

Chapitre1

Méthodes de résolution des équations non-linéaires

1. Introduction

Les méthodes analytiques de résolution des équations algébriques polynômiales sont limitées à certaines formes de faible degré telles que les équations quadratiques, cubiques et quartiques. Pour les équations polynômiales entières de degré supérieur à quatre, il n'existe guère de méthodes exactes de résolution et l'on doit employer des méthodes numériques pour trouver les racines.

De plus, les méthodes analytiques limitées aux formes polynômiales simples sont inutilisables pour les équations transcendantes telles que :

$$xe^x - \cos x + x^2 + 1 = 0$$

Il faudra donc recourir aux méthodes numériques qui permettent de calculer des racines approchées avec une précision déterminée.

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs techniques de résolution des équations non linéaires. Les méthodes proposées sont : la méthode de la bisection, de Newton-Raphson et du point fixe.

Définition :

Une valeur de x solution de $f(x) = 0$ est appelée une *racine* ou un *zéro* de la fonction $f(x)$.

2. Méthode de la bisection

Cette méthode est appelée aussi « dichotomie », elle repose sur un théorème important c'est le théorème des valeurs intermédiaires qui est à la base de l'étude de celle-ci ainsi que des autres méthodes.

Théorème

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et si on a $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une racine dans l'intervalle $[a, b]$.

2.1. Développement de la méthode

On s'assure que si $f(a).f(b) < 0$ sur l'intervalle $[a, b]$, la racine est unique (c.à.d. que f est monotone dans l'intervalle $[a, b]$).

On partage $[a, b]$ en 2 intervalles, $[a, c]$ et $[c, b]$ tel que $c = \frac{a+b}{2}$. Si $f(a).f(c) < 0$ cela implique que la racine $\in [a, c]$ et si $f(c).f(b) < 0$ cela implique qu'elle $\in [c, b]$ (si $f(c) = 0$, c serait la racine exacte). Le domaine gardé sera à son tour partagé jusqu'à arriver à un petit domaine selon une précision donnée dont sa moitié sera considérée comme racine approchée de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple 1 : Calculer la racine de l'équation $f(x) = x^6 - x - 1 = 0$ dans l'intervalle $[1, 2]$ avec la précision $\text{eps}=0.001$

Solution :

La fonction $f(x)$ est un polynôme donc continue sur $[1, 2]$.

$f(1) = -1, f(2) = 61 \Rightarrow f(1).f(2) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une racine $c \in [1, 2]$ tel que $f(c) = 0$.

De plus $f'(x) = 6x^5 - 1 \quad \forall x \in [1, 2] \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ (f est monotone), on déduit alors que la racine de f dans $[1, 2]$ est unique. On cherche maintenant à calculer une approximation de cette racine.

n	a	b	c	$b - c$	$f(c)$
1	1.0000	2.0000	1.5000	0.5000	8.8906
2	1.0000	1.5000	1.2500	0.2500	1.5647
3	1.0000	1.2500	1.1250	0.1250	-0.0977
4	1.1250	1.2500	1.1875	0.0625	0.6167
$\vdots$					
10	1.1300	1.1348	1.1338	0.001	0.0096

La racine approchée est $c = 1.1338$ obtenue après 10 itérations.

Exemple 2 : Résoudre l'équation $e^x = \cos x$ dans l'intervalle $[-0.5, 0.5]$ avec $\text{eps}=0.0003$.

Solution :

$$c = \frac{a + b}{2} = 0$$

On remarque que $f(c) = e^0 - \cos 0 = 0$.

Donc, $c = 0$ est la racine exacte de la fonction dans l'intervalle $[-0.5, 0.5]$.

2.2. Algorithme de la méthode

Pas 1 : $c \leftarrow (a + b)/2$

Pas 2 : Si $b - c \leq \text{eps}$, c est considérée racine approchée (stop).

Pas 3 : Si $f(c) = 0$, c est considérée racine exacte (stop).

