Corrigé Maths3 (Janvier 2022)

Exercice N°01

$$I_1 = \iiint_D (x^2 + y + 2z).dx.dy.dz, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le 1;\ \ x \le y \le z, 0 \le z \le 1\}$$

En utilisant le théorème de fubinni

1. $I_1 = \int_0^1 (\int_0^1 (\int_x^z (x^2 + y + 2z)dy)dzdx = \int_0^1 \int_0^1 \left[x^2.y + \frac{1}{2}y^2 + 2zy\right]_x^z dzdx$

$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 z + \frac{1}{2}z^2 + 2z^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2zx)\ \ dzdx = \left[\int_0^1 [\frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{2}{3}z^3 - x^3 z - \frac{1}{2}x^2 z - \right.$
$\left. xz^2\right]_0^1 = \int_0^1 (-x^3 - x + \frac{5}{6}) = \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

$$I_2 = \iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dx.dy \ \ ; \qquad D = \{(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2, x^2 + y^2 \le 9\}$$

Changement de variable :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dx.dy = rdrd\theta \\ 0 \le r \le \ 3\ ;\ \ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

On obtient :

$$I_2 = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{r^2(\cos\theta^2 + \sin\theta^2)}}{r^2(\cos\theta^2 + \sin\theta^2)} rdrd\theta$$

$= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{r^2}}{r^2} rdrd\theta$

$$= \int_0^3 1dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta = |\mathrm{r}|_0^3 . |\theta|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

Exercice N°02

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{4}{(1+4x)^3}.dx$$

$$I_1 = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{4}{(1+4x)^3}.dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{-1}{2}\frac{1}{(1+4x)^2}\right]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{-1}{2}\frac{1}{(1+4x)^2}\right]_1^t = \left(\frac{-1}{2}\frac{1}{(1+4t)^2}\right) + \frac{1}{50}$$

$$= \frac{1}{50}$$

Donc I_1 *convergente.*

$I_2 = \int_{-\infty}^{0} e^x.x.dx$

$I_2 = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 e^x.x$ On utilise intégrale par partie

$u = x \quad \to \; u' = 1$

$v' = e^x \;\to\; v = e^x$

$$I_2 = \lim_{t\to-\infty} [xe^x]_t^0 - \int_t^0 e^x.dx$$

$$\lim_{t\to-\infty} ([xe^x]_t^0 - [e^x]_t^0) = \lim_{t\to-\infty} - \cancelto{0}{te^t} - 1 + \cancelto{0}{e^t} = -1$$

Donc I_2 *convergente*

Exercice N°03 :

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = x \;\ldots\ldots\ldots.(1)$

$$y = y_H + y_p$$

Solution homogène : $y_H = Ce^{-\int -\frac{1}{x}dx} = Ce^{ln\mathrm{x}} = C.x$

Solution particulière : $y_p = C(x).x$

$y_p{}' = c'(x).x + C(x)$

(1)$\Rightarrow c'(x).x + C(x) - \frac{1}{x}C(x).x = \mathrm{x}$

$\Rightarrow c'(x) = 1$ donc

$C(x) = \int 1dx = x$

Donc $y_p = C(x)x = x^2$

$y = y_H + y_p = C.x + x^2$

On a $y(1) = 3 \Rightarrow C.1 + 1^2 = 3$

$\Rightarrow C = 2$

La solution est

$y = 2.x + x^2$

2) Solutions de l'équation homogène est :

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

L'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$ on a $\Delta = 0$; $r = -1$ racine double

Donc $y_H = (c_1.x + c_2)e^{-x}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3) La solution $y'' + 2y' + y = 4 \quad xe^{-x}$

y_p =? Comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors

$y_p = Q(x)e^x = (ax + b)e^x$;

$y_p' = (ax + a + b)e^x$;

$y_p'' = (ax + \mathrm{b} + 2.a)e^x$

En remplaçant dans (2), on obtient :

$(ax + \mathrm{b} + 2.a)e^x + 2(ax + a + b)e^x + (ax + b)e^x = 4xe^x$

$4ax + 4a + 4b = 4xe^x$

Par identification on trouve

$\begin{cases} a = 1 \\ 4b + 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Donc

$y_p = (x - 1)e^x$

4) La solution générale est :

y= $y_H + y_p = (c_1.x + c_2)e^{-x} + (x - 1)e^x$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$