\Delta_N(l_1.l_2)) + \Delta_N(\Delta_M(l_1.l_2)) = 2\Delta_M(l_1).\Delta_N(l_2)$$

$$\begin{aligned} d \ln f \left(\text{grad} \Delta_N(l_1.l_2) \right) &= g(\text{grad} \ln f, \text{grad} \Delta_N(l_1.l_2)) \\ &= \Delta_N(l_2).g(\text{grad} \ln f, \text{grad}(l_1)) + l_1 g(\text{grad} \ln f, \text{grad}(\Delta_N(l_2))) \\ &= \Delta_N(l_2).dl_1(\text{grad} \ln f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_M(d_M(l_1.l_2)(grad \ln f)) &= l_2.\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) \\
\Delta_N(d_M(l_1.l_2)(grad \ln f)) &= \Delta_N(l_2).dl_1(grad \ln f) \\
d \ln f \left(grad \left(\Delta_M(l_1.l_2) + nd_M(l_1.l_2)(grad \ln f) \right) \right) &= l_2 d \ln f \left(grad \left(\Delta_M(l_1) + n.dl_1(grad \ln f) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}^2(l_1.l_2) &= l_2^2.\Delta_M^2(l_1) + \frac{l_1^2}{f^4}.\Delta_N^2(l_2) + \frac{2}{f^2}\Delta_M(l_1)\Delta_N(l_2) \\
&\quad + \frac{n-2}{f^2}dl_1(grad \ln f).\Delta_N(l_2) + \frac{(4-2n)l_1}{f^2}\Delta_N(l_2)|grad \ln f|^2 \\
&\quad - \frac{2l_1}{f^2}\Delta_N(l_2)\Delta_M(\ln f) + nl_2.\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + \frac{n}{f^2}\Delta_N(l_2).dl_1(grad \ln f) \\
&\quad + n(l_2).d \ln f \left(grad \left(\Delta_M(l_1) + n.dl_1(grad \ln f) \right) \right) \\
&= l_2^2\Delta_M^2(l_1) + \frac{l_1^2}{f^4}\Delta_N^2(l_2) \\
&\quad + \frac{2}{f^2}\Delta_N(l_2) \left[\Delta_M(l_1) + (n-1).dl_1(grad \ln f) + l_1(2-n).|grad \ln f|^2 - l_1\Delta_M(\ln f) \right] \\
&\quad + n.l_2 \left[d \ln f \left(grad \left(\Delta_M(l_1) + n.dl_1(grad \ln f) \right) \right) + \Delta_M(dl_1(grad \ln f)) \right]
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2.4. *Si l_1 et l_2 sont harmoniques, alors*

$$\tilde{\Delta}(l_1.l_2) = nl_2.dl_1(grad \ln f)$$

$$\tilde{\Delta}^2(l_1.l_2) = nl_2. \left[\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + nd \ln f \left(grad(dl_1(grad \ln f)) \right) \right]$$

Corollaire 4.2.5. :

1) *Si l_1 et l_2 sont harmoniques alors $\alpha = l_1.l_2$ est biharmonique non harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}
l_2.dl_1(grad \ln f) &\neq 0, \\
\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + nd \ln f \left(grad(dl_1(grad \ln f)) \right) &= 0.
\end{aligned}$$

2) *si f est constante alors $\alpha = l_1.l_2$ harmonique (donc biharmonique)*

Chapitre 5

Géométrie du fibré tangent d'ordre 1

5.1 Introduction

Notation 5.1.1. Soit M une variété de dimension n , on note

$$\begin{aligned} i : \Gamma(T^*M) &\longrightarrow C^\infty(TM) \\ \omega &\longrightarrow i\omega \end{aligned}$$

l'application définie par :

$$\begin{aligned} i\omega : TM &\longrightarrow R \\ (x, v) &\longrightarrow \omega_x(v) \end{aligned}$$

i est une application $C^\infty(M)$ -linéaire.

Localement, on a

$$i\omega(x, v) = \omega_i(x)y^i \quad (5.1)$$

où $\omega = \omega_i dx^i$ et $v = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

Proposition 5.1.1. Soient $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T(TM))$; Alors $\tilde{X} = \tilde{Y}$ si et seulement si pour tout $\omega \in \Gamma(T^*M)$, on a :

$$\tilde{X}(i\omega) = \tilde{Y}(i\omega)$$

Preuve : Il suffit de démontrer que si $\tilde{X}(i\omega) = 0$, pour tout $\omega \in \Gamma(T^*M)$, alors $\tilde{X} = 0$

Localement si $\tilde{X} = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, on a :

$$\tilde{X}(i\omega) = A^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} y^j + B^i \omega_i$$

d'où $\tilde{X}(i\omega) = 0$, pour tout $\omega \in \Gamma(T^*M)$ si et seulement si $A^i = B^i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. ■

Remarque 5.1.1. Si $f \in C^\infty(M)$ et $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$, alors localement on a :

$$i(df)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) y^i \quad (5.2)$$

$$\tilde{X}(i(df)) = A^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} y^j + B^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (5.3)$$

où $\tilde{X} = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i \frac{\partial}{\partial y^i}$.

De la Remarque 5.1.1, on déduit :

Proposition 5.1.2. *Soient $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T(TM))$; Alors $\tilde{X} = \tilde{Y}$ si et seulement si pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$\tilde{X}(i(df)) = \tilde{Y}(i(df))$$

Définition 5.1.1. *Soient $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteur sur M . On définit les applications*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathfrak{T}_q^p(M) &\rightarrow \mathfrak{T}_{q-1}^p(TM) \\ F &\mapsto \gamma(F) \\ \gamma_X : \mathfrak{T}_q^p(M) &\rightarrow \mathfrak{T}_{q-1}^p(TM) \\ F &\mapsto \gamma_X(F) \end{aligned}$$

localement par :

$$\gamma(F) = F_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} y^{h_1} \frac{\partial}{\partial y^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{k_p}} \otimes dx^{h_2} \otimes \dots \otimes dx^{h_q} \quad (5.4)$$

$$\gamma_X(F) = F_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} X^{h_1} \frac{\partial}{\partial y^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{k_p}} \otimes dx^{h_2} \otimes \dots \otimes dx^{h_q} \quad (5.5)$$

$$\text{où : } q \geq 1, \quad F = F_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_p}} \otimes dx^{h_1} \otimes \dots \otimes dx^{h_q} \quad \text{et} \quad X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Propriétés 5.1.1. .

1. La Définition 5.1.1 est indépendante de la carte choisie.
2. Si F est un champ de tenseurs de type $(1, 1)$ sur la variété M , alors $\gamma(F)$ (resp $\gamma_X(F)$) est un champ de vecteurs sur TM , tel que localement :

$$\gamma(F) = F_j^i y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{resp} \quad \gamma_X(F) = F_j^i X^j \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

$$\text{où } F = F_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \text{ et } X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

3. Si $G \in \Gamma(T^*M)$ est une 1-forme sur la variété M , alors $\gamma(G) = iG$ (resp $\gamma_X(G) = G(X) \circ \pi$) est une fonction de classe C^∞ sur TM .
4. Si $f \in C^\infty(M)$ et $X \in \Gamma(TM)$, on pose : $\gamma(f) = \gamma_X(f) = 0$
5. Si ∇ est une connexion linéaire sur la variété M et $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\nabla f = df, \quad \gamma(df) = \gamma(\nabla f) = i(df).$$

Proposition 5.1.3. *Si $F, G \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ et $X \in \Gamma(TM)$, alors :*

1. $[\gamma_X F, \gamma_X G] = 0$
2. $[\gamma_X F, \gamma G] = \gamma_X(G \circ F)$
3. $[\gamma F, \gamma G] = \gamma(G \circ F) - \gamma(F \circ G)$

Preuve : Localement on a :

$$\begin{aligned}
 [\gamma F, \gamma G] &= [F_j^i y^j \frac{\partial}{\partial y^i}, G_k^s y^k \frac{\partial}{\partial y^s}] \\
 &= F_j^i y^j \frac{\partial}{\partial y^i} (G_k^s y^k) \frac{\partial}{\partial y^s} - G_k^s y^k \frac{\partial}{\partial y^s} (F_j^i y^j) \frac{\partial}{\partial y^i} \\
 &= F_j^i y^j \delta_i^k G_k^s \frac{\partial}{\partial y^s} - G_k^s y^k \delta_s^j F_j^i \frac{\partial}{\partial y^i} \\
 &= y^j G_k^s F_j^k \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k F_s^i G_k^s \frac{\partial}{\partial y^i} \\
 &= y^j (G \circ F)_j^s \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k (F \circ G)_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}
 \end{aligned}$$

■

Pour plus de détail voir K. Yano et S. Iihara [116]

5.2 Relèvement Vertical

5.2.1 Relèvement Vertical d'une Fonction

Définition 5.2.1. Soient M une variété de dimension m et (TM, π, M) le fibré vectoriel tangent associé. soit $f \in C^\infty(M)$, on définit le relèvement vertical f^V par :

$$\begin{aligned}
 f^V = f \circ \pi : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 v \in T_x M &\longmapsto f^V(v) = f \circ \pi(v) \\
 &= f(x)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2.2 Relèvement Vertical d'un Champ de Vecteurs

Définition 5.2.2. Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est dit vertical si et seulement si pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\tilde{X} f^V = 0. \tag{5.7}$$

Si $\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^h \\ \tilde{X}_2^k \end{pmatrix}$ sont les composantes de $\tilde{X}$ relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$

sur TM , alors pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ On a :

$$\tilde{X} f^V = \tilde{X}_1^h \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

d'où

Proposition 5.2.1. *Un champ de vecteur $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est vertical sur TM si et seulement si relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM , les coposantes de $\tilde{X}$ vérifient la condition*

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^h \\ \tilde{X}_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}_2^k \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Remarques 5.2.1. on a :

1.

$$\begin{aligned} d_v\pi : T_v(TM) &\rightarrow T_xM \\ Z = Z_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_v + Z_2^j \frac{\partial}{\partial y^j}|_v &\mapsto d\pi(Z) = Z_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \end{aligned} \quad (5.9)$$

2. $\mathcal{N}_v = \text{Ker}(d_v\pi)$ est un sous espace vectoriel de T_vTM , appelé sous espace vertical.

3. Localement $\mathcal{N}_v$ est engendré par $(\frac{\partial}{\partial y^1}|_v, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m}|_v)$.

4. $\mathcal{N} = \bigcup_{v \in TM} \mathcal{N}_v$ est un sous fibré vectoriel de $T(TM)$

5. $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est un champ de vecteurs vertical si et seulement si $d\pi(\tilde{X}) = 0$

6. Si $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ et $X \in \Gamma(TM)$, alors $\gamma(F)$ et $\gamma_X(F)$ sont des champs de vecteur verticaux.

Proposition 5.2.2. *Si $X \in \Gamma(TM)$ est un champ de vecteur sur M , alors il existe un unique champ de vecteur X^V sur TM vérifiant :*

$$X^V(i\omega) = (\omega(X))^V \quad (5.10)$$

pour tout $\omega \in \Gamma(T^*M)$.

Preuve : L'unicité découle de la Proposition 5.1.1 et de la formule (5.10).

Localement si $(X^i)_i$ et $(\omega_i)_i$ et $(\tilde{X}_1^h, \tilde{X}_2^k)$ désignent les composantes de X , ω et X^V respectivement. Alors de la formule (5.10) on obtient :

$$\tilde{X}_1^h \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \omega_i \right) y^i + \tilde{X}_2^k \omega_k = \omega_k X^k$$

d'où

$$\tilde{X}_1^h = 0, \quad \tilde{X}_2^k = X^k.$$

pour tout $h, k = 1..m$. ■

Définition 5.2.3. *Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur M , le champ de vecteurs X^V qui vérifie l'équation (5.10) est appelé relèvement vertical de X à TM .*

Localement si le champ de vecteurs X a pour composantes $(X^h)_{h=1,\dots,m}$ relativement à une carte $(U, x^h)_h$ sur M . Alors le relèvement vertical X^V a pour composantes

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM .

Remarque 5.2.1. *Le relèvement vertical X^V de X au fibré tangent TM est un champ de vecteurs vertical, et on a :*

$$X^V f^V = 0 \quad (5.12)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$.

Propriétés 5.2.1. :

Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :

- $(X + Y)^V = X^V + Y^V$
- $(fX)^V = f^V X^V$
- $[X^V, Y^V] = 0$
- $[X^V, \gamma F] = \gamma_X F$

En effet pour tout $\omega \in \Gamma(T^*M)$, on a

$$[X^V, Y^V](i\omega) = X^V(Y^V(i\omega)) - Y^V(X^V(i\omega)) = X^V(\omega(Y)^V) - Y^V((\omega(X))^V) = 0$$

Localement, on a :

$$[X^V, \gamma F] = [X^i \frac{\partial}{\partial y^i}, y^j F_j^s \frac{\partial}{\partial y^s}] = X^i F_j^s \frac{\partial}{\partial y^s} = \gamma_X F$$

Remarques 5.2.2. .

- $\mathcal{N}_v = \{X_v^V; X \in \Gamma(TM)\}$
- Soient $u \in T_x M$ et $X \in \Gamma(TM)$ tel que $X_x = u$, on note :

$$u^V = X_{(x,u)}^V \quad (5.13)$$

appelé relèvement vertical de u . D'après la formule (5.11), cette définition est indépendante du choix de X .

