

03/02/2022

Solution examen Méthode des éléments finis

exercice 1: (8 pts)

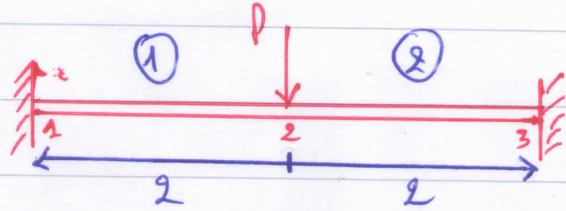
le principe de la MEF c'est de trouver:

$$\{F\} = [K] \cdot \{S\}$$

→
vecteur
charge

↓
matrice de
rigidité

↘
vecteur déplacement.



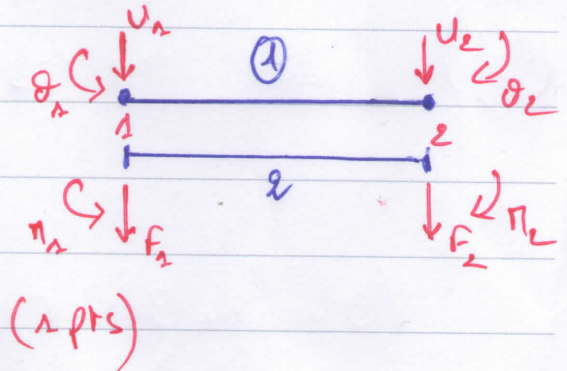
1) il faut déterminer en premier lieu la matrice de rigidité de chaque élément:

* élément ① entre nœud 1 et 2:

$$l_1 = 2, I_1 = 0,001, E_1 = 10^5.$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ \pi_1 \\ F_2 \\ \pi_2 \end{Bmatrix} = \frac{E_1 I_1}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_1\} = [K_1] \cdot \{S_1\}$$

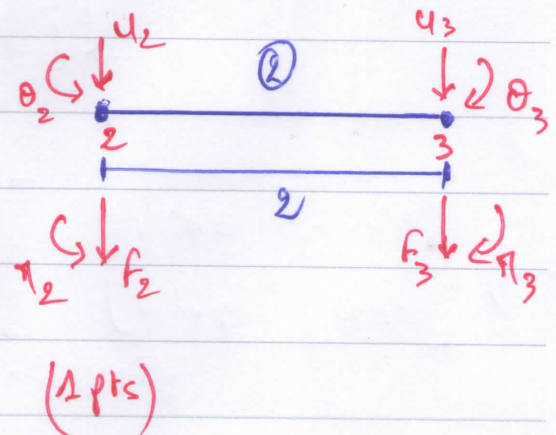


* élément ② entre nœud 2 et 3:

$$l_2 = 2, I_2 = 0,001, E_2 = 10^5.$$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ \pi_2 \\ F_3 \\ \pi_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_2 I_2}{l_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_2\} = [K_2] \cdot \{S_2\}$$



2) la matrice de rigidité globale:

maintenant on passe à l'assemblage

$$\Rightarrow 3 \times 2 = 6 \Rightarrow K = [6 \times 6]$$

Nbr de
nœuds

ddl

$$K = K_1 + K_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ \pi_1 \\ F_2 \\ \pi_2 \\ F_3 \\ \pi_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 & 0 & 0 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l_1 & 12+12 & -6l_1+6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1+6l_2 & 4l_1^2+4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 0 & 0 & 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (2 \text{ pts})$$

$l_1 = l_2 \Rightarrow$

3) les déplacements aux nœuds:

en appliquant les conditions aux limites pour simplifier le syst:

Nœud 1: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \neq 0 \\ \pi_1 \neq 0 \end{cases}$

Nœud 2: $\begin{cases} u_2 \neq 0 \\ \theta_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 = P = -25 \\ \pi_2 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ pts})$

Nœud 3: $\begin{cases} u_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_3 \neq 0 \\ \pi_3 \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ \pi_1 \\ -25 \\ 0 \\ F_3 \\ \pi_3 \end{Bmatrix} = \frac{10 \cdot 9,001}{(2)^3} \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & -12 & 8 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 24 & 0 & -12 & 12 \\ 12 & 8 & 0 & 32 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & -12 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

(1 pts)

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -25 = 300 \cdot U_2 + 0 \cdot \theta_2 \\ 0 = 0 \cdot U_2 + 400 \cdot \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_2 = -0,083 \text{ m} \\ \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ pts})$$

4) les reaction aux appuis:

pour determiner les reaction, il suffit de revenir au syst globale et on substitue les deplacement (S) dans le vecteur (S).