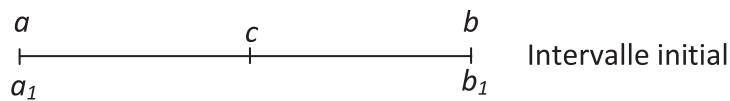
Pas 4 : Si $f(a).f(c) < 0$ Alors $c \leftarrow b$

Sinon $c \leftarrow a$

Pas 5 : Retour au pas 1.

2.3. Convergence et estimation de l'erreur

- On démontre que la méthode de la bisection est convergente (vers la solution unique de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$).
- On cherche à déterminer l'erreur maximale commise en utilisant la méthode de la bisection dans l'intervalle $[a, b]$.



Pour $i = 1$: la longueur du premier intervalle $[a_1, b_1] = [a, b]$ est $b_1 - a_1 = b - a$.

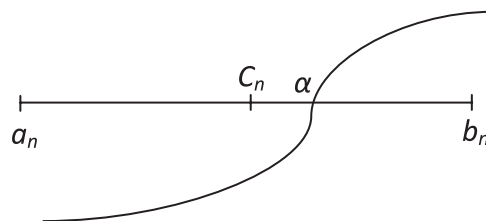
Pour $i = 2$: la longueur du deuxième intervalle $[a_2, b_2]$ est $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$.

Pour $i = 3$: la longueur du troisième intervalle $[a_3, b_3]$ est $b_3 - a_3 = \frac{b-a}{2^2}$.

Pour $i = 4$: la longueur du quatrième intervalle $[a_4, b_4]$ est $b_4 - a_4 = \frac{b-a}{2^3}$.

$\vdots$

Pour $i = n$: la longueur du $n^{\text{ème}}$ (dernier) intervalle $[a_n, b_n]$ est $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$.



La racine approchée est $C_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si on désigne par α la solution exacte, alors on a :

$$|C_n - \alpha| \leq b_n - C_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^n} \leq \varepsilon$$

donc, l'erreur $|C_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}$ (1)

- La relation (1) permet aussi de calculer à l'avance le nombre max d'itérations nécessaires.

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} \quad (2) \quad (n \text{ ne dépend pas de } f)$$

Comme exemple : Si l'intervalle est $[1, 2]$ et $\varepsilon = 10^{-3}$ alors $n \geq 9.93$

On prend $n = 10$. Il est important de remarquer que le nombre d'itérations nécessaire donné par la formule ci-dessus est, dans plusieurs cas, une surestimation du nombre réel

d'itérations nécessaire (pour le calcul on peut se contenter de $n = 9$ tout en ayant atteint la précision voulue).

3. Méthode de Newton-Raphson

Soit α la racine exacte de l'équation $f(x) = 0$. Si f est continue et continûment dérivable au voisinage de α , alors le développement en série de Taylor autour de x_0 (x_0 étant la valeur initiale) s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots}_R$$

Donc on peut écrire :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R$$

Posons $x = \alpha$ on trouve :

$$f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + R = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + R_1$$

En ignorant R_1 on obtient une nouvelle approximation x_1 (meilleure que x_0).

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On considère maintenant le développement en série de Taylor autour de x_1 .

De la même manière que précédemment on trouve une nouvelle valeur x_2 tel que :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ainsi on obtient la relation récursive suivante :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \end{cases}$$