- L'application :

$$\begin{aligned} TM &\mapsto \subset TTM \\ (x, u) &\mapsto u^V \in T_{(x,u)} TM \end{aligned}$$

est une section de classe C^∞ sur TM , donc un champ de vecteurs sur TM .

- Soient $x \in M$ et $v \in T_x M$, alors L'application

$$\begin{aligned} T_x M &\rightarrow \mathcal{N}_v \\ u &= u^V \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

5.2.3 Relèvement Vertical d' une 1-Forme

Définition 5.2.4. Une 1- forme $\tilde{\omega} \in \Gamma(T^*(TM))$ sur TM , est dite verticale si :

$$\tilde{\omega}(X^V) = 0 \quad (5.14)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$

Localement, si $(\tilde{\omega}_i^1, \tilde{\omega}_j^2)$ désignent les composantes de $\tilde{\omega}$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM . Alors de la formule (5.14), on obtient :

$$\tilde{\omega}(X^V) = \tilde{\omega}_j^2 X^j = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, d'où localement

$$\tilde{\omega} : \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Proposition 5.2.3. Si $f \in C^\infty(M)$ est une fonction de classe C^∞ sur M , alors $d(f^V)$ est une 1-forme verticale sur le fibré tangent TM .

Preuve : De la relation (5.12) , on a :

$$d(f^V)(X^V) = X^V(f^V) = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ ■

Définition 5.2.5. Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$. Le relèvement vertical ω^V de la 1-forme ω est défini localement par

$$\omega^V = (\omega_i)^V dx^i \quad (5.16)$$

où $\omega = \omega_i dx^i$, relativement à une carte (U, x^i) sur M .

Cette définition est indépendante de la carte choisie, en tenant compte que si $(dx^i)_i$ est une base locale de $\Gamma(T^*M)$, elle induit alors $(dx^i, dy^j)_{i,j}$ une base locale de $\Gamma(T^*(TM))$.

Remarque 5.2.2. Le relèvement vertical ω^V de ω au fibré TM est une 1-forme verticale :

$$\omega^V(X^V) = 0 \quad (5.17)$$

pour tout $\omega \in \Gamma(TM^*)$ et $X \in \Gamma(TM)$

Proposition 5.2.4. Soient $f, g \in C^\infty(M)$. Alors :

$$(df)^V = d(f^V) \quad (5.18)$$

$$(gdf)^V = g^V d(f^V) \quad (5.19)$$

Preuve : Localement, on a :

$$d(f^V) = \frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial y^i} dy^i = \frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial x^i} dx^i = (df)^V$$

■

Remarque 5.2.3. De la Proposition 5.2.4, on obtient :

$$d((fg)^V) = d(f^V \cdot g^V) = g^V \cdot d(f^V) + f^V \cdot d(g^V) = (d(fg))^V$$

Propriété 5.2.1. on a pour tout $\omega, \theta \in \Gamma(TM^*)$ et $f \in C^\infty(M)$:

$$(\omega + \theta)^V = \omega^V + \theta^V \quad (5.20)$$

$$(f\omega)^V = f^V \omega^V \quad (5.21)$$

Si (U, x^h) est une carte sur la variété M , alors de la formule (5.16) on obtient :

$$(dx^h)^V = dx^h \quad (5.22)$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM .

5.2.4 Relèvement Vertical des Champs de Tenseurs

Soient $P, Q, R, S \in \mathfrak{T}_p^q(M)$ des champs de tenseurs. On pose :

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V \quad (5.23)$$

$$(R + S)^V = R^V + S^V$$

Si $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ est un tenseur de type $(1, 1)$, tel que $F_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i$ relativement à une carte (U, x^i) sur M , alors de la relation (5.23), on a :

$$\begin{aligned} F^V &= (F_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i)^V \\ &= (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x_h})^V \otimes (dx^i)^V \\ &= (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial y_h}) \otimes dx^i \end{aligned}$$

d'où F^V a pour composantes :

$$F^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

De même, si $G \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ tel que $G = G_{ij}dx^i \otimes dx^j$ et $H \in \mathfrak{T}_0^2$ tel que $H = H^{ih} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_h}$, alors :

$$G^V : \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

$$H^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{ih} \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM.

Proposition 5.2.5. *Pour tout $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(M)$ on a :*

$$d\omega^V = (d\omega)^V \quad (5.27)$$

Preuve : Si $\omega = \omega_i dx^i$ par rapport à la carte (U, x^i) sur M, alors

$$\omega^V = (\omega_i dx^i)^V = \omega_i dx^i$$

$$\begin{aligned} d\omega^V &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) dx^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (d\omega)^V &= (d(\omega_i) \wedge dx^i)^V \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) dx^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

Relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$, $d(\omega^V)$ a pour composantes :

$$d(\omega^V) : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Proposition 5.2.6. *Soit $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ un champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur la variété M, alors*

$$\begin{aligned} F^v : TM &\rightarrow TTM \\ (x, u) &\mapsto F^v(x, u) = (F_x(u))^V \end{aligned} \quad (5.28)$$

est un champ de vecteurs sur TM.

Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j)$, on a :

$$F^v = y^i F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} = y^i \left(F \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right)^V = \gamma(F)$$

5.3 Relèvement Complet

5.3.1 Relèvement Complet d'une fonction

Définition 5.3.1. Soit f une fonction de M . On définit le Relèvement Complet de f , noté f^C de M au fibré TM par

$$f^C = idf \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} f^C : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df(v) \end{aligned}$$

Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM , on a

$$f^C(x, y) = y^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = (\partial f)(x).$$

De la Proposition 5.1.2, on conclut que cette famille de fonctions joue un rôle important dans la caractérisation des champs de vecteurs sur le fibré tangent TM et on a :

Proposition 5.3.1. Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux champs de vecteurs sur TM . Si pour tout fonction $f \in C^\infty(M)$ on a :

$$\tilde{X}(f^C) = \tilde{Y}(f^C)$$

Alors $\tilde{X} = \tilde{Y}$.

Propriétés 5.3.1. Soit $X \in \Gamma(TM)$, $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ et $g, f \in C^\infty(M)$ on a :

$$X^V(f^C) = (X(f))^V \quad (5.30)$$

$$(gf)^C = g^C f^V + g^V f^C \quad (5.31)$$

$$(g + f)^C = g^C + f^C \quad (5.32)$$

$$(\gamma F)(f^C) = \gamma(df \circ F) \quad (5.33)$$

Localement, si $F = F_i^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$, alors :

$$(\gamma F)(f^C) = y^i F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} (y^s \frac{\partial f}{\partial x^s}) = y^i F_i^j \delta_j^s \frac{\partial f}{\partial x^s} = y^i F_i^s \frac{\partial f}{\partial x^s} = \gamma(df \circ F)$$

Remarque 5.3.1. Si (U, x^i) est une carte sur la variété M , alors $(\pi^{-1}(U), (x^i)^V, (x^j)^C)$ est la carte induite sur le fibré tangent TM

5.3.2 Relèvement Complet d'un Champ de Vecteurs

Définition 5.3.2. Le relèvement Complet d'un champ de vecteurs X sur M est l'unique champ de vecteurs X^C sur le fibré tangent TM tel que

$$X^C f^C = (Xf)^C \quad (5.34)$$

pour tout $f \in C^\infty(M)$

L'unicité découle de la Proposition 5.3.1 et l'existence provient de la proposition suivante :

Proposition 5.3.2. *Si X est un champ de vecteurs de composantes $(X^h)_h$ par rapport à une carte (U, x^h) sur M , alors le relèvement complet X^C a pour composantes*

$$X^C : \left(\begin{array}{c} X^h \\ \partial X^h \end{array} \right) \quad (5.35)$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM , où $\partial X^h = y^i \frac{\partial X^h}{\partial x_i}$.

Preuve : Soient $\left(\begin{array}{c} \tilde{X}_1^h \\ \tilde{X}_2^k \end{array} \right)$ les composantes de X^C par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM . De la formule (5.34), pour toute $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned} X^C(f^C) &= \tilde{X}_1^i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) y^j + \tilde{X}_2^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= (Xf)^C \\ &= y^i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(X^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= X^j y^i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) + (y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{aligned}$$

d'où $\tilde{X}_1^i = X^i$ et $\tilde{X}_2^j = y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}$; $(i, j = 1, \dots, m)$. ■

Proposition 5.3.3. *Soient $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma(TM^*)$, on a :*

$$X^C + Y^C = (X + Y)^C \quad (5.36)$$

$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C \quad (5.37)$$

$$X^C f^V = (Xf)^V \quad (5.38)$$

$$\omega^V(X^C) = (\omega(X))^V \quad (5.39)$$

Preuve :

1) Les formules (5.36) et (5.37) sont des conséquences directes de la Définition 5.3.2 et des Propriétés 5.3.1.

2) Localement, on a :

$$X^C f^V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \pi) + y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y^i} (f \circ \pi) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \pi) = (Xf)^V$$

$$\omega^V(X^C) = \omega_s dx^s (X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y^i}) = \omega_s dx^s (X^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = (\omega_s X^s) \circ \pi = \omega(X))^V$$

■

Proposition 5.3.4. *Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, on a :*

$$[X^V, Y^V] = 0 \quad (5.40)$$

$$[X^V, Y^C] = [X, Y]^V \quad (5.41)$$

$$[X^C, Y^C] = [X, Y]^C \quad (5.42)$$

$$[X^C, \gamma F] = \gamma(\mathcal{L}_X F) \quad (5.43)$$

Preuve : Utilisant la proposition de caractérisation (Proposition 5.3.1), soit $f \in C^\infty(M)$, on a :

•

$$\begin{aligned} [X^V, Y^V](f^C) &= X^V(Y^V(f^C)) - Y^V(X^V(f^C)) \\ &= X^V(Yf)^V - Y^V(Xf)^V \\ &= 0. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} [X^V, Y^C](f^C) &= X^V(Y^C(f^C)) - Y^C(X^V(f^C)) \\ &= X^V(Yf)^C - Y^C(Xf)^V \\ &= (X(Yf))^V - (Y(Xf))^V \\ &= ([X, Y]f)^V \\ &= [X, Y]^V f^C \end{aligned}$$

• De même, on obtient :

$$\begin{aligned} [X^C, Y^C](f^C) &= X^C(Y^C(f^C)) - Y^C(X^C(f^C)) \\ &= (XYf)^C - (YXf)^C \\ &= ([X, Y]f)^C \\ &= [X, Y]^C f^C \end{aligned}$$

• Localement, on a :
d'une part

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X F &= \mathcal{L}_X F \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \otimes dx^i \\ &= \{ [X, F \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)] - F \left([X, \frac{\partial}{\partial x^i}] \right) \} \otimes dx^i \\ &= \{ [X^s \frac{\partial}{\partial x^s}, F_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}] - F \left([X^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^i}] \right) \} \otimes dx^i \\ &= \{ X^s \frac{\partial F_i^k}{\partial x^s} - F_i^j \frac{\partial X_k}{\partial x^j} + F_s^k \frac{\partial X_s}{\partial x^i} \} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
[X^C, \gamma F] &= [X^s \frac{\partial}{\partial x^s} + y^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^s}, y^k F_k^j \frac{\partial}{\partial y^j}] \\
&= y^k X^s \frac{\partial F_k^j}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial y^j} + y^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \delta_s^k F_k^j \frac{\partial}{\partial y^j} - y^k F_k^j \delta_j^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^s} \\
&= y^i X^s \frac{\partial F_i^k}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial y^k} + y^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} F_s^j \frac{\partial}{\partial y^j} - y^k F_k^i \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^s} \\
&= y^i \{ X^s \frac{\partial F_i^k}{\partial x^s} + \frac{\partial X^s}{\partial x^i} F_s^k - F_i^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \} \frac{\partial}{\partial y^k} \\
&= \gamma(\mathcal{L}_X F).
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.3.2. Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM , pour tout $i = 1, \dots, m$, on a :

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^C = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (5.44)$$

5.3.3 Relèvement Complet d' une 1-Forme

Théorème de caractérisation des formes différentielles

Théorème 5.3.1. Soient $\tilde{\omega}, \tilde{\theta} \in \Gamma(T^*(TM))$ deux formes sur TM . Alors $\tilde{\omega} = \tilde{\theta}$ Si et seulement si pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

$$\tilde{\omega}(X^C) = \tilde{\theta}(X^C)$$

.

Preuve : Il suffit de démontrer que si $\tilde{\omega}(X^C) = 0$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$, alors $\tilde{\omega} = 0$.

Localement si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (resp $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i^1 dx^i + \tilde{\omega}_j^2 dy^j$) relativement à la carte (U, x^i) sur M (resp à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM), alors

$$\tilde{\omega}(X^C) = \tilde{\omega}_h^1 X^h + \tilde{\omega}_k^2 y^i \frac{\partial X^k}{\partial x_i} = 0$$

d'où $\tilde{\omega}_h^1 = 0 = \tilde{\omega}_k^2$; $h, k = 1, \dots, m$.

■

D'une manière plus générale on a :

Théorème 5.3.2. Si $\tilde{\omega}, \tilde{\theta} \in \mathfrak{T}_p^0(TM)$ (resp $\in \mathfrak{T}_p^1(TM)$), tels que pour tout $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(TM)$:

$$\tilde{\omega}(X_1^C, \dots, X_p^C) = \tilde{\theta}(X_1^C, \dots, X_p^C).$$

Alors $\tilde{\omega} = \tilde{\theta}$.