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ \pi_1 \\ -25 \\ 0 \\ F_3 \\ \pi_3 \end{Bmatrix} = \frac{100}{8} \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & -12 & 8 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 24 & 0 & -12 & 12 \\ 12 & 8 & 0 & 32 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & -12 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,083 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (**) \\ (1 \text{ pts}) \end{matrix}$$

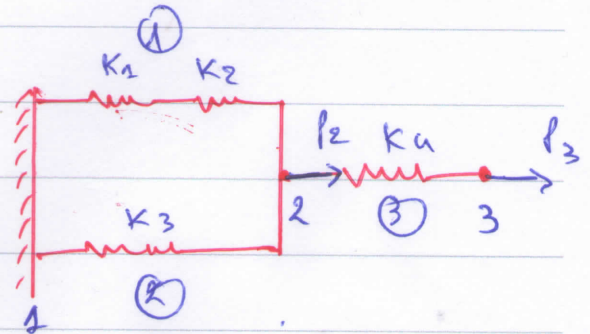
$$(**) \Rightarrow \begin{cases} F_1 = 12,45 \text{ KN} \\ \pi_1 = 12,45 \text{ KNm} \\ F_3 = 12,45 \text{ KN} \\ \pi_3 = -12,45 \text{ KNm} \end{cases} \quad (1 \text{ pts})$$

exercice 02: (6 pts)

1) matrice de rigidité elementaire:

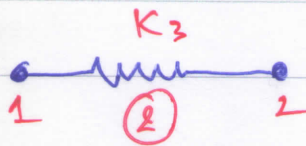
element ①: $K' = K_1 + K_2$

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} K' & -K' \\ -K' & K' \end{bmatrix} \quad (4 \text{ pts})$$



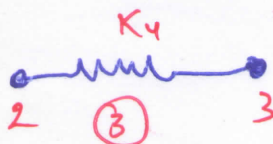
element ②:

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} K_3 & -K_3 \\ -K_3 & K_3 \end{bmatrix} \quad (4 \text{ pts})$$



element ③:

$$[K]_3 = \begin{bmatrix} K_4 & -K_4 \\ -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \quad (4 \text{ pts})$$



elements	nœuds
①	1 et 2
②	1 et 2
③	2 et 3

2) Matrice globale: 1 DDL x 3 nœuds = matrice (3x3).

$$[K] = \begin{bmatrix} K' + K_3 & -K' - K_3 & 0 \\ -K' - K_3 & K' + K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} 400 & -400 & 0 \\ -400 & 550 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ prs})$$

3) Calculer les déplacements aux nœuds:

On établit l'équation d'équilibre statique: $\{F\} = [K] \cdot \{S\}$.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -400 & 0 \\ -400 & 550 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

C.A: nœud 1: $u_1 = 0$, $F_1 = R_A$. (0,5 prs)

$$\begin{Bmatrix} R_A \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -400 & 0 \\ -400 & 550 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 550 \cdot u_2 - 150 \cdot u_3 = 1 & \text{--- (1)} \\ -150 \cdot u_2 + 150 \cdot u_3 = 2 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 400 \cdot u_2 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{3}{400} = 0,0075 \text{ m.} \quad (1 \text{ prs})$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 550 \cdot (0,0075) - 150 \cdot u_3 = 1 \Rightarrow u_3 = 0,02 \text{ m.} \quad (1 \text{ prs})$$

4) Calculer les réactions:

on revient au syst global:

$$\begin{Bmatrix} R_A \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -400 & 0 \\ -400 & 550 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,0075 \\ 0,02 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_A = -400 \cdot 0,0075 \\ R_A = -3 \text{ kN.} \end{cases} \quad (1 \text{ prs})$$

solution exercice 03 (06 pts):

1) exprimons la matrice jacobienne correspondante.

on met: $\xi = r$ et $\eta = \theta$.

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ pts})$$

mais on sait que:

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta \quad (0,5 \text{ pts})$$

Cela nous permet d'écrire:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} \\ \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1 \text{ pts})$$

2) Calculons le déterminant:

$$\det[\bar{J}] = (\cos \theta \times r \cos \theta) - (-r \sin \theta \times \sin \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta$$

$$\det[\bar{J}] = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \Rightarrow (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1.$$

$$\det[\bar{J}] = r \quad (1 \text{ pts})$$

3) Calculer la matrice inverse: $[\bar{J}]$ ou bien $[\bar{J}]^{-1}$.

$$[\bar{J}] = \frac{1}{\det[\bar{J}]} (\text{Com}[\bar{J}])^T \quad (1 \text{ pts})$$

$$(\text{Com}[\bar{J}])^T = \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \Rightarrow (\text{Com}[\bar{J}])^T = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1 \text{ pts})$$

$$[\bar{J}] = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$[\bar{J}] = [\bar{J}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \quad (1 \text{ pts})$$