Outils mathématiques

I. Eléments de surface dS et de volume dτ

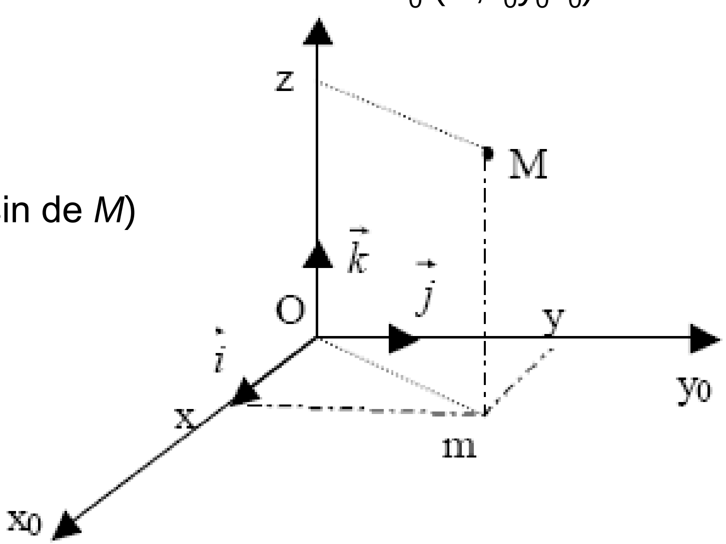
I.1. Coordonnées cartésiennes

Soient R_0 $(O,x_0y_0z_0)$ un repère direct orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et *M* la particule à repérer.

Dans R_0, la position de la particule *M* est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x,y,z),

le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}$$



Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (*M'* est très voisin de *M*) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$(Dans\; R_0,\; d\,\vec{i} = d\,\vec{j} = d\vec{k} = 0)$$

I.2. Coordonnées cylindriques

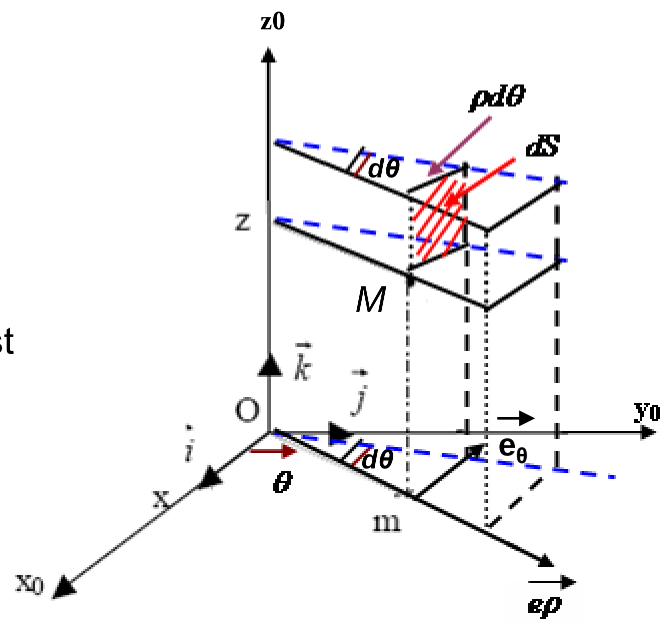
Dans le système de coordonnées cylindriques, la position de la particule *M* est données par trois

coordonnées cylindrique (ρ,θ,z) définit comme suit :

$\rho = \left|\overrightarrow{Om}\right|$ (m est la projection de M sur le plan (O, x_0, y_0, z_0), $\theta =$ angle $(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$ et z est la projection du vecteurposition $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $\overrightarrow{Oz_0}$.

Une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ est associée à ce système de coordonnées. Dans cette base , le vecteur positon $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\vec{k}$$



Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' très voisin de M) est :

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{k}$$

Cas particulier :

Si la trajectoire de M est plane, ce point peut être repéré par ses *coordonnées polaires* ρ et θ.