3.1. Interprétation graphique de la méthode

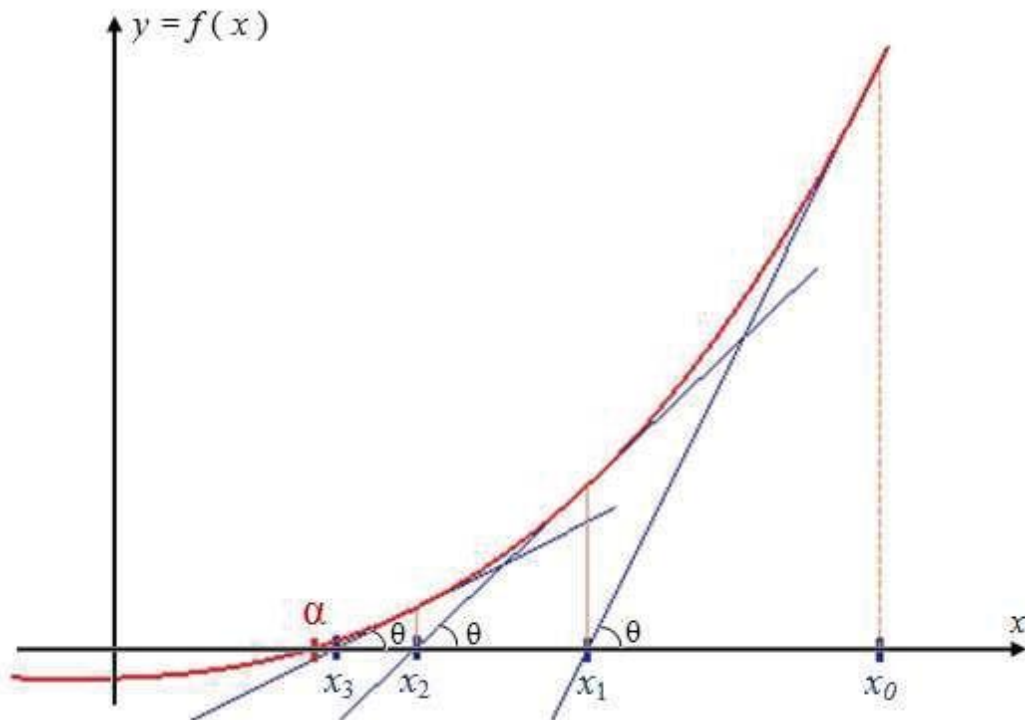


Figure 1.1. Méthode de Newton-Raphson

$\tan \theta$ représente la dérivée :

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k-1}) - 0}{x_{k-1} - x_k}$$

Exemple : Trouver par la méthode de Newton-Raphson la valeur approximative de la racine de $x^5 - x + 2 = 0$ à partir de $x_0 = -1$ pour une précision $\varepsilon = 10^{-6}$

Solution :

$$f(x) = x^5 - x + 2 = 0 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 1$$

En appliquant la formule de Newton-Raphson, nous obtenons :

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^5 - x_{k-1} + 2}{5x_{k-1}^4 - 1}$$

Alors en partant de $x_0 = -1$, on obtient les itérations illustrées dans le tableau suivant :

k	x_k
0	-1.000000
1	-1.500000
2	-1.331620
3	-1.273516
4	-1.267237
5	-1.267168
6	-1.267168

$|x_k - x_{k-1}| = |x_6 - x_5| \leq \varepsilon$ donc la racine approchée de l'équation $f(x) = 0$ est $c \simeq -1.267168$.

3.2. Algorithme de la méthode

Pas 1 : $k \leftarrow 1$

Pas 2 : $x_k \leftarrow x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$

Pas 3 : Si $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$ Alors on arrête (x_k racine approchée)

Sinon Pas 4 : $k \leftarrow k + 1$

Pas 5 : Retour au pas 2.

3.3. Convergence et estimation de l'erreur

Théorème

On démontre que si f est définie sur l'intervalle $[a, b]$ tel que :

1. $f(a).f(b) < 0$
2. $\forall x \in [a, b] \quad f'(x) \neq 0$
3. $\forall x \in [a, b] \quad f''(x) \neq 0$

Alors la méthode de Newton-Raphson engendre une suite qui converge vers la solution unique de $f(x) = 0$, en partant de l'approximation x_0 vérifiant :

$$f''(x_0).f(x_0) > 0.$$

On démontre aussi que l'erreur commise en utilisant la méthode de Newton-Raphson comme outil de résolution s'écrit :

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{M(x_k - x_{k-1})^2}{2m} \text{ avec } \begin{cases} M = \max\{|f''(x)|\}, & x \in [a, b] \\ m = \min\{|f''(x)|\}, & x \in [a, b] \end{cases}$$

4. Méthode du point fixe

Avant d'aborder la méthode du point fixe, il est important de définir ce que signifie un point fixe d'une fonction.

Définition

Soit la fonction $g(x)$ définie dans l'intervalle $[a, b]$. Tout point $c \in [a, b]$ tel que : $c = g(c)$ est dit point fixe de $g(x)$.