Proposition 5.3.5. Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$, il existe une unique $\omega^C \in \Gamma(T^*(TM))$ telle que pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a

$$\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C \quad (5.45)$$

Preuve : Du Théorème 5.3.1, découle l'unicité. Localement si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega = \omega_i dx^i$ et $\omega^C = \tilde{\omega}_i dx^i + \hat{\omega}_j dy^j$, alors

$$\begin{aligned} \omega^C(X^C) &= \tilde{\omega}_i X^i + \hat{\omega}_j (y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}) \\ &= (\omega X)^C \\ &= y^i \frac{\partial(\omega_h X^h)}{\partial x_i} \\ &= (y^i \frac{\partial \omega_h}{\partial x_i}) X^h + \omega_h (y^i \frac{\partial X^h}{\partial x_i}) \end{aligned}$$

d'où $\tilde{\omega}_i = \partial \omega_i = (y^i \frac{\partial \omega_h}{\partial x_i})$ et $\hat{\omega}_j = \omega_j$ $i, j = 1, \dots, m$. On pose alors, localement

$$X^C = \partial \omega_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \omega_j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

■

Définition 5.3.3. Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$, l'unique forme $\omega^C \in \Gamma(T^*(TM))$ qui vérifie la formule (5.45) est appelée relèvement complet de ω .

Proposition 5.3.6. Si ω est une 1-forme sur M de composantes (ω_i) par rapport à une carte (U, x^h) , alors le relèvement complet ω^C a pour composantes

$$\omega^C : (\partial \omega_i, \omega_j) = (y^i \frac{\partial \omega_h}{\partial x_i}, \omega_j). \quad (5.46)$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^k)$ sur TM .

Remarque 5.3.3. Relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^k)$ sur TM , on a :

$$(dx^i)^C = dy^i \quad (5.47)$$

Proposition 5.3.7. Si $\omega, \theta \in \Gamma(TM^*)$ et $X \in \Gamma(TM)$, alors :

- 1) $(\omega + \theta)^C = \omega^C + \theta^C$
- 2) $(f\omega)^C = f^C \omega^V + f^V \omega^C$
- 3) $\omega^C(X^V) = (\omega(X))^V$

Preuve : Soit $X \in \Gamma(TM)$, on a :

1)

$$\begin{aligned} (\omega + \theta)^C(X^C) &= ((\omega + \theta)(X))^C = (\omega(X) + \theta(X))^C \\ &= (\omega(X))^C + (\theta(X))^C \\ &= (\omega^C + \theta^C)(X^C) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
(f\omega)^C(X^C) &= (f\omega(X))^C = f^V\omega(X)^C + f^C\omega(X)^V \\
&= f^V\omega^C(X^C) + f^C\omega^V(X^C)
\end{aligned}$$

3) Localement si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega = \omega_i dx^i$, alors des formules (5.11) et (5.46), on obtient :

$$\omega^C(X^V) = (\omega_i X^i) \circ \pi = (\omega(X))^V$$

■

5.3.4 Relèvement Complet d'un Champ de tenseurs

Définition 5.3.4. *Le relèvement complet peut être prolonger à un tenseur quelconque de manière unique tel que pour tout $P, Q \in \mathfrak{T}_p^q(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C \quad (5.48)$$

$$(P + Q)^C = P^C + Q^C \quad (5.49)$$

$$(fP)^C = f^C P^V + f^V P^C \quad (5.50)$$

Si $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ tel que localement $F = F_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i$, alors :

$$\begin{aligned}
F^C &= (F_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i)^C \\
&= (F_i^h)^C (\frac{\partial}{\partial x_h})^V \otimes (dx^i)^V + (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x_h})^C \otimes (dx^i)^V \\
&\quad + (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x_h})^V \otimes (dx^i)^C \\
&= (F_i^h)^C \frac{\partial}{\partial y_h} \otimes dx^i + (F_i^h)^V \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i + (F_i^h)^V \frac{\partial}{\partial y_h} \otimes dy^i
\end{aligned}$$

d'où F^C a pour composantes

$$F^C : \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

De même si $G \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ tel que $G = G_{ij} dx^i \otimes dx^j$, alors G^C a pour coordonnées :

$$G^C : \begin{pmatrix} \partial G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Proposition 5.3.8. *Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $G \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, on a*

$$G^C(X^V, Y^V) = 0 \quad (5.53)$$

$$G^C(X^C, Y^V) = (G(X, Y))^V \quad (5.54)$$

$$G^C(X^C, Y^C) = (G(X, Y))^C \quad (5.55)$$

Preuve : En vertu de la Définition 5.3.4, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $G = \omega \otimes \varpi$, on a :

$$\begin{aligned}
 G^C(X^V, Y^V) &= (\omega^C \otimes \varpi^V)(X^V, Y^V) + (\omega^V \otimes \varpi^C)(X^V, Y^V) \\
 &= \omega^C(X^V)\varpi^V(Y^V) + \omega^V(X^V)\varpi^C(Y^V) \\
 &= 0. \\
 G^C(X^C, Y^V) &= \omega^C(X^C)\varpi^V(Y^V) + \omega^V(X^C)\varpi^C(Y^V) \\
 &= (\omega(X))^V(\varpi(Y))^V. \\
 &= (G(X, Y))^V \\
 G^C(X^C, Y^C) &= \omega^C(X^C)\varpi^V(Y^C) + \omega^V(X^C)\varpi^C(Y^C) \\
 &= (\omega(X))^C(\varpi(Y))^V + (\omega(X))^V(\varpi(Y))^C. \\
 &= (\omega(X)\varpi(Y))^C \\
 &= (G(X, Y))^C
 \end{aligned}$$

■

Proposition 5.3.9. *Pour tout $\omega \in \Gamma^*(TM)$ on a :*

$$d(\omega^C) = (d\omega)^C \quad (5.56)$$

Preuve : En utilisant le théorème 5.3.2, la Proposition 5.3.8, les Propriétés 5.3.1, la formule (5.42) et la formule de dérivation suivante :

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 d(\omega^C)(X^C, Y^C) &= X^C(\omega^C(Y^C)) - Y^C(\omega^C(X^C)) - \omega^C([X^C, Y^C]) \\
 &= (X(\omega(Y)))^C - (Y(\omega(X)))^C - (\omega([X, Y]))^C \\
 &= ((d\omega)(X, Y))^C \\
 &= (d\omega)^C(X^C, Y^C)
 \end{aligned}$$

■

5.4 Relèvement Horizontal

Dans cette section, on suppose que M est une variété de dimension m munie d'une connexion linéaire ∇ .

Définition 5.4.1. *On définit la connexion opposée à ∇ notée $\widehat{\nabla}$, par :*

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

$$\forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Remarques 5.4.1.

1. Soient T et $\hat{T}$ les tenseurs de torsion associés à ∇ et $\hat{\nabla}$ respectivement, alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a $\hat{T}(X, Y) = T(Y, X)$.
2. Si ∇ est sans torsion, alors $\hat{\nabla} = \nabla$.

5.4.1 Relèvement Horizontal d'une Fonction

De la Propriété 5.1.1 (5), on rappelle que, pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\gamma(df) = \gamma(\nabla f) = \gamma(\hat{\nabla} f) = i(df) = f^C = \partial(f)$$

.

Définition 5.4.2. Si f est une fonction sur M , on pose

$$f^H = f^C - \gamma(\hat{\nabla} f) = 0 \quad (5.57)$$

application de classe C^∞ sur TM dite relèvement horizontal de la fonction f .

5.4.2 Relèvement Horizontal d'un Champ de Vecteurs

Définition 5.4.3. Soit X un champ de vecteurs sur M . On définit le relèvement Horizontal de X noté X^H au fibré tangent TM par

$$X^H = X^C - \nabla_\gamma X \quad (5.58)$$

Localement si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, alors

$$\begin{aligned} \nabla X &= \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{jk}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \\ \nabla_\gamma X &= \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{jk}^i \right) y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \\ \hat{\nabla}_\gamma X &= \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i \right) y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \\ X^C &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \end{aligned}$$

d'où

Proposition 5.4.1. Si X un champ de vecteurs sur TM de composantes (X^h) par rapport à une carte (U, x^h) sur M , alors le relèvement horizontal X^H a pour composantes

$$X^H = \begin{pmatrix} X^h \\ -X^j \Gamma_{ij}^k y^i \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^H = \frac{\partial}{\partial x_i} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h} \quad (5.60)$$

On note :

$$\frac{\delta}{\delta x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h} \right] = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^H \quad (5.61)$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j)$ sur TM .

Remarque 5.4.1. Pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a $d\pi \circ X^H = X \circ \pi$.

Définition 5.4.4. Soit $v \in TM$, alors

$$\mathcal{H}_v = \{X_v^H; \quad X \in \Gamma(TM)\} \quad (5.62)$$

est un sous espace vectoriel de $T_v(TM)$ appelé espace horizontal associé à ∇ .

$$\mathcal{H} = \bigcup_{v \in TM} \mathcal{H}_v \quad (5.63)$$

est un sous fibré vectoriel de $T(TM)$ appelé fibré horizontal associé à ∇ .

Remarque 5.4.2. Des formules (5.59) et (5.62), localement pour tout $v \in TM$, on obtient :

$$\mathcal{H}_v = \{a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_v - \Gamma_{ji}^k a^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}|_v; \quad a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}\} \quad (5.64)$$

De la Remarque 5.2.1 et la Définition 5.4.4 découle la proposition suivante :

Proposition 5.4.2.

$$\begin{aligned} T(TM) &= \mathcal{H} \oplus \mathcal{N} \\ T_w(TM) &= \mathcal{H}_w \oplus \mathcal{N}_w \end{aligned}$$

où $w \in TM$.

En effet localement si $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$ et $\tilde{X} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \in T_v(TM)$, alors

$$\tilde{X} = \left(a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - a^i w^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}\right) + \{b^k + a^i w^j \Gamma_{ij}^k\} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

avec :

$$\tilde{X}^h = \left(a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - a^i w^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}\right) \in \mathcal{H}_w \text{ est la partie horizontale de } \tilde{X}$$

et

$$\tilde{X}^v = \{b^k + a^i w^j \Gamma_{ij}^k\} \frac{\partial}{\partial y^k} \in \mathcal{N}_w \text{ est la partie verticale de } \tilde{X}$$

Définition 5.4.5. Soit $w \in T_x M$, le relèvement horizontal de w est défini par

$$w^H = X_w^H \quad (5.65)$$

où $X \in \Gamma(TM)$ telque $X_x = w$. De la formule (5.59) cette définition est indépendante du champ de vecteurs X choisi, et on a la proposition :

Proposition 5.4.3. *L'application*

$$\begin{aligned} T_x M &\rightarrow \mathcal{H}_v \\ w &\mapsto w^H \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire

Définition 5.4.6. *Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est dit horizontal, si pour tout $v \in TM$ on a $\tilde{X}_v \in \mathcal{H}_v$*

Proposition 5.4.4. *Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est horizontal, si et seulement si, localement, pour $h = 1..m$, on a :*

$$\tilde{X}_2^h + \Gamma_{ij}^h \tilde{X}_1^j y^i = 0 \quad (5.66)$$

où $\tilde{X} = \tilde{X}_1^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}_2^j \frac{\partial}{\partial y^j}$

Proposition 5.4.5. *Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$\begin{aligned} (X + Y)^H &= (X)^H + (Y)^H \\ (fX)^H &= (f)^V X^H \\ X^H f^V &= (Xf)^V \\ X^H f^C &= (Xf)^C - \gamma(df \circ (\nabla X)) \\ [X^V, Y^H] &= [X, Y]^V - (\nabla_X Y)^V = -(\hat{\nabla}_Y X)^V \\ [X^H, Y^V] &= (\hat{\nabla}_X Y)^V \\ [X^H, Y^H] &= [X, Y]^H - \gamma\hat{R}(X, Y). \end{aligned}$$

où $\hat{R}$ est le champs de vecteurs de courbure associé à $\hat{\nabla}$.