Surface élémentaire:

La surface élémentaire *dS* s'obtient par variation élémentaire des deux variables, θ et z

$$\Rightarrow dS = \rho\, d\theta\, dz$$

Volume élémentaire:

Le volume élémentaire $d\tau$ s'obtient par variation élémentaire de trois variables, θ, z et ρ

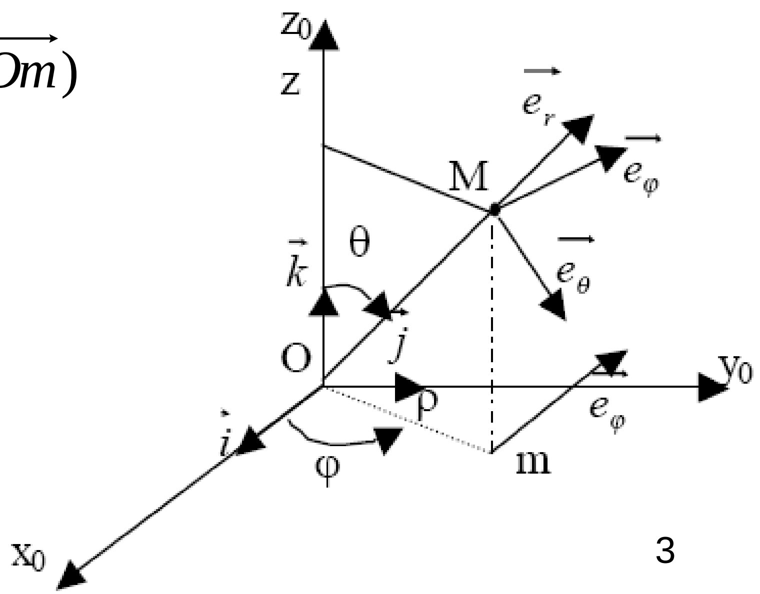
$$\Rightarrow d\tau = dSd\rho = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

I.3. Coordonnées sphériques

Dans le système de coordonnées sphériques, la position de la particule *M* est données par trois

coordonnées sphériques (r, φ, θ) définit comme suit :

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|; \quad \theta = angle(\overrightarrow{Oz_0}, \overrightarrow{OM}); \quad \varphi = angle(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$$



Dans la base ($\vec{er}$, $\vec{e\varphi}$,$\vec{e\theta}$) , le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{er}$$

Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire de la particule *M* en coordonnées sphériques est donné par :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r(\sin\theta)\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Surface élémentaire:

La surface élémentaire *dS* s'obtient par variation élémentaire des deux variables, θ et φ

$$\theta \to \theta + d\theta \text{ et } \quad \varphi \to \varphi + d\varphi$$

$$\Rightarrow dS = r\,\rho\,d\theta\,d\varphi\,; \quad \text{avec}\,\rho = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow dS = r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

Volume élémentaire:

Le volume élémentaire $d\tau$ s'obtient par variation élémentaire de trois variables, r, θ,φ

$$\theta \to \theta + d\theta \;;\; \varphi \to \varphi + d\varphi;\; r \to r + dr$$

$$\Rightarrow d\tau = dS\,dr = r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

Remarque :

Les surfaces et volumes finis se calcule en intégrant ses éléments de surface dans les cas de système cylindrique où sphérique

$$S = \iint dS \quad \text{et} \quad \tau = \iiint d\tau$$

Intégrale de surface   Intégrale de volume

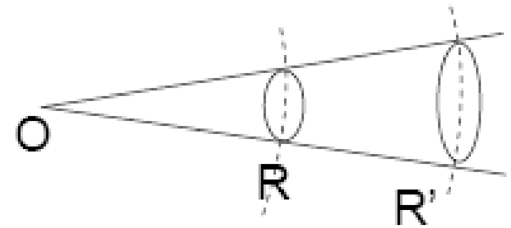
I.4. Angles solides

▪ **Angle solide et angle solide élémentaire**

a. Angle solide

La portion d'espace délimitée par les génératrices du cône de sommet O correspond à un angle dit « solide », noté Ω.