L'équation $f(x) = 0$, avec f continue sur $[a, b]$ peut être mise sous la forme $x = g(x)$ tel que : $f(x) = x - g(x)$.

Le choix d'une valeur initiale de la racine x_0 permet d'avoir une première approximation x_1 tel que : $x_1 = g(x_0)$ puis une meilleure approximation x_2 tel que : $x_2 = g(x_1)$ ainsi on obtient une suite définie par la relation récursive suivante :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_k = g(x_{k-1}) \end{cases}$$

4.1. Exemple

Soit à résoudre l'équation $x^3 - 2 = 0$ à partir de la valeur initiale $x_0 = 1.2$

Solution :

Il est possible de transformer l'équation précédente en plusieurs formes $x = g(x)$ par exemple :

a) $x = g_1(x) = x^3 + x - 2$

$$x_0 = 1.200$$

$$x_1 = 0.928$$

$$x_2 = -0.273$$

$$x_3 = -2.293$$

$$x_4 = -16.349$$

On remarque qu'on s'éloigne de la racine exacte $(2^{1/3}) \Rightarrow$ Divergence.

b) $x = g_2(x) = (2 + 5x - x^3)/5$ on obtient :

$$x_0 = 1.2000$$

$$x_1 = 1.2544$$

$$x_2 = 1.2596$$

$$x_3 = 1.2599$$

$$x_4 = 1.2599$$

On remarque qu'on s'approche rapidement de la racine exacte $(2^{1/3}) \Rightarrow$ Convergence.

De là on conclue que le choix de la forme $x = g(x)$ est capital dans la détermination de la convergence ou la divergence de la méthode du point fixe.

4.2. Algorithme de la méthode

Pas 1 : $k \leftarrow 1$

Pas 2 : $x_k \leftarrow g(x_{k-1})$

Pas 3 : Si $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$ Alors on arrête (x_k racine approchée)

Sinon Pas 4 : $k \leftarrow k + 1$

Pas 5 : Retour au pas 2.

4.3. Etude de la convergence de la méthode

Théorème

On démontre que si $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ possède un point fixe dans l'intervalle $[a, b]$ et si $|g'(x)| \leq k < 1$ ce point est unique.

Exemple : On montre que la fonction $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ possède un point fixe unique dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Solution :

Divisons l'intervalle en 2 parties : $[-1, 0]$ et $[0, 1]$

$$g(-1) = g(1) = 0 \in [-1, 1]$$

$$g(0) = -\frac{1}{3} \in [-1, 1]$$

Et nous avons :

$$\forall x \in [-1, 0] : g(x) \searrow \Rightarrow g(0) = -\frac{1}{3} \leq g(x) \leq g(-1) = 0$$

$$\forall x \in [0, 1] : g(x) \nearrow \Rightarrow g(0) = -\frac{1}{3} \leq g(x) \leq g(1) = 0$$

Donc $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$

$$\text{En plus } |g'(x)| = |2x/3| \leq 2/3 < 1$$

On conclut que le point fixe est unique dans $[-1, 1]$.

Théorème

On démontre que si la fonction $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ vérifie $|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [a, b]$, alors la suite définie par la relation récursive suivante :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_k = g(x_{k-1}) \end{cases}$$

est convergente et converge vers le point fixe unique de g dans $[a, b]$.

4.4. Estimation de l'erreur

On démontre que l'erreur commise en utilisant la méthode du point fixe comme outil de résolution vérifie la relation :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}| \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha: \text{la solution exacte} \\ x_n: \text{la solution approchée} \\ k = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} \end{cases} .$$

Chapitre 2

Résolution des systèmes d'équations linéaires (Méthodes directes)

1. Introduction

Dans la pratique, l'ingénieur se trouve souvent confronté à des problèmes dont la résolution passe par celle d'un système d'équations qui modélise les divers éléments considérés. Par exemple, la détermination des courants et tensions dans des réseaux électriques passe par la résolution d'un système d'équations linéaires ou non linéaires.

Dans ce chapitre, nous allons aborder deux principales méthodes de résolution des systèmes linéaires, à savoir la méthode d'élimination de Gauss et Gauss avec pivot. De façon générale, la résolution d'un système d'équations linéaires consiste à trouver un vecteur $\vec{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^T$ ($\vec{X}$ dénotera un vecteur colonne et l'indice supérieur T désignera sa transposée) solution de :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On peut utiliser la notation matricielle, qui est beaucoup plus pratique et surtout plus compacte. On écrit alors le système précédent sous la forme :

$$A\vec{X} = \vec{b}$$

où A est la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

et $\vec{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n]^T$. Bien entendu, la matrice A et le vecteur $\vec{b}$ sont connus. Il reste à déterminer le vecteur $\vec{X}$.

2. Méthode de Cramer (Rappel)

C'est certainement la méthode la plus connue de résolution des systèmes linéaires. Toutefois, nous allons voir que c'est la moins recommandable.

2.1. Solution utilisant les déterminants

$A\vec{X} = \vec{b}$ si le $\det A = |A| \neq 0 \Rightarrow$ le système possède une solution unique telle que :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

La matrice est A_i est obtenue par remplacement de la colonne i de la matrice A par le vecteur $\vec{b}$.

Remarque : Si $\det A = |A| = 0 \Rightarrow$ le nombre solutions est infini ou inexistant.

2.2. Solution utilisant la matrice inverse A^{-1}

Si $\det A = |A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe.

$$A\vec{X} = \vec{b}$$

$$A^{-1}.A\vec{X} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{X} = A^{-1}\vec{b} \quad (A^{-1} \text{ est calculée par la méthode des cofacteurs}).$$

Remarque : la méthode de Cramer exige un grand nombre d'opérations de calcul $((n^2 + n)n! - 1)$. Si n est élevé, le nombre d'opérations augmente et par conséquent le temps de calcul. De plus, pour les moyens et grands systèmes l'erreur cumulée d'arrondi augmente avec le nombre d'opérations et altère la précision des résultats. On va aborder d'autres méthodes qui nécessitent un nombre limité d'opérations de calcul, donc rapides et plus précises.

3. Méthode de Gauss

3.1. Introduction (principe)

Cette méthode est basée sur la transformation du système linéaire $A\vec{X} = \vec{b}$ en un système équivalent $A'\vec{X} = \vec{b}'$ tel que la matrice A' est une matrice triangulaire supérieure.

La transformation de la matrice A en A' et le vecteur b en b' passe par plusieurs étapes que nous présentons à travers l'exemple suivant :

Pour une meilleure praticabilité, on forme la matrice $\tilde{A}$ telle que $\tilde{A} = [A : \vec{b}]$ et qu'on appelle matrice augmentée de A .

Exemple : Soit à résoudre par Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases} \quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{array} \right] \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}$$

Etape 1 : élimination de x_1 de E_2 et E_3

$$E_2 \leftarrow E_2 - \frac{2}{1}E_1, \quad E_3 \leftarrow E_3 - \frac{3}{1}E_1$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{array} \right] \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}$$

Etape 2 : élimination de x_2 de E_3

$$E_3 \leftarrow E_3 - \left(\frac{-7}{-4} \right) E_2$$

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 15/2 & 15/2 \end{array} \right] \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}$$

Par substitution inverse on obtient :

$$\frac{15}{2}x_3 = \frac{15}{2} \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-4x_2 - 6x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

Donc, la solution est :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2. Algorithme

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{1. Triangularisation:} \\ \omega = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ a_{ij} = a_{ij} - \omega a_{kj} ; \quad j = k+1, n+1 ; \quad i = k+1, n ; \quad k = 1, n-1 \\ \\ \textbf{2. Substitution inverse:} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right) / a_{ii} ; \quad i = n, n-1, \dots, 1 \end{array} \right.$$

4. Méthode de Gauss avec pivot

Dans le processus d'élimination de la méthode de Gauss, on a supposé à chaque étape k ($k = \overline{1, n-1}$) que l'élément $a_{kk} \neq 0$, mais cette supposition n'est pas toujours vraie. Si $a_{kk} = 0$, on cherche l'équation E_y parmi celles qui suivent E_k où l'élément $a_{jk} \neq 0$ pour faire la permutation ($E_k \leftrightarrow E_j$) et ainsi avoir $a_{kk} \neq 0$.

Aussi, on remarque que la division par de petites valeurs génère une grande erreur ce qui nous amène à choisir a_{kk} le plus grand en valeur absolue, c.à.d:

$$|a_{jk}| = \text{Max}\{|a_{ik}|\}; \quad k \leq i \leq n$$

Après le choix de a_{kk} , on poursuit normalement l'étape en cours selon Gauss.

Chapitre 3

Résolution des systèmes d'équations linéaires (Méthodes itératives)

1. Introduction

On s'intéresse à la résolution du système linéaire :

$$A\vec{X} = \vec{b}$$

où A est une matrice d'ordre n . Les méthodes que nous présentons ci-après sont la généralisation aux cas n -dimensionnel des méthodes de résolution de $f(x) = 0$ étudiées dans le cas monodimensionnel du chapitre 1. Ces méthodes consistent à utiliser un vecteur initial $\vec{X}^{(0)}$ et de générer une séquence de vecteurs : $\vec{X}^{(0)}, \vec{X}^{(1)}, \dots, \vec{X}^{(n)}$ convergente le plus rapidement possible vers le vecteur solution.

2. Principe

On veut résoudre le système linéaire :

$$A\vec{X} = \vec{b}$$

Ecrivons A sous la forme $A = M - N$ (A et M doivent être régulières) alors le système peut s'écrire :

$$(M - N)\vec{X} = \vec{b} \quad \text{ou} \quad M\vec{X} = N\vec{X} + \vec{b}$$

$$\text{Enfin } \vec{X} = M^{-1}N\vec{X} + M^{-1}\vec{b}$$

A partir du vecteur initial $\vec{X}^{(0)}$, on obtient les itérations $\vec{X}^{(k)}$ telles que :

$$\vec{X}^{(k+1)} = M^{-1}N\vec{X}^{(k)} + M^{-1}\vec{b} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

3. Décomposition de la matrice A

Définissons les matrices D , L et U telles que :

D matrice Diagonale / $d_{ii} = a_{ii} \quad \forall i$

L matrice triangulaire inférieure /
$$l_{ij} = -a_{ij} \quad \text{si } i > j$$
$$l_{ij} = 0 \quad \text{si } i \leq j$$

U matrice triangulaire supérieure /
$$u_{ij} = -a_{ij} \quad \text{si } j > i$$
$$u_{ij} = 0 \quad \text{si } j \leq i$$

A partir de cela on a la relation :

$$A = D - L - U$$

4. Méthode de Jacobi

La matrice A étant décomposée en :

$$A = M - N$$

On prend $M = D$ et $N = L + U$, la relation (1) devient

$$\vec{X}^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\vec{X}^{(k)} + D^{-1}\vec{b} \quad (2)$$

Qui peut être développée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}X_2^{(k)} - a_{13}X_3^{(k)} - \dots - a_{1n}X_n^{(k)})/a_{11} \\ X_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}X_1^{(k)} - a_{23}X_3^{(k)} - \dots - a_{2n}X_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots \\ X_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}X_1^{(k)} - a_{n2}X_2^{(k)} - \dots - a_{nn}X_n^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

5. Méthode de Gauss-Seidel

La matrice A étant décomposée en :

$$A = M - N$$

On prend $M = D - L$ et $N = U$, la relation (1) devient

$$\vec{X}^{(k+1)} = (D - L)^{-1}U\vec{X}^{(k)} + (D - L)^{-1}\vec{b}$$

Comme l'inverse de $(D - L)$ peut être compliquée à calculer, on préfère écrire le système comme suit :

$$\vec{X}^{(k+1)} = D^{-1}L\vec{X}^{(k+1)} + D^{-1}U\vec{X}^{(k)} + D^{-1}\vec{b} \quad (3)$$

En développant cette récurrence vectorielle on obtient :

$$\begin{cases} X_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}X_2^{(k)} - a_{13}X_3^{(k)} - \dots - a_{1n}X_n^{(k)})/a_{11} \\ X_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}X_1^{(k+1)} - a_{23}X_3^{(k)} - \dots - a_{2n}X_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots \\ X_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}X_1^{(k+1)} - a_{n2}X_2^{(k+1)} - \dots - a_{nn}X_n^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases}$$