Lemme 5.4.1.

$$(\nabla Y) \circ (\nabla X) - (\nabla X) \circ (\nabla Y) = \{\hat{\nabla}_Y \hat{\nabla}_X - \hat{\nabla}_X \hat{\nabla}_Y\} - \mathcal{L}_Y \nabla X + \mathcal{L}_X \nabla Y + [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X]$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve : (Du Lemme). Soit $Z \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}
 (\nabla Y) \circ (\nabla X)Z &= (\nabla Y)(\nabla_Z X) \\
 &= (\nabla Y)(\widehat{\nabla}_X Z + [Z, X]) \\
 &= (\nabla Y)(\widehat{\nabla}_X Z) - (\nabla Y)(\mathcal{L}_X(Z)) \\
 &= \widehat{\nabla}_Y(\widehat{\nabla}_X Z) - (\mathcal{L}_Y)(\widehat{\nabla}_X Z) - (\nabla Y)(\mathcal{L}_X(Z)) \\
 &= \widehat{\nabla}_Y(\widehat{\nabla}_X Z) - (\mathcal{L}_Y)(\mathcal{L}_X Z) - (\mathcal{L}_Y)((\nabla X)(Z)) \\
 &\quad - (\nabla Y)(\mathcal{L}_X(Z)) \\
 (\nabla Y) \circ (\nabla X)Z - (\nabla X) \circ (\nabla Y)Z &= \{\widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y Z\} - \{\mathcal{L}_Y((\nabla X)(Z)) - \nabla X(\mathcal{L}_Y(Z))\} \\
 &\quad + \{\mathcal{L}_X((\nabla Y)(Z)) - \nabla Y(\mathcal{L}_X(Z))\} \\
 &\quad - \{\mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(Z)) - \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(Z))\} \\
 &= \{\widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y Z\} - (\mathcal{L}_Y \nabla X)(Z) + (\mathcal{L}_X(\nabla Y)(Z)) \\
 &\quad - [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X](Z)
 \end{aligned}$$

Ici on a utilisé la propriété $\mathcal{L}_X(F(Z)) = (\mathcal{L}_X \circ F)(Z) + F(\mathcal{L}_X Z)$ ■

Preuve : (De la Proposition 5.4.5), on a :

- $X^H(f^V) = (X^C - \nabla_\gamma X)(f^V)$
 $= X^C(f^V) - (\nabla_\gamma X)(f^V),$

Puisque $\nabla_\gamma X$ est un champ de vecteur vertical, alors

$$\begin{aligned}
 X^H(f^V) &= X^C(f^V) \\
 &= (Xf)^V
 \end{aligned}$$

- $X^H(f^C) = X^C(f^C) - (\nabla_\gamma X)(f^C),$

De la Propriété 5.3.1 formule(5.33), on obtient :

$$\begin{aligned}
 X^H(f^C) &= (Xf)^C - \gamma(df \circ \nabla X) \\
 \bullet [X^V, Y^H] &= [X^V, Y^C] - [X^V, \gamma(\nabla Y)], \quad (\text{de la Propriété 5.2.1}) \\
 &= [X, Y]^V - \gamma_X(\nabla Y) \\
 &= [X, Y]^V - (\nabla_X Y)^V \\
 \bullet [X^H, Y^H] &= [X^C, Y^C] - [\gamma(\nabla X), Y^C] - [X^C, \gamma(\nabla Y)] + [\gamma(\nabla X), \gamma(\nabla Y)] \\
 &= [X, Y]^C + \gamma\{\mathcal{L}_Y \nabla X - \mathcal{L}_X \nabla Y + (\nabla Y) \circ (\nabla X) - (\nabla X) \circ (\nabla Y)\} \\
 &= [X, Y]^H + \gamma(\nabla[X, Y]) + \gamma\{\mathcal{L}_Y \nabla X - \mathcal{L}_X \nabla Y\} \\
 &\quad + \gamma\{(\nabla Y) \circ (\nabla X) - (\nabla X) \circ (\nabla Y)\}
 \end{aligned}$$

Du Lemme 5.4.1 on obtient

$$\begin{aligned}
 \cdot [X^H, Y^H] &= [X, Y]^H + \gamma\{\widehat{\nabla}_{[X, Y]} - \mathcal{L}_{[X, Y]}\} + \gamma\{\mathcal{L}_Y \nabla X - \mathcal{L}_X \nabla Y\} \\
 &\quad + \gamma\{(\nabla Y) \circ (\nabla X) - (\nabla X) \circ (\nabla Y)\} \\
 &= [X, Y]^H - \gamma\widehat{R}(X, Y) - \gamma\{\mathcal{L}_{[X, Y]} + [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X]\} \\
 &= [X, Y]^H - \gamma\widehat{R}(X, Y).
 \end{aligned}$$

■

5.4.3 Relèvement Horizontal d'une 1-forme

Définition 5.4.7. Soit ω une 1-forme dans M . on définit le Relèvement Horizontal de ω noté ω^H de M au fibré TM par :

$$\omega^H = \omega^C - \nabla_\gamma \omega \quad (5.67)$$

où $\nabla_\gamma \omega = \gamma(\nabla \omega)$.

Expressions Locale. Si (ω_i) désignent les coordonnées de $\omega \in \Gamma(T^*M)$ et Γ_{ji}^h les coefficients de Christoffel associés à la connexion ∇ relativement à la carte (U, x^h) sur M on a :

$$\begin{aligned} \omega^C &: (\partial \omega_i, \omega_i) \\ \nabla_\gamma \omega &: (y^j \partial_j \omega_i - y^j \Gamma_{ji}^h \omega_h, 0) \\ \widehat{\nabla}_\gamma \omega &: (y^j \partial_j \omega_i - y^j \Gamma_{ji}^h \omega_h, 0) \\ \omega^H &: (y^j \Gamma_{ji}^h \omega_h, \omega_i) \end{aligned} \quad (5.68)$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM .

Définition 5.4.8. Une 1-forme $\tilde{\omega} \in \Gamma(T^*(TM))$ est dite **horizontale** si , on a :

$$\tilde{\omega}(X^H) = 0 \quad (5.69)$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Expressions Locale. Si $(\tilde{\omega}_i^1, \tilde{\omega}_j^2)$ désignent les composantes de $\tilde{\omega} \in \Gamma(T^*(TM))$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM , alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\tilde{\omega}(X^H) = \tilde{\omega}_i^1 X^i - \tilde{\omega}_h^2 y^j \Gamma_{ji}^h X^i = 0$$

d'où

$$\tilde{\omega}_i^1 - \tilde{\omega}_h^2 y^j \Gamma_{ji}^h = 0 \quad (5.70)$$

pour tout $i = 1..m$.

Localement, on peut démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés 5.4.1. Soient $\omega \in \Gamma(TM^*)$ et $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\omega^H(X^V) = (\omega(X))^V \quad (5.71)$$

$$\omega^H(X^C) = \omega^C(\nabla_\gamma X) \quad (5.72)$$

$$\omega^H(X^H) = 0 \quad (5.73)$$

Remarque 5.4.3. De la formule 5.68, localement on obtient

$$(dx^h)^H = y^j \Gamma_{ji}^h dx^i + dy^h \quad (5.74)$$

5.4.4 Relèvement Horizontal d'un Champ de Tenseurs

Définition 5.4.9. Soit S un champ de tenseurs sur M de type $(0, s)$ (resp $(1, s)$). On définit le **Relèvement Horizontal** de S au fibré TM noté S^H par

$$S^H = S^C - \nabla_\gamma S \quad (5.75)$$

Définition 5.4.10. D'une manière générale le relèvement Horizontal peut être prolonger à un tenseur quelconque de manière unique tel que pour tout $P, Q \in \mathfrak{T}_p^q(M)$, on a

$$(P \otimes Q)^H = P^H \otimes Q^V + P^V \otimes Q^H \quad (5.76)$$

$$(P + Q)^H = P^H + Q^H \quad (5.77)$$

Expressions Locale.

Si $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ tel que $F = F_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx^j$ alors :

$$F^H : \begin{pmatrix} F_k^i & 0 \\ -y^j F_k^t \Gamma_{jt}^i + y^j F_t^i \Gamma_{jk}^t & F_k^i \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

Si $G \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ tel que $G = G_{ij} dx^i \otimes dx^j$ alors :

$$G^H : \begin{pmatrix} y^t \Gamma_{tj}^h G_{hi} + y^t \Gamma_{ti}^h G_{jh} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

Si $H \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ tel que $H = H^{ih} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_h}$ alors :

$$H^H : \begin{pmatrix} 0 & H^{ih} \\ H^{ih} & -y^t \Gamma_{tj}^i H^{jh} - y^t \Gamma_{tj}^h H^{ij} \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

Proposition 5.4.6. Soit $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ un champ de tenseurs de type $(1, 1)$ sur la variété M , alors

$$\begin{aligned} F^h : TM &\rightarrow TTM \\ (x, u) &\mapsto F^h(x, u) = F_{(x, u)}^H(u^H) \end{aligned} \quad (5.81)$$

est un champ de vecteurs sur TM .

Localement, relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j)$, on a

$$F^h = y^i F_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} - y^i y^k F_i^l \Gamma_{lk}^s \frac{\partial}{\partial y^s} = y^i (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H$$

5.4.5 Application tangente

Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés Riemannienne de connexion de Levi-Civita ∇^M et ∇^N respectivement. Soit $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ une application lisse. On pose :

$$\Phi \cong d\varphi : TM \rightarrow TN$$

Localement, Noton par $(x^i, y^j; i, j = 1, ..m)$ les coordonnées locale sur TM induite par $(x^i; i = 1, ..m)$ sur M et $(u^\alpha, v^\beta; \alpha, \beta = 1, ..n)$ les coordonnées locale sur TN induite par $(x^\alpha; \alpha = 1, ..n)$ sur N on a :

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n) \quad (5.82)$$

$$\phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n, \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^j} y^j, \dots, \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^j} y^j) \quad (5.83)$$

$$d_x \varphi(y) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \in T_{\varphi(x)} N \quad (5.84)$$

où $(\frac{\partial}{\partial x^i}; i = 1, \dots, m)$ (resp $(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}; \alpha = 1, \dots, n)$) désigne la base locale de champs de vecteurs sur M (resp N) et $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$.

De l'équation 5.84, on déduit l'expression locale de la matrice associée à $d\varphi$:

$$(d\varphi)_i^\alpha = \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \right)_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

d'où

$$d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (5.85)$$

Relativement à la base locale de champ de vecteurs $(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j})_{i,j}$ (resp $(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial v^\beta})_{\alpha,\beta}$ sur M (resp N), la matrice associée à l'application tangente $d\phi$ est donnée par :

$$d\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} \dots \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1} \dots \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^m} & 0 \dots 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^1 \partial x^i} y^i \dots \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^m \partial x^i} y^i & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} \dots \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x^1 \partial x^i} y^i \dots \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x^m \partial x^i} y^i & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1} \dots \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

d'où la proposition suivante :

Proposition 5.4.7.

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \left(d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)^V \quad (5.87)$$

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} y^j \frac{\partial}{\partial v^\beta} \quad (5.88)$$

$$d\phi\left(\frac{\delta}{\delta y^i}\right) = \left(d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)^H + \left((\nabla d\varphi)(Y, \frac{\partial}{\partial x^i})\right) \quad (5.89)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 d\phi\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) &= \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \\
 &= \left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)^V \\
 &= \left(d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)^V
 \end{aligned}$$

$$d\phi\left(\frac{\delta}{\delta y^i}\right) = d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - {}^M \Gamma_{ij}^k y^j \frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

■

5.5 Métrique Naturelle

5.5.1 Métrique Naturelle

Définition 5.5.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne . Une métrique Riemannienne $\bar{g}$ sur le fibré tangent TM de M est dite naturelle par rapport à g si

$$\begin{aligned}\bar{g}(X^H, Y^H) &= g(X, Y)^V \\ &= g(X, Y) \circ \pi \\ \bar{g}(X^H, Y^V) &= 0\end{aligned}\tag{5.90}$$

$$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

Remarque 5.5.1. De la Définition 5.5.1, on déduit que pour tout champ de vecteurs vertical $\tilde{Y} \in \Gamma(T(TM))$ et $X \in \Gamma(TM)$, on a

$$\bar{g}(X^H, \tilde{Y}) = 0$$

où $\bar{g}$ est une métrique naturelle sur le fibré tangent TM .

Proposition 5.5.1. Soit (M, g) une variété Riemannienne de connexion de Levi-Civita ∇ . Si $\bar{g}$ est une métrique naturelle sur TM de connexion de Levi-Civita $\bar{\nabla}$, alors

$$\begin{aligned}1) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) &= g_{(x,u)}((\nabla_X Y)^H, Z^H) = g_x(\nabla_X Y, Z) \circ \pi \\ 2) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) &= -\frac{1}{2} \bar{g}_{(x,u)}(\{R(X, Y)u\}^V, Z^V) \\ 3) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2} [X^H(\bar{g}(Y^V, Z^V) + \bar{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) - \bar{g}(Y^V, \nabla_X Z)^V)]_{(x,u)} \\ 4) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) &= -\frac{1}{2} \bar{g}_{(x,u)}(\{R(Z, X)u\}^V, Y^V) \\ 5) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^H) &= \frac{1}{2} \bar{g}_{(x,u)}(\{R(Y, Z)u\}^V, X^V) \\ 6) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^V) &= \frac{1}{2} [Y^H(\bar{g}(X^V, Z^V) - \bar{g}(Z^V, (\nabla_Y X)^V) - \bar{g}(X^V, (\nabla_Y Z)^V)]_{(x,u)} \\ 7) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) &= \frac{1}{2} [-Z^H(\bar{g}(X^V, Y^V)) + \bar{g}(Y^V, (\nabla_Z X)^V) + \bar{g}(X^V, (\nabla_Z Y)^V)]_{(x,u)} \\ 8) \bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2} [X^V(\bar{g}(Y^V, Z^V)) + Y^V(\bar{g}(Z^V, X^V)) - Z^V(\bar{g}(X^V, Y^V))]_{(x,u)}\end{aligned}$$

où $(x, u) \in TM$ tel que $\pi(u) = x$.

La preuve découle immédiatement de la formule de Kozul et de la Définition 5.5.1 .

Preuve : (de la Proposition 5.5.1)

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) &= X^H(\bar{g}(Y^H, Z^H)) + Y^H(\bar{g}(X^H, Z^H)) - Z^H(\bar{g}(X^H, Y^H)) \\
&\quad + \bar{g}(Z^H, [X^H, Y^H]) + \bar{g}(Y^H, [Z^H, X^H]) - \bar{g}(X^H, [Y^H, Z^H]) \\
&= X^H(g(Y, Z)^V) + Y^H(g(X, Z)^V) - Z^H(g(X, Y)^V) \\
&\quad + \bar{g}(Z^H, [X, Y]^H) + \bar{g}(Y^H, [Z, X]^H) - \bar{g}(X^H, [Y, Z]^H) \\
&= \{X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + g(Z, [X, Y]) \\
&\quad + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])\}^V \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) \circ \pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) &= X^H(\bar{g}(Y^H, Z^V)) + Y^H(\bar{g}(X^H, Z^V)) - Z^V(\bar{g}(X^H, Y^H)) \\
&\quad + \bar{g}(Z^V, [X^H, Y^H]) + \bar{g}(Y^H, [Z^V, X^H]) - \bar{g}(X^H, [Y^H, Z^V]) \\
&= -Z^V(g(X, Y)^V) + \bar{g}(Z^V, [X, Y]^H) - \bar{g}(Z^V, \gamma(\hat{R}(X, Y))) \\
&\quad - \bar{g}(Y^H, (\hat{\nabla}_X Z)^V) - \bar{g}(X^H, (\hat{\nabla}_Y Z)^V) \\
&= -\bar{g}(Z^V, \gamma(\hat{R}(X, Y))) \\
&= -\bar{g}(Z^V, \gamma(R(X, Y)))
\end{aligned}$$

puisque la connexion symétrique $\hat{\nabla} = \nabla$ et $\hat{R} = R$. Comme $\gamma(R(X, Y))_{(x,u)} = (R_x(X, Y), u)^V$, on déduit

$$\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) = -\frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(X, Y)u\}^V, Z_{(x,u)}^V)$$

■

Les autres égalités se démontrent de la même façon.

5.5.2 Métrique de SASAKI

Définition 5.5.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne. La métrique de Sasaki associée est l'unique métrique naturelle $\hat{g}$ sur le fibré tangent TM telle que :

$$\begin{aligned}
1) \hat{g}(X^H, Y^H) &= g(X, Y) \circ \pi \\
2) \hat{g}(X^H, Y^V) &= 0 \\
3) \hat{g}(X^V, Y^V) &= g(X, Y) \circ \pi
\end{aligned} \tag{5.91}$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$

Dans toute la suite, la métrique de Sasaki sera notée g^S .

De la Proposition 5.5.1 et la Définition 5.5.2, on déduit :

Proposition 5.5.2. *Soient (M, g) une variété Riemannienne de connexion de Levi-Civita ∇ et g^S la métrique de Sasaki sur TM associée. Si $\widehat{\nabla}$ désigne la connexion de Levi-Civita sur TM , alors*

$$\begin{aligned}
1) \quad g^S(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) &= g^S((\nabla_X Y)^H, Z^H) \\
&= (g(\nabla_X Y, Z))^V. \\
2) \quad g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) &= -\frac{1}{2}(g_x(R(X, Y)u, Z))^V \\
&= -\frac{1}{2}g^S([R(X, Y)*]^v, Z^V)_{(x,u)}. \\
3) \quad g^S(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y, Z)) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Y, \nabla_X Z)\}^V \\
&= (g(\nabla_X Y, Z))^V \\
&= g^S((\nabla_X Y)^V, Z^V). \\
4) \quad g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) &= -\frac{1}{2}g_x(R(Z, X)u, Y) \\
&= \frac{1}{2}g^S_{(x,u)}((R(u, Y)X)^H, Z^H) \\
&= \frac{1}{2}g^S((R(*, Y)X)^h, Z^H)_{(x,u)}. \\
5) \quad g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^H) &= \frac{1}{2}g^S_{(x,u)}(\{R(Y, Z)u\}^V, X^V) \\
&= \frac{1}{2}g_x(R(Y, Z)u, X) \\
&= \frac{1}{2}g_x(R(u, X)Y, Z) \\
&= \frac{1}{2}g^S([R(*, X)Y]^h, Z^H). \\
6) \quad g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^V) &= \frac{1}{2}[Y^H(g^S(X^V, Z^V) - g^S(Z^V, (\nabla_Y X)^V) - g^S(X^V, (\nabla_Y Z)^V))]_{(x,u)} \\
&= \frac{1}{2}[Y(g(X, Z)) - g(Z, \nabla_Y X) - g(X, \nabla_Y Z)]^V_{(x,u)} \\
&= 0. \\
7) \quad g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) &= \frac{1}{2}[-Z^H(g^S(X^V, Y^V)) + g^S(Y^V, (\nabla_Z X)^V) + g^S(X^V, (\nabla_Z Y)^V)]_{(x,u)} \\
&= \frac{1}{2}[-Z(g(X, Y)) + g(Y, \nabla_Z X) + g(X, \nabla_Z Y)]^V_{(x,u)} \\
&= 0. \\
8) \quad g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2}[X^V(\bar{g}(Y^V, Z^V)) + Y^V(\bar{g}(Z^V, X^V)) - Z^V(\bar{g}(X^V, Y^V))]_{(x,u)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

où $(x, u) \in TM$ tel que $\pi(u) = x$.

De la Proposition 5.5.2, découle :

Proposition 5.5.3. *soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $\widehat{\nabla}$ désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique de Sasaki g^S , alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ on a :*

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H)_{(x,u)} &= (\nabla_X Y)_{(x,u)}^H - \frac{1}{2}(R_x(X, Y)u)^V \\ &= (\nabla_X Y)_{(x,u)}^H - \frac{1}{2}(R(X, Y)*)_v^v_{(x,u)} \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V)_{(x,u)} &= (\nabla_X Y)_{(x,u)}^V + \frac{1}{2}(R_x(u, Y)X)^H \\ &= (\nabla_X Y)_{(x,u)}^V + \frac{1}{2}(R(*, Y)X_{(x,u)})^h \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H)_{(x,u)} &= \frac{1}{2}(R_x(u, X)Y)^H \\ &= \frac{1}{2}(R(*, X)Y)_{(x,u)}^h \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V)_{(x,u)} = 0 \quad (5.95)$$

$$(\widehat{\nabla}_{X^V} F^v)_{(x,u)} = (F(X))_{(x,u)}^V \quad (5.96)$$

$$(\widehat{\nabla}_{X^V} F^h)_{(x,u)} = (F(X))_{(x,u)}^H + \frac{1}{2}(R_x(u, X_x)F(u))^H \quad (5.97)$$

où $(x, u) \in TM$.

Preuve : Pour tout $Z \in \Gamma(TM)$ On a :

$$\begin{aligned} g^S(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) &= g^S((\nabla_X Y)^H, Z^H) \\ &= g^S((\nabla_X Y)^H, Z^H) - \frac{1}{2}g^S([R(X, Y)*]^v, Z^H) \\ g^S(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) &= -\frac{1}{2}g^S([R(X, Y)*]^v, Z^V) \\ &= g^S((\nabla_X Y)^H, Z^V - \frac{1}{2}g^S([R(X, Y)*]^v, Z^V) \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H - \frac{1}{2}[R(X, Y)*]^v$$

Localement on a :

•

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_{X^V} F^v &= \widehat{\nabla}_{X^V} y^i(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V = X^V(y^i)(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V \\ &= X^i(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V = (F(X))^V \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X^V} F^h &= \widehat{\nabla}_{X^V} y^i (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H \\
&= X^V(y^i) (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H + y^i \widehat{\nabla}_{X^V} (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H \\
(\widehat{\nabla}_{X^V} F^h)_{(x,u)} &= X^i (F(\frac{\partial}{\partial x^i}))_{(x,u)}^H + \frac{1}{2} u^i (R_x(u, X) F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^H \\
&= (F(X))_{(x,u)}^H + \frac{1}{2} (R_x(u, X) F(u^i \frac{\partial}{\partial x^i}))^H \\
&= (F(X))_{(x,u)}^H + \frac{1}{2} (R_x(u, X) F(u))^H
\end{aligned}$$

Les premières formules se déduisent directement de la Proposition 5.5.2 et de la Définition 5.5.2 ■

Proposition 5.5.4. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $\widehat{R}$ désigne le tenseur de courbure associé à la métrique de Sasaki g^S sur TM , alors pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ on a :*

$$\begin{aligned}
1. \widehat{R}_{(x,u)}(X^V, Y^V) Z^V &= 0 \\
2. \widehat{R}_{(x,u)}(X^V, Y^V) Z^H &= [R(X, Y)Z + \frac{1}{4} R(u, X)(R(u, Y)Z) - \frac{1}{4} R(u, Y)(R(u, X)Z)]_x^H \\
3. \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^V) Z^V &= -[\frac{1}{2} R(Y, Z)X + \frac{1}{4} R(u, Y)(R(u, Z)X)]_x^H \\
4. \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^V) Z^H &= [\frac{1}{4} R(R(u, Y)Z, X)u + \frac{1}{2} R(X, Z)Y]_x^V + \frac{1}{2} [(\nabla_X R)(u, Y)Z]_x^H \\
5. \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^H) Z^V &= [R(X, Y)Z + \frac{1}{4} R(R(u, Z)Y, X)u - \frac{1}{4} R(R(u, Z)X, Y)u]_x^V \\
&\quad + \frac{1}{2} [(\nabla_X R)(u, Z)Y - (\nabla_Y R)(u, Z)X]_x^H \\
6. \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^H) Z^H &= \frac{1}{2} [(\nabla_Z R)(X, Y)u]_x^V \\
&\quad + [R(X, Y)Z + \frac{1}{4} R(u, R(Z, Y)u)X \\
&\quad + \frac{1}{4} R(u, R(X, Z)u)Y + \frac{1}{2} R(u, R(X, Y)u)Z]_x^H
\end{aligned}$$

où $(x, u) \in TM$ tel que $\pi(u) = x$

la preuve découle immédiatement de la Proposition 5.5.3.

Preuve : (de la Proposition 5.5.4)

1)

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{(x,u)}(X^V, Y^V) Z^V &= \widehat{\nabla}_{X^V} \widehat{\nabla}_{Y^V} Z^V - \widehat{\nabla}_{Y^V} \widehat{\nabla}_{X^V} Z^V - \widehat{\nabla}_{[X^V, Y^V]} Z^V \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(X^V, Y^V)Z^H &= \widehat{\nabla}_{X^V}\widehat{\nabla}_{Y^V}Z^H - \widehat{\nabla}_{Y^V}\widehat{\nabla}_{X^V}Z^H - \widehat{\nabla}_{[X^V, Y^V]}Z^H \\
&= \widehat{\nabla}_{X^V}\widehat{\nabla}_{Y^V}Z^H - \widehat{\nabla}_{Y^V}\widehat{\nabla}_{X^V}Z^H \\
&= \frac{1}{2}\{\widehat{\nabla}_{X^V}(R(*, Y)Z)^h - \widehat{\nabla}_{Y^V}(R(*, X)Z)^h\}
\end{aligned}$$

de la formule (5.97), on a

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{(x,u)}(X^V, Y^V)Z^H &= \frac{1}{2}\{(R(X, Y)Z)_{(x,u)}^H + \frac{1}{2}(R_x(u, X)R(u, Y)Z)^H \\
&\quad - (R(Y, X)Z)_{(x,u)}^H - \frac{1}{2}(R_x(u, Y)R(u, X)Z)^H\} \\
&= [R_x(X, Y)Z] + \frac{1}{4}R_x(u, X)R(u, Y)Z - \frac{1}{4}R_x(u, Y)(R_x(u, X)Z)]^H
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(X^H, Y^V)Z^V &= \widehat{\nabla}_{X^H}\widehat{\nabla}_{Y^V}Z^V - \widehat{\nabla}_{Y^V}\widehat{\nabla}_{X^H}Z^V - \widehat{\nabla}_{[X^H, Y^V]}Z^V \\
&= -\widehat{\nabla}_{Y^V}(\nabla_X Z)^V - \frac{1}{2}\widehat{\nabla}_{Y^V}(R(*, Z)X)^h - \widehat{\nabla}_{(\nabla_X, Y)^V}Z^V \\
&= -\frac{1}{2}\widehat{\nabla}_{Y^V}(R(*, Z)X)^h
\end{aligned}$$

En vertu de la formule (5.97), on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^V)Z^V &= -\frac{1}{2}[\widehat{\nabla}_{Y^V}(R(*, Z)X)^h]_{(x,u)} \\
&= -\frac{1}{2}[R_x(Y, Z)X] + \frac{1}{2}R_x(u, Y)(R_x(u, Z)X)]^H
\end{aligned}$$

Les autres formules se démontrent de la même manière. ■

Théorème 5.5.1. *Soit (TM, g^S) la variété de Sasaki associée à la variété (M, g) . Alors (M, g) est plate si et seulement si (TM, g^S) est plate.*

Preuve : De la Proposition 5.5.4 on a,

$$(R = 0) \Rightarrow (\widehat{R} = 0)$$

De la Proposition 5.5.4, formule (6), on obtient :

$$(R_p(X, Y)Z)^H = \widehat{R}_{(p,0)}(X^H, Y^H)Z^H = 0$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $p \in M$; D'où

$$(\widehat{R} = 0) \Rightarrow (R = 0)$$

■

5.5.3 Métrique de CHEEGER-GROMOLL sur TM

Définition 5.5.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne. La métrique de Cheeger-Gromoll $\hat{g}$ est une métrique naturelle définie sur le fibré tangent TM par :

$$\begin{aligned} 1) \hat{g}(X^H, Y^H) &= g(X, Y), \\ 2) \hat{g}(X^H, Y^V) &= 0, \\ 3) \hat{g}(X^V, Y^V) &= \frac{1}{1+r^2} (g(X, Y) + g(X, u)g(Y, u)). \end{aligned}$$

où $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, et $r = \|u\| = \sqrt{g(u, u)}$.