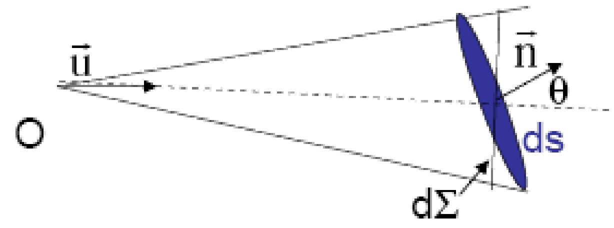
L'angle solide Ω est définit par : $\Omega = \dfrac{\Sigma}{R^2}$



Σ est la surface d'intersection d'une sphère de centre 0 et de rayon R avec la portion d'espace caractérisée par Ω (Ω est exprimé en stéradian)

b. Angle solide élémentaire

La surface élémentaire dS, autour du point *M* est vue de O sous l'angle solide dΩ



$$\text{Par définition : } \quad d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\,\vec{n}\,.\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{d\Sigma}{r^2}$$

L'angle solide sous lequel on vois une surface finie s'obtient en intégrant dΩ

$$\Rightarrow \quad \Omega = \iint_S d\Omega$$

II. Champ scalaire, vectoriel

II.1. Champ scalaire & vectoriel:

Définition :

• Champ scalaire : à tout point M de l'espace on associe une fonction U = U(Mx,My,…)

• Champ vectoriel : un champ de vecteur $\overrightarrow{A}(M)$ est une application qui à chaque point

M(x,y,z) de l'espace est associé un vecteur $\overrightarrow{A}(M)$:

$$\Rightarrow \; M(x,y,z) \rightarrow \overrightarrow{A}(M) = A_x(M)\,\vec{i} + A_y(M)\,\vec{j} + A_z(M)\,\vec{k}$$

A_x, A_y, A_z sont les composantes cartésiennes de A(M)

Notion d'uniforme :

• Un champ est uniforme si U (et /ou $\overrightarrow{A}$) ne dépend pas de M.

• Notion de permanent (ou stationnaire) : un champ est permanent si U (et /ou A) ne dépend que de M et pas du temps.

II.2. Gradient

Définition en cartésiennes : U étant un champ scalaire $\overrightarrow{grad}\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$

Les trois dérivées partielles dépendent comme U de x et y et z et éventuellement du temps. On « fabrique » donc un champ vectoriel (le gradient) à partir d'un champ scalaire.

Notation nabla **:** on note $\vec{\nabla}$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{k}$, alors $\overrightarrow{grad}\,U$ est noté $\vec{\nabla}U$

a. Variation élémentaire *dU*

Soit M(x,y,z) et M'(x+dx, y+dy, z+dz)

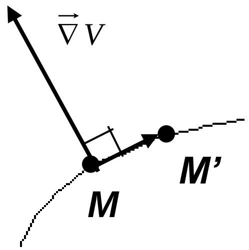
$$\Rightarrow dU = U(M') - U(M) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow dU = \vec{\nabla}U(M).\overrightarrow{MM'} = \vec{\nabla}U(M).\overrightarrow{dl}\text{, avec } \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\,;$$

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ base orthonrmée.

b. Surface équipotentielle Σ

soit $\Sigma = \{M / V(M) = cte\}$, pour deux points voisins d'une même surfae équipotentielle on a $dV = 0 = \vec{\nabla}V.\overrightarrow{MM'}$ cela signifie que $\vec{\nabla}V \perp \overrightarrow{MM'}$, donc $\vec{\nabla}V$ est normal à la surface équipotenielle Σ au point M.