La méthode de Gauss-Seidel est donc une variante améliorée de la méthode de Jacobi. En effet, à l'itération $k + 1$, au moment du calcul de $X_2^{(k+1)}$, on possède déjà une meilleure approximation de X_1 que $X_1^{(k)}$, à savoir $X_1^{(k+1)}$. De même, au moment du calcul de $X_3^{(k+1)}$, on peut utiliser $X_1^{(k+1)}$ et $X_2^{(k+1)}$ qui ont été déjà calculés. Plus généralement, pour le calcul de $X_i^{(k+1)}$, on peut utiliser $X_1^{(k+1)}$, $X_2^{(k+1)}$, ..., $X_{i-1}^{(k+1)}$ déjà calculés et les $X_1^{(k+1)}$, $X_2^{(k+1)}$, ..., $X_{i-1}^{(k+1)}$ de l'itération précédente.

6. Critère d'arrêt

On utilise le plus souvent les critères suivants :

- $|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}| \leq \varepsilon \quad i = \overline{1, n}$ ou
- $\|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^{(n-1)}\| \leq \varepsilon$ (erreur absolue) ou
- $\frac{\|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}^{(n-1)}\|}{\|\vec{x}^{(n)}\|} \leq \varepsilon$ (erreur relative)

7. Condition de convergence

On démontre que si A est une matrice à diagonale strictement dominante (condition suffisante), la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes. C.à.d. :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Chapitre 4

Intégration numérique

1. Introduction

Dans ce chapitre nous essayerons d'aborder quelques méthodes numériques de calcul des intégrales : méthode des trapèzes, méthode de Simpson, méthode des trapèzes généralisée et méthode de Simpson généralisée. Souvent dans la pratique on doit faire appel à ces méthodes car en général la fonction à intégrer est connue en un nombre fini de points ou elle est difficile à intégrer. Ces techniques d'intégration consistent à approcher la valeur de l'intégrale à partir de plusieurs valeurs de la fonction à intégrer.

On s'intéresse donc à estimer la valeur de l'intégral de la forme :

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

où f est une fonction continue définie dans l'intervalle $[a, b]$. La valeur approximative de l'intégral correspond à l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe de $f(x)$.

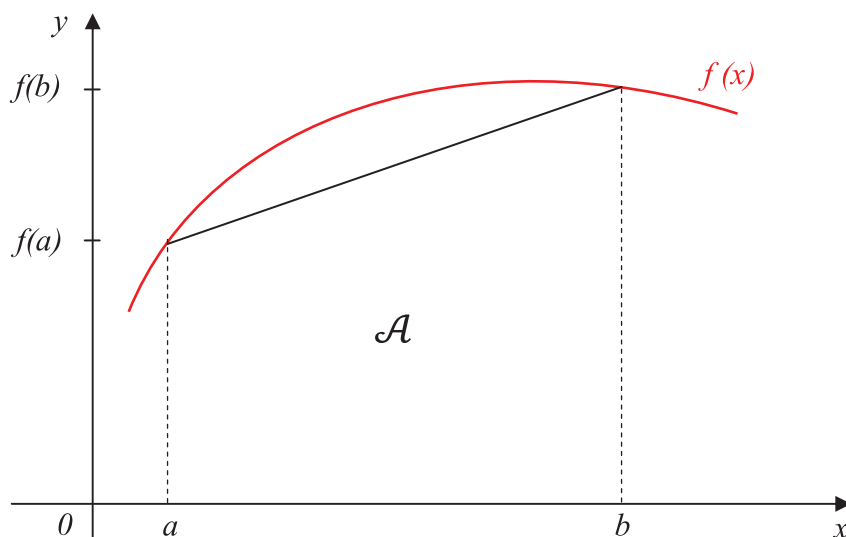


Figure 5.1. Approximation de l'intégral par une surface de trapèze

L'aire correspond à la surface du trapèze donnée par :

$$S = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

On peut partager l'intervalle $[a, b]$ en n parties et on considère les surfaces des trapèzes. Prenons $n = 4$ petits intervalles :