Connexion de LEVI-CIVITA

Proposition 5.5.5. Soit $\hat{\nabla}$ la connexion de LEVI-CIVITA sur le fibré tangent TM associée à la métrique de CHEEGER-GROMOLL $\hat{g}$. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, alors pour tout $(x, u) \in TM$:

$$\begin{aligned} 1) \hat{\nabla}_{X^H} Y^H &= (\nabla_X Y)^H - \frac{1}{2} \{R(X, Y)u\}^V, \\ 2) \hat{\nabla}_{X^H} Y^V &= \frac{1}{2\alpha} \{R(u, Y)X\}^H + (\nabla_X Y)^V, \\ 3) \hat{\nabla}_{X^V} Y^H &= \frac{1}{2\alpha} \{R(u, X)Y\}^H, \\ 4) \hat{\nabla}_{X^V} Y^V &= -\frac{1}{\alpha} (\hat{g}(X^V, u)Y^V + \hat{g}(Y^V, u)X^V) + \frac{1+\alpha}{\alpha} \hat{g}(X^V, Y^V)u \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \hat{g}(X^V, u) \hat{g}(Y^V, u)u. \end{aligned} \tag{5.98}$$

où localement $u = \sum u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\alpha = 1 + r^2$ et $U \in \mathfrak{X}(TM)$ désigne le champ de vecteurs vertical définit par :

$$U = \sum_{i=1}^m u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathcal{U} = U^V = \sum_{i=1}^m u^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

U (resp $\mathcal{U}$) sont constant sur chaque fibre.

Lemme 5.5.1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ , on a

$$\begin{aligned} X_{(x,u)}^H (f(r^2)) &= 0 \\ X_{(x,u)}^V (f(r^2)) &= 2f'(r^2)g(X, u) \end{aligned} \tag{5.99}$$

Preuve : Localement, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, alors

$$X^V = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad X^H = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i u^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}$$

De la formule 1.2.1, on a :

$$\begin{aligned}
X^H(f(r^2)) &= \frac{\partial}{\partial x^i}(f(r^2)) - \Gamma_{ik}^j u^k \frac{\partial}{\partial u^j}(f(r^2)) \\
&= f'(r^2) \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(g(u, u)) - \Gamma_{ik}^j u^k \frac{\partial}{\partial u^j}(g(u, u)) \right\} \\
&= f'(r^2) \left\{ u^l u^s \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{ls}) - \Gamma_{ik}^j u^k \frac{\partial}{\partial u^j}(u^l u^s g_{ls}) \right\} \\
&= f'(r^2) u^l u^s \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{ls}) - \Gamma_{il}^k g_{sk} - \Gamma_{is}^k g_{lk} \right\} \\
&= f'(r^2) u^l u^s \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{ls}) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ls}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{is}}{\partial x^l} \right] \right\} \\
&= 0. \\
X^V(f(r^2)) &= X^i f'(r^2) \frac{\partial}{\partial u^i}(u^l u^s g_{ls}) \\
&= 2X^i f'(r^2) u^s g_{is} \\
&= 2f'(r^2)g(X, u).
\end{aligned}$$

■

Lemme 5.5.2. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si pour $Y \in \Gamma(TM)$, on note

$$\begin{aligned}
g(Y, \cdot) : TM &\rightarrow \mathbb{R} \\
p = (x, u) &\mapsto g_x(Y_x, u)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
X^H(g(Y, \cdot)) &= g(\nabla_X Y, \cdot) \\
X^V(g(Y, \cdot)) &= g(X, Y)
\end{aligned}$$

Preuve : Localement, si $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, alors :

$$\begin{aligned}
X^H(g(Y, \cdot)) &= \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i u^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right) (g(Y, u)) \\
&= X(g(Y, u)) - X^i u^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} (g_{ab} Y^a u^b) \\
&= g(\nabla_X Y, u) + g(Y, \nabla_X (u^j \frac{\partial}{\partial x^j})) - X^i u^j \Gamma_{ij}^k (g_{ak} Y^a) \\
&= g(\nabla_X Y, u) + g(Y, X^i u^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^j}) - g(Y, X^i u^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \\
&= g(\nabla_X Y, u). \\
X^V(g(Y, \cdot)) &= X^i \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{ab} Y^a u^b) \\
&= X^i g_{ab} Y^a \frac{\partial}{\partial u^i} (u^b) \\
&= X^i g_{ai} Y^a \\
&= g(X, Y).
\end{aligned}$$

■

Preuve : [De la Proposition 5.5.5].

En utilisant la formule de Koszul (1.9), la Définition 5.5.3 et les Lemmes 5.5.1 et 5.5.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\bullet 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) &= X^H(\widehat{g}(Y^H, Z^H)) + Y^H(\widehat{g}(X^H, Z^H)) - Z^H(\widehat{g}(X^H, Y^H)) \\
&\quad - \widehat{g}(X^H, [Y^H, Z^H]) + \widehat{g}(Y^H, [Z^H, X^H]) + \widehat{g}(Z^H, [X^H, Y^H]) \\
&= 2\widehat{g}((\nabla_X Y)^H, Z^H). \\
&= 2\widehat{g}\left((\nabla_X Y)^H + (R(X, Y)u)^V, Z^H\right). \\
\bullet 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) &= X^H(\widehat{g}(Y^H, Z^V)) + Y^H(\widehat{g}(X^H, Z^V)) - Z^V(\widehat{g}(X^H, Y^H)) \\
&\quad - \widehat{g}(X^H, [Y^H, Z^V]) + \widehat{g}(Y^H, [Z^V, X^H]) + \widehat{g}(Z^V, [X^H, Y^H]) \\
&= -\widehat{g}(\{R(X, Y)u\}^V, Z^V) \\
&= 2\widehat{g}\left((\nabla_X Y)^H - (R(X, Y)u)^V, Z^V\right) \\
\bullet \widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) &= -\frac{1}{2}\widehat{g}(Y^V, \{R(Z, X)u\}^V) \\
&= -\frac{1}{2\alpha}(g(Y, R(Z, X)u) + g(Y, u)g(R(Z, X)u, u)) \\
&= -\frac{1}{2\alpha}g(R(Z, X)u, Y) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\widehat{g}(\{R(u, Y)X\}^H, Z^H) \\
\bullet 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) &= X^H(\widehat{g}(Y^V, Z^V)) + \widehat{g}(Y^V, [Z^V, X^H]) \\
&\quad + \widehat{g}(Z^V, [X^H, Y^V]) \\
&= X^H\left(\frac{1}{\alpha}(g(Y, Z) + g(Y, u)g(Z, u))\right) - \widehat{g}\left(Y^V, (\nabla_X Z)^V\right) \\
&\quad + \widehat{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_X Y, u)g(Z, u) \right. \\
&\quad \left. + g(Y, u)g(\nabla_X Z, u)\right) - \widehat{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V) + \widehat{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Y, u)g(Z, u)\right) + \widehat{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) \\
&= 2\widehat{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V) \\
\bullet 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^H) &= \widehat{g}(X^V, [Y^H, Z^H]) \\
&= \widehat{g}(X^V, (R(Y, Z)u)^V) \\
&= \frac{1}{\alpha}(g(X, R(Y, Z)u) + g(X, u)g(R(Y, Z)u, u)) \\
&= \frac{1}{\alpha}g(R(u, X)Y, Z) \\
&= \frac{1}{\alpha}\widehat{g}((R(u, X)Y)^H, Z^H).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^V) &= Y^H(\widehat{g}(Z^V, X^V)) - \widehat{g}(Z^V, (\nabla_Y X)^V) - \widehat{g}(X^V, (\nabla_Y Z)^V) \\
&= \widehat{g}(Z^V, (\nabla_Y X)^V) + \widehat{g}(X^V, (\nabla_Y Z)^V) - \widehat{g}(Z^V, (\nabla_Y X)^V) \\
&\quad - \widehat{g}(X^V, (\nabla_Y Z)^V) \\
&= 0 \\
\bullet 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) &= -Z^H(\widehat{g}(X^V, Y^V)) + \widehat{g}(Y^V, (\nabla_Z X)^V) + \widehat{g}(X^V, (\nabla_Z Y)^V) \\
&= -\widehat{g}(Y^V, (\nabla_Z X)^V) - \widehat{g}(X^V, (\nabla_Z Y)^V) \\
&\quad + \widehat{g}(Y^V, (\nabla_Z X)^V) + \widehat{g}(X^V, (\nabla_Z Y)^V) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Du Lemmes 5.5.1 et 5.5.2, on a

$$\begin{aligned}
X^V(\widehat{g}(Y^V, Z^V)) &= -\frac{2}{\alpha^2}g(X, u)(g(Y, Z) + g(Y, u)g(Z, u)) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}(g(X, Y)g(Z, u) + g(X, Z)g(Y, u))
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\bullet 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) &= X^V(\widehat{g}(Z^V, Y^V)) + Y^V(\widehat{g}(X^V, Z^V)) - Z^V(\widehat{g}(X^V, Y^V)) \\
&= -\frac{2}{\alpha^2}g(X, u)(g(Y, Z) + g(Y, u)g(Z, u)) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}(g(X, Y)g(Z, u) + g(X, Z)g(Y, u)) \\
&\quad - \frac{2}{\alpha^2}g(Y, u)(g(X, Z) + g(X, u)g(Z, u)) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}(g(X, Y)g(Z, u) + g(Y, Z)g(X, u)) \\
&\quad + \frac{2}{\alpha^2}g(Z, u)(g(Y, X) + g(Y, u)g(X, u)) \\
&\quad - \frac{1}{\alpha}(g(Y, Z)g(X, u) + g(X, Z)g(Y, u)) \\
&= -\frac{2}{\alpha}g(X, u)\widehat{g}(Y^V, Z^V) - \frac{2}{\alpha}g(Y, u)\widehat{g}(X^V, Z^V) + \frac{2}{\alpha}g(Z, u)\widehat{g}(X^V, Y^V) \\
&\quad + \frac{2}{\alpha}g(X, Y)g(Z, u) \\
&= -\frac{2}{\alpha}g(X, u)\widehat{g}(Y^V, Z^V) - \frac{2}{\alpha}g(Y, u)\widehat{g}(X^V, Z^V) + \frac{2}{\alpha}g(Z, u)\widehat{g}(X^V, Y^V) \\
&\quad + 2\widehat{g}(X^V, Y^V)g(Z, u) - \frac{2}{\alpha}g(X, u)g(Y, u)g(Z, u)
\end{aligned}$$

De la définition 5.5.3, on a pour tout champ de vecteurs $\overline{X} \in \Gamma(TM)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\overline{X}^V, \mathcal{U}) &= \widehat{g}(\overline{X}^V, U^V) \\
&= \frac{1}{\alpha}(g(\overline{X}, U) + g(\overline{X}, U)g(U, U)) \\
&= g(\overline{X}, U)
\end{aligned}$$

par suite, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) &= \frac{1}{\alpha} \left\{ -\widehat{g}(X^V, \mathcal{U})\widehat{g}(Y^V, Z^V) - \widehat{g}(Y^V, \mathcal{U})\widehat{g}(X^V, Z^V) + (1 + \alpha)\widehat{g}(Z^V, \mathcal{U})\widehat{g}(X^V, Y^V) \right. \\
 &\quad \left. - \widehat{g}(X^V, \mathcal{U})\widehat{g}(Y^V, \mathcal{U})\widehat{g}(Z^V, \mathcal{U}) \right\} \\
 &= \frac{2}{\alpha} \widehat{g} \left(-\widehat{g}(X^V, \mathcal{U})Y^V - \widehat{g}(Y^V, \mathcal{U})X^V + (1 + \alpha)\widehat{g}(X^V, Y^V)\mathcal{U} \right. \\
 &\quad \left. - \widehat{g}(X^V, \mathcal{U})\widehat{g}(Y^V, \mathcal{U})\mathcal{U}, Z^V \right)
 \end{aligned}$$

■

5.5.4 β -métrique sur TM .

Définition 5.5.4. Soit (M, g) une variété Riemannienne et $\beta \in \mathbb{R}_+$. Sur le fibré tangent TM , on définit la métrique β -metric noté $\widetilde{g}$ par

1. $\widetilde{g}(X^H, Y^H) = \frac{\varepsilon}{2}g(X, Y) \circ \pi$
2. $\widetilde{g}(X^H, Y^V) = 0$
3. $\widetilde{g}_{(x,u)}(X^V, Y^V) = \frac{1}{\alpha}(g_x(X, Y) + \beta g_x(X, u)g_x(X, u))$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $(x, u) \in TM$, $r = g(u, u)$, $\alpha = 1 + \beta g_x(u, u)$ et $\varepsilon \in \{1, 2\}$.

Noton que si $\beta = 0$ (resp $\beta = 1$) et $\varepsilon = 2$, alors $\widetilde{g}$ est la métrique de Sasaki (resp la métrique de Cheeger-Gromoll).

Dans la suite on prend $\varepsilon = 1$.