II.2. Divergence –Rotationnel – Laplaciens

a. Divergence

$\vec{A}$ étant un champ vectoriel, on « fabrique » un champ scalaire en appliquant au champ vectoriel $\vec{A}$ l'opérateur divergence :

$$\Rightarrow div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{(champ scalaire)}$$

b. Rotationnel

Au champ de vecteur $\vec{A}$ on associe le champ de vecteur rot $\vec{A}$ définit ainsi en cartésiennes:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

b. Laplaciennes

Pour un champ scalaire: par définition le laplacien scalaire du champ scalaire f est :

$$\Delta f = div\,(\overrightarrow{grad}\ f\ )$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Pour un champ vectoriel : par définition le laplacien vectoriel du champ vectoriel $\vec{A}$ est le champ de vecteur :

$$\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{A}) - \overrightarrow{rot}\,(\,\overrightarrow{rot}\,(\vec{A}))$$

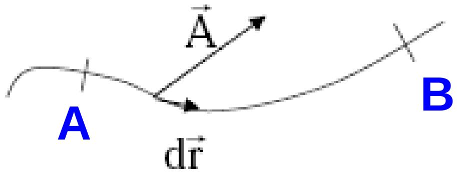
$$= \Delta\overrightarrow{A(M)} = (\Delta\, A_x\,)\,\vec{i} + (\Delta\, A_y\,)\,\vec{j} + (\Delta\, A_z\,)\,\vec{k}$$

$$\text{avec}\quad \Delta A_i \quad = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2} \quad (i = x,y,z)$$

II.3. Circulation d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{A}$ un champ de vecteur et AB un chemin (contour) quelconque, on appelle circulation C de $\vec{A}$ le long de AB l'intégrale :

$$C = \int_{AB} dC = \int_{AB} \vec{A}.\vec{dr}$$

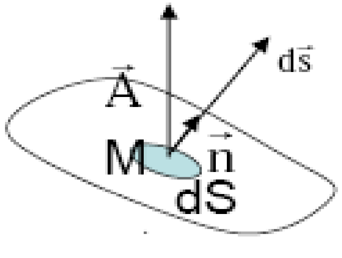


$$dC = \vec{A}.\vec{dr} \quad \text{(circulation élémentaire)}$$

II.4. Flux d'un vecteur

On considère une surface élémentaire dS. On note le vecteur unitaire $\vec{n}$ et normale à ds.

Le flux élémentaire dφ d'un vecteur $\vec{A}$ à travers dS est définit par :



$$d\phi = \overrightarrow{A(M)}.\overrightarrow{dS}$$

On en déduit que le flux f à travers une surface s'écrit :

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{A(M)}.\overrightarrow{dS}$$

Pour une surface fermée, on convient d'affecter un signe + au vecteur unitaire s'il est orienté de l'intérieur vers l'extérieur du volume délimité par cette surface fermée.

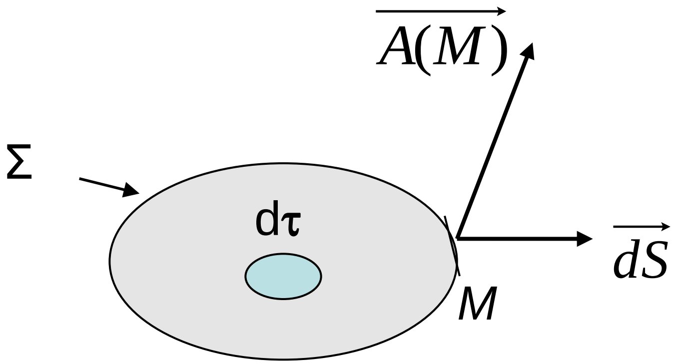
$$\phi = \oiint_S \overrightarrow{A(M)}.\overrightarrow{dS}$$

Théorème de Green-Ostrogradski :

Soit Σ une surface fermée délimitant un volume τ, Le flux d'un champ de vecteur à travers cette surface est équivalent à l'intégrale de sa divergence étendue au volume délimité par cette surface fermée.

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{A(M)}.\,\overrightarrow{dS} = \iiint_{\tau} div\,\overrightarrow{A(M)}\,d\tau$$

Intégrale de surface   Intégrale de volume



Théorème de Stockes

La circulation d'un champ vectoriel sur un contour fermé est équivalente au flux de son rotationnel à partir de n'importe qu'elle surface

$$\oint_{C} \vec{A}\,dr = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\,\vec{A}\,\overrightarrow{dS}$$

Intégrale curviligne   Intégrale surface

C contour fermé sur lequel s'appuie la surface S