Lemme 5.5.3. Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors pour tout $x \in M$ et $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$, on a les formules suivantes :

1. $X^H(g(u, u))_{(x,u)} = 0$
2. $X^H(g(Y, u))_{(x,u)} = g(\nabla_X Y, u)_x$
3. $X^V(g(u, u))_{(x,u)} = 2g(X, u)_x$
4. $X^V(g(Y, u))_{(x,u)} = g(X, Y)_x$

Preuve : Localement, si $U : x \in M \rightarrow U_x = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in TM$ est un champ de vecteurs constant sur chaque fibre $T_x M$, alors :

$$\begin{aligned}
1. \quad X^H(g(u, u))_{(x, u)} &= [X^i \frac{\partial}{\partial x^i} g_{st} y^s y^t - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k} g_{st} y^s y^t]_{(x, u)} \\
&= X(g(U, U))_x - 2(\Gamma_{ij}^k X^i y^j g_{sk} y^s)_{(x, u)} \\
&= (X(g(U, U))_x - 2g(U, \nabla_X U))_x \\
&= 0. \\
2. \quad X^H(g(Y, u))_{(x, u)} &= [X^i \frac{\partial}{\partial x^i} g_{st} Y^s y^t - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k} g_{st} Y^s y^t]_{(x, u)} \\
&= X(g(Y, U))_x - (\Gamma_{ij}^k X^i y^j g_{sk} Y^s)_{(x, u)} \\
&= (X(g(Y, U))_x - g(Y, \nabla_X U))_x \\
&= g(\nabla_X Y, U)_x. \\
3. \quad X^V(g(u, u))_{(x, u)} &= [X^i \frac{\partial}{\partial y^i} g_{st} y^s y^t]_{(x, u)} = 2X^i g_{it} u^t = 2g(X, u)_x \\
4. \quad X^V(g(Y, u))_{(x, u)} &= [X^i \frac{\partial}{\partial y^i} g_{st} Y^s y^t]_{(x, u)} = X^i g_{si} Y^s = g(X, Y)_x
\end{aligned}$$

■

Théorème 5.5.2. Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\tilde{g}$ une β -metric relative à g sur TM . Si ∇ (resp $\tilde{\nabla}$) désigne la connexion de Levi-Civita associée à (M, g) (resp $(TM, \tilde{g})$), alors on a :

$$\begin{aligned}
1. \quad (\tilde{\nabla}_{X^H} Y^H)_p &= (\nabla_X Y)^H - \frac{1}{2}(R(X, Y)u)^V, \\
2. \quad (\tilde{\nabla}_{X^H} Y^V)_p &= (\nabla_X Y)^V + \frac{1}{2\alpha}(R(u, Y)X)^H \\
3. \quad (\tilde{\nabla}_{X^V} Y^H)_p &= \frac{1}{2\alpha}(R_x(u, X)Y)^H \\
4. \quad (\tilde{\nabla}_{X^V} Y^V)_p &= -\frac{\beta}{\alpha}[\tilde{g}(X^V, U^V)Y^V + \tilde{g}(Y^V, U^V)X^V + \beta\tilde{g}(X^V, U^V)\tilde{g}(Y^V, U^V)U^V \\
&\quad - (1 + \alpha)\tilde{g}(X^V, Y^V)U^V]_p \\
&= -\frac{\beta}{\alpha^2}[\alpha(g(X, U)Y^V + g(Y, U)X^V) - \beta g(X, U)g(Y, U)U^V \\
&\quad - (1 + \alpha)g(X, Y)U^V]_p
\end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $p = (x, u) \in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de (M, g) .

La preuve du Théorème 5.5.2 découle directement de la formule de Kozul, le Lemme 5.5.3 et les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
1. \quad \tilde{g}(X^V, U) &= \frac{1}{\alpha}[g(X, u) + \beta g(X, u)g(u, u)] = g(X, u) \\
2. \quad X^V(\tilde{g}(Y^V, Z^V)) &= -\frac{2\beta}{\alpha^2}g(X, U)[g(Y, Z) + \beta g(Y, U)g(Z, U)] \\
&\quad + \frac{\beta}{\alpha}[g(X, Y)g(Z, U) + g(X, Z)g(Y, U)]
\end{aligned}$$

5.5.5 Métrique Complète

Définition 5.5.5. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le relèvement complet du tenseur g au fibré tangent TM est une pseudo-métrique sur TM , de signature (m, m) , notée g^C , elle est dite métrique Complète.

De la Proposition (5.3.8), on a :

$$g^C(X^V, Y^C) = (g(X, Y))^V = g^C(X^C, Y^V) \quad (5.100)$$

$$g^C(X^C, Y^C) = (g(X, Y))^C \quad (5.101)$$

$$g^C(X^V, Y^V) = 0. \quad (5.102)$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Remarque 5.5.2. Localement si $(E_1, \dots, E_m)$ est une base orthonormale de champs de vecteurs sur M , alors

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(E_1^C + E_1^V), \dots, \frac{\sqrt{2}}{2}(E_m^C + E_m^V), \frac{\sqrt{2}}{2}(E_1^C - E_1^V), \dots, \frac{\sqrt{2}}{2}(E_m^C - E_m^V) \right) \quad (5.103)$$

est une base pseudo-horthonormale telle que :

$$\begin{aligned} g^C\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(E_i^C + E_i^V), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(E_j^C + E_j^V)\right)\right)\right) &= \frac{1}{2}(g(E_i, E_j))^C + (g(E_i, E_j))^V \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^C\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(E_i^C - E_i^V), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(E_j^C - E_j^V)\right)\right)\right) &= \frac{1}{2}(g(E_i, E_j))^C - (g(E_i, E_j))^V \\ &= -\delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^C\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(E_i^C + E_i^V), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(E_j^C - E_j^V)\right)\right)\right) &= \frac{1}{2}\{(g(E_i, E_j))^C + (g(E_i, E_j))^V - (g(E_j, E_i))^V\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Relativement à la base obtenue par la formule 5.103, la matrice associée à g^C est donnée par :

$$g^C = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.5.6. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si ∇ (resp ∇^C) désigne La connexion de Levi-Civita associée à la métrique g (resp la métrique complète g^C), alors :

$$\begin{aligned} \nabla_{X^V}^C Y^V &= 0 \\ \nabla_{X^V}^C Y^C &= \nabla_{X^C}^C Y^V = (\nabla_X Y)^V \\ \nabla_{X^C}^C Y^C &= (\nabla_X Y)^C \end{aligned} \quad (5.104)$$

Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

La preuve de la Proposition 5.5.6, se déduit de la Définition 5.5.5 et de la formule de Kozul (1.9).

Remarque 5.5.3. Soit (M^m, g) une variété Riemannienne ; Si $(\frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ est une base locale de champs de vecteurs relativement à une carte (U, x^i) , alors

$$((\frac{\partial}{\partial x^1})^C, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^m})^C, (\frac{\partial}{\partial x^1})^V, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^m})^V)$$

est une base locale des champs de vecteurs sur TM relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j)$, et on a :

$$g^C : \begin{pmatrix} y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.105)$$

$$(g^C)^{-1} : \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & y^k \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) .

5.5.6 Tenseur de Courbure d'une Métrique Complète

Proposition 5.5.7. Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si R^C désigne le tenseur de courbure associé à la métrique complète g^C sur le fibré tangent TM , alors , pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ on a :

$$\begin{aligned} 1) R^C(X^V, Y^V)Z^V &= 0 \\ 2) R^C(X^V, Y^V)Z^C &= 0 \\ 3) R^C(X^C, Y^V)Z^V &= 0 \\ 4) R^C(X^C, Y^V)Z^C &= (R(X, Y)Z)^V \\ 5) R^C(X^C, Y^C)Z^V &= (R(X, Y)Z)^V \\ 6) R^C(X^C, Y^C)Z^C &= (R(X, Y)Z)^C \end{aligned} \quad (5.107)$$

Preuve : De la Proposition (5.5.6) on a :

2)

$$\begin{aligned} R^C(X^V, Y^V)Z^C &= \nabla_{X^V} \nabla_{Y^V} Z^C - \nabla_{Y^V} \nabla_{X^V} Z^C - \nabla_{[X^V, Y^V]} Z^C \\ &= \nabla_{X^V} (\nabla_Y Z)^V - \nabla_{Y^V} (\nabla_X Z)^C \\ &= 0 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
R^C(X^C, Y^V)Z^C &= \nabla_{X^C} \nabla_{Y^V} Z^C - \nabla_{Y^V} \nabla_{X^C} Z^C - \nabla_{[X^C, Y^V]} Z^C \\
&= (\nabla_X \nabla_Y Z)^V - (\nabla_Y \nabla_X Z)^V - (\nabla_{[X, Y]} Z)^V \\
&= (R(X, Y)Z)^V
\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
R^C(X^C, Y^C)Z^C &= \nabla_{X^C} \nabla_{Y^C} Z^C - \nabla_{Y^C} \nabla_{X^C} Z^C - \nabla_{[X^C, Y^C]} Z^C \\
&= (\nabla_X \nabla_Y Z)^C - (\nabla_Y \nabla_X Z)^C - (\nabla_{[X, Y]} Z)^C \\
&= (R(X, Y)Z)^C
\end{aligned}$$

les autres égalités se démontrent d'une façon analogue. ■

Bibliographie

- [1] Abbassi M.T.K., Calvaruso G. and Perrone D., Harmonic sections of tangent bundles equipped with Riemannian g -natural metrics, Quarterly Journal of Mathematics - QUART J MATH , vol. 61, no. 3 (2010).
- [2] ABBASSI M. T. K. and SARIH M., On Natural Metrics on Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO) Tomus 41 (2005), 71 - 92.
- [3] Aghasi ., Dodson C.T.J., Galanis G.N. and Suri A., Infinite dimensional second order differential equations via T^2M . Nonlinear Analysis-theory Methods and Applications, vol. 67, no. 10 (2007), pp. 2829-2838.
- [4] Antonelli P.L., and Anastasiei M., The Differential Geometry of Lagrangians which Generate Sprays, Dordrecht : Kluwer, 1996.
- [5] Antonelli P.L., Ingarden R. S., and Matsumoto M. S., The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology , Dordrecht : Kluwer, 1993.
- [6] M. Ara, Geometry of F-harmonic maps, Kodai Math. J. 22 (1999), 243-263.
- [7] P.Baird ,Harmonic maps between Riemannain manifolds. Clarendon Press Oxford 2003.
- [8] P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, *Conformal and semi-conformal biharmonic maps*, Annals of global analysis and geometry, Vol 34, (2008),403-414.
- [9] P. Baird, J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds,Clarendon Press Oxford 2003.
- [10] A. Balmus, S. Montaldo and C. Onicius, Biharmonic maps between warped product manifolds. J.Geom.Phys. 57(2007),no. 2, 449-466.
- [11] C.L Bejan M.Benyounes Harmonic φ Morphisms Volume 44 (2003),No.2.309-321.
- [12] C.L Bejan and T.Q. Binh, Harmonic maps and morphisms from the tangent bundle, Acta Sci. Math (Szeged) 66 (2000) no 1-2, 385 - 401
- [13] V. Bérard, Les applications conforme-harmoniques., Université de Strasbourg. C.N.R.S (2010).
- [14] V. Bérard, Les applications conforme-harmoniques., Canad. J. Math. 65 (2013), 266-298
- [15] M. Berger, Quelques formules de variation pour une structure Riemannain, Ann. Sci. Ecole Sup. 4^e series 3,285-294(1970).
- [16] R.L.Bishop R. L. and B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc., 145, (1969), 1-49

- [17] Boeckx E. and Vanhecke L., Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles, Differential Geometry and its Applications Volume 13, Issue 1, July 2000, Pages 77-93.
- [18] A. Boulal, N.E.H. Djaa, M. Djaa and S. Ouakkas, Harmonic maps on generalized warped product manifolds, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 4 Issue 1(2012) pages 156-165 .
- [19] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc., Biharmonic submanifolds of S^3 , Int. J.Math., 12(2001), 867-876.
- [20] O. Calin and D. Chen Chang, Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds Applications to Partial Differential Equations, 12005 Birkhäuser Boston
- [21] D.M.J. Calderbank, P. Gauduchon and M. Herzlich, On the Kato inequality in Riemannian geometry. Séminaires and Congrès, Société Mathématiques de France 2000.4(2000), p. 95-113
- [22] C.Carathéodory, calculus of variations and partial differential equations of the first order, vol. I and II, Holden Day, San Francisco, 1967 (first edition in German Teubner, Berlin (1935).
- [23] Calvaruso G., Naturally Harmonic Vector Fields, Note di Matematica, Note Mat. 1(2008), suppl. n. 1, 107-130
- [24] Cheeger J. and Gromoll D., On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math. 96, 413-443, (1972).
- [25] Cengiz, N., Salimov, A.A. : Diagonal lift in the tensor bundle and its applications. Appl. Math. Comput. 142, no. 2-3, 309-319 (2003).
- [26] , B.Y. Chen, Geometry of warped products as Riemannian submanifolds and related problems, Soochow Journal of Mathematics. Volume 28, No. 2, pp. 125-156, April 2002.
- [27] B.Y. Chen, Geometry of submanifolds and its applications. Science University of Tokyo, Tokyo, 1981. bibitemB.CheChen B.Y., Geometry of submanifolds, Marcel Dekker Inc., New York, 1983.
- [28] Chen Li and Chen Wenyi, Gradient estimates for positive f-harmonic functions, Acta Mathematica Scientia 2010, 30B(5) :1614-1618
- [29] A. M. Cherif, Géométrie harmonique des variétés. Thèse de Doctorat en sciences, Université d'Oran 2014.
- [30] A. M. Cherif, H. Elhendi And M. Terbeche, on generalized conformal maps, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 4 Issue 4 (2012), 99-108.
- [31] A. M. Cherif and M. Djaa, On generalized f-harmonic morphisms, Comment. Math. Univ. Carolin. 55,1 (2014) pp 17-27.
- [32] A.M. Cherif and M. Djaa, Geometry of energy and bienergy variations between Riemannian manifolds, Kyungpook Mathematical Journal, (to appear) (2015).
- [33] Y.J. Chiang, f-biharmonic Maps between Riemannian Manifolds, Department of Mathematics, University of Mary Washington Fredericksburg, VA 22401, USA 2012.
- [34] Cieslinski J., Sym A. and Wesselius W., On the Geometry of the Inhomogeneous Heisenberg Ferromagnet Model : non-integrable case, J. Phys. A. Math. Gen. 26 (1993), 1353-1364.

- [35] Course, .N, f -harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target ; New York Journal of Mathematics. 13, (2007), 423-435.
- [36] M. Dajczer, Submanifolds and isometric immersion, Volume 13 de Mathematics lecture series. Publish or Perish, Incorporated, 1990.
- [37] M.H. Dida, Holonomie des métriques naturelles sur le fibré tangent, Doctorat en Sciences, Université Djilali Liabes Sidi Bel Abbes 03-07-2010.
- [38] H.M. Dida, F. Hathout, M. Djaa, On the Geometry of the Second Order Tangent Bundle with the Diagonal Lift Metric, International Journal of Mathematical Analysis 2009 ; Vol. 3, 2009,
- [39] M. Djaa, Introduction à la Géométrie Riemannienne Et L'Analyse Harmonique sur les variétés (Master - Doctorat) Centre Universitaire de Relizane(2015).
- [40] M. Djaa and J. Gancarzewicz, The geometry of tangent bundles of order r . 1985 , Boletin Academia , Galega de Ciencias ,Espagne, Vol 4, p 147-165
- [41] M. Djaa, Prolongation des structures géométriques au fibré tangent d'ordre supérieur et Classification spectrale des opérateurs de multiplications, Thèse de doctorat d'état, Université d'Oran 1998.
- [42] M. Djaa, H. Elhendi and S. Ouakkas, On the Biharmonic Vector Fields. Turk.J. Math, Vol 35,(2011)
- [43] M. Djaa and A. M. Cherif, On Generalized f -biharmonic Maps and Stress f -bienergy Tensor. Journal of Geometry and Symmetry in Physics JGSP 29(2013), pp. 65-81.
- [44] A. M. Cherif and M. Djaa, On generaized f -harmonic morphisms, Co-ment. Math. Univ. Carolin. 55,1 (2014) pp 17-27.
- [45] M. Djaa, A. M. Cherif, K. Zegga And S. Ouakkas, on the generalized of harmonic and bi-harmonic maps, international electronic journal of geometry, volume 5 no. 1 pp. 1-11 (2012).
- [46] N.E.H. Djaa, A. Boulal and A. Zagane, Generalized Warped Product Manifolds And Biharmonic Maps. Acta Math. Univ. Comenianae. Vol. LXXXI, 2 (2012), pp. 283-298.
- [47] M. Djaa, N.E.H. Djaa and R. Nasri, Natural Metrics on T2M and Harmonicity, International Electronic Journal of Geometry Volume 6 No.1 pp. 100-111 (2013) .
- [48] N.E.H. Djaa and M. Djaa, Generalized Warped Product Manifold and Critical Riemannian Metric, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis Vol 28 (2012).
- [49] N.E.H. Djaa, S. Ouakkas, M. Djaa, Harmonic sections on the tangent bundle of order two. Annales Mathematicae et Informaticae 38(2011) pp 15-25.
- [50] M. Djaa, M. Elhendi, S. Ouakkas, On the Biharmonic Vector Fields. Turkish Journal of Mathematics. 36(2012) pp 463-474.
- [51] M. Djaa, Prolongation des structures géométriques au fibré tangent d'ordre supérieur et Classification spectrale des opérateurs de multiplications, Thèse de doctorat d'état, Université d'Oran 1998.
- [52] F. Dobarro and E. Lami Dozo, Scalar curvature and warped products of Riemann manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 161-168.

- [53] F. Dobarro and B. Unal, About curvature, conformal metrics and warped products, Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical Volume 40 Number 46 2007 .
- [54] P.Dombrowski ,On the Geometry of Tangent Bundle ,J.Rrine Angew .Math.210 (1962),70-80.
- [55] Duggal K. L., Constant scalar curvature and warped product globally null manifolds, J. Geom. Phys., 43, (2002), 327-340.
- [56] J. Eells, p-Harmonic and exponentially harmonic maps, lecture given at Leeds University, June 1993.
- [57] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Maths. 86(1964).
- [58] J. Eells et L. Lemaire, *A report on harmonic maps*,Bull. London Math. Soc. 16 (1978), 1-68.
- [59] J. Eells et L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.
- [60] H. Elhendi,Applications Harmonique et Biharmonique sur Le fibré tangent. Memoire de Magister, Université de Mascara 2010.
- [61] B. Fuglede, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978) 107-144
- [62] Gezer A., On the Tangent Bundle With Deformed Sasaki Metric. International Electronic Journal of Geometry Volume 6 No. 2 pp. 19-31 (2013).
- [63] S. Gudmundsson, the geometry of harmonic morphisms, University of Leeds,Department of Pure Mathematics, April 1992.
- [64] S.Gudmundson and E. Kappos, on the Geometry of Tangent Bundles, Expo.Math .20(2002),1-41.
- [65] C. Godbillon, Géométrie différentielle et mécanique analytique collection Hermann. Paris (1968).
- [66] F. Hathout, Sur Les Métriques Naturelles sur le Fibré Tangent et Signature de Feuilletage et Applications ; Thèse de doctorat. Université Djilali Liabes Sidi Bel Abbès 2008.
- [67] F. Hathout, M.H. Dida Diagonal Lift in the Tangent Bundle of Order Two and its Applications, TUBITAK,Turk J Math, 30 (2006), 373-384.
- [68] R. S. Hamilton. The formation of singularities in the ricci flow. Surveys in Diff. Geom. 27-136, 1995.
- [69] R. S. Hamilton, Harmonic Maps of Manifolds with boundary, Lect. Notes in Math. 471, Springer-Verlag, 1975.
- [70] E. Hebey, Nonlinear Analysis on Manifolds, Sobolev Spaces and Inequalities ; Reprinted by the American Mathematical Society,(2000).
- [71] M. Herzlich, Refined Kato inequality in Riemannian geometry, Journées Equations aux dérivées partielles. Nantes 5-9 juin 2000.
- [72] T. Ishihara, Harmonic sections of tangent bundles. J. Math. Tokushima Univ. 13 (1979), 23-27.

- [73] G.Y. Jiang, Harmonic maps and their first and second variational formulas. Chinese Ann.Math. Ser. A. 7, 389-402 (1986).
- [74] E.Kappos, Natural metrics on tangent bundles, Master's thesis 2001.
- [75] B. H. Kim, Warped products with critical Riemannian metric, Proc. Japan Acad, 71, ser. A 117-118(1995)
- [76] S.Kobayashi and K.Nomizu, Fondation of Differential Geometry ,vol.I,II.Interscience ,New York-London 1963.
- [77] J.Konderak, On harmonic vector fields, Publication Matemàtiques, Vol 36(1992), 217-288.
- [78] Kowalski O. and Sekizawa M., On Riemannian Geometry Of Tangent Sphere Bundles With Arbitrary Constant Radius. Archivum Mathematicum (BRNO).Tomus 44 (2008), 391-401
- [79] J.M. Lee, Differentiel Geometry Analysis and physics, Universitext (2000).
- [80] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et varietés kähleriennes, Symposia Mathematica, Vol. III , Academic Press, London, 1968/1969, pp. 341-402.
- [81] E. Loubeau, S. Montaldo, And C. Oniciuc, the stress-energy tensor for biharmonic maps, arXiv :math/0602021v1 [math.DG] 1 Feb 2006.
- [82] E.Loubeau and C.Oniciuc. On the biharmonic and harmonic indices of the hopf map, Transaction of the American Mathematical Society, 359 (2007) , 5239-5256.
- [83] Wei-jun Lu, f-Harmonic maps of doubly warped product manifolds , Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities , June 2013, Volume 28, Issue 2, pp 240-252 . Springer 2013
- [84] Wei-jun Lu, On f -bi-harmonic maps between Riemannian manifolds, arXiv 2013.
- [85] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Collection Enseignement des Sciences, 14, Hermann Paris 1972.
- [86] T. Masson, Géométrie Différentielle, Groupes et Algèbres de Lie , Fibrés et Connexion. Version du 10 Novembre 2003.
- [87] Merlin, X., Méthodes algèbre, Ellipses (1999).
- [88] P.W. Michor, Topics in Differential Geometry, The University of Vienna 2001.
- [89] J. Milnor, Morse Theory, Ann. of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, Princeton 1963.
- [90] A. Morimoto, Liftings of tensor fields and connection to tangent bundles of higher order Nagoya Math.jour, 40(1970), 99-120.
- [91] E. Musso and F. Tricerri, Riemannian metrics on tangent bundles, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 150(1988), 1-10.
- [92] Y. Muto, Curvature and critical Riemannian metric, J. Math. Soc. Japan. Vol. 26, Num 4, 686-697(1974).
- [93] R. Nasri, M. Djaa. Sur la courbure des variétés riemanniennes produits. Université Mentouri, Constantine, Algérie, Sciences et Technologie A – N°24, Décembre. (2006), pp. 15-20.

- [94] R. Nasri and M. Djaa, "On the geometry of the product Riemannian with the Poisson structure" ; International Electronic Journal of Geometry, Volume 3 No. 2 pp. 1 - 14 (2010).
- [95] B. O'Neill, Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.
- [96] Ye-Lin Ou. On f-harmonic morphisms between Riemannian manifolds, arXiv : 1103.5687v1, 2011
- [97] C. Oniciuc, Nonlinear connections on tangent bundle and harmonicity. Ital. J. Pure Appl. No 6 (1999), 109-122.
- [98] C. Oniciuc, Pseudo-Riemannian metrics on tangent bundle and harmonic problems, Bull. Belg. Soc. 7(2000), 443-454.
- [99] V. Opriou, On Harmonic Maps Between Tangent Bundles. Rend.Sem.Mat, Vol 47, 1 (1989).
- [100] Ouakkas, S., Nasri, R. and Djaa, M., On the f-harmonic and f-biharmonic maps, JP Journal of Geometry and Topology, Volume 10, Number 1, 2010, Pages 11-27 Mars 2010.
- [101] Ouakkas, S., Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geometry and its Applications, 26 (2008), 495-502.
- [102] S. Ouakkas, Géométrie conforme associée aux applications biharmoniques et Théorèmes de Liouville, Thèse de Doctorat, 2008, Université de Sidi Belabbes.
- [103] P. Pansu . Géométrie différentielle, Cours DEA, Laboratoire de Mathématique d'Orsay . 27 octobre 2005
- [104] F. Paulin, Géométrie différentielle élémentaire, Ecole Normale Supérieure, 2006-2007.
- [105] P. Petersen , Riemannian Geometry (Second Edition), 1-70.
- [106] R. Ponge, H. Reckziegel. Twisted products in pseudo-Riemannian geometry. Geom. Dedicata 48(1993), no 1, 15-25.
- [107] M. Rimoldi and G. Veronelli, *f*-Harmonic maps and Applications to Gradient Ricci Solitons, Institut Élie Cartan Université de Lorraine ; Journées Nancéiennes de Géométrie 17 et 18 janvier 2012.
- [108] Salimov, A., Gezer, A., Akbulut, K., *Geodesics of Sasakian metrics on tensor bundles*, Mediterr. J. Math. **6**, no.2, 135-147 (2009).
- [109] A.A. Salimov and S. Kazimova, *Geodesics of the Cheeger-Gromoll Metric*, Turk J Math **33** (2009) , 99 - 105.
- [110] A.A. Salimov and A. Gezer, On the geometry of the $(1, 1)$ -tensor bundle with Sasaki type metric. Chinese Annals of Mathematics, Series B May 2011, Volume 32, Issue 3, pp 369-386.
- [111] A. A. Salimov, F. Agca, Some Properties of Sasakian Metrics in Cotangent Bundles. Mediterranean Journal of Mathematics ; 8(2) (2011). 243-255.
- [112] Sasaki, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II, Tohoku Math. J. 14 (1962), 146-155.

- [113] Sekizawa M., Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric, Tokyo J. Math. 14, No. 2 (1991), 407-417.
- [114] Shuxiang Feng and Yingbo Han Liouville Type Theorems of f -Harmonic Maps with Potential - Results in Mathematics January 2014. Springer Basel.
- [115] M. Svensson, Polynomyial Harmonic Morphisms ,Examensarbete 20 poäng Lunds Universitet Noveembre 1998.
- [116] K. yano and S.Ishihara , Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker.Inc. New York 1973.
- [117] K. Yano and S.Ishihara, Horizontal lifts of tonsors fields and connexion to the tangent bundles. j.Math.Mech. 16(1967), 1015-1030.
- [118] Wu HX, Chen W H. Topics of Riemannian Geometry. Beijing : Beijing University Press,1993.
- [119] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), pp. 201-228.
- [120] Yingbo Han and Shuxiang Feng, Some result of f -biharmonic maps, Acta Mathematica Universitatis Comeniane, In press 2014.
- [121] K. Zegga, M. Djaa and A.M. Cherif, On the f -biharmonic maps and submanifolds, Kyungpook Mathematical Journal, 55 (2015), pp 157-168

Mustapha DJAA, Professeur en mathématiques au centre universitaire Ahmed Zabana Relizane. Spécialiste en Géométrie, Analyse globale et Théorie spectrale. Directeur du laboratoire Géométrie Analyse Contrôle et Application à l'université Ahmed Medeghri Saida 2000-2011. Directeur du laboratoire Gestion des marchés financiers par l'application des mathématiques et l'informatique 20012-2017. Responsable du domaine mathématiques et informatique 2013-2017. Auteur de plusieurs publications internationales en géométrie, analyse et théorie spectrale. Auteur de l'Algèbre générale et Mesure et intégration publiés par l'office national des publications universitaires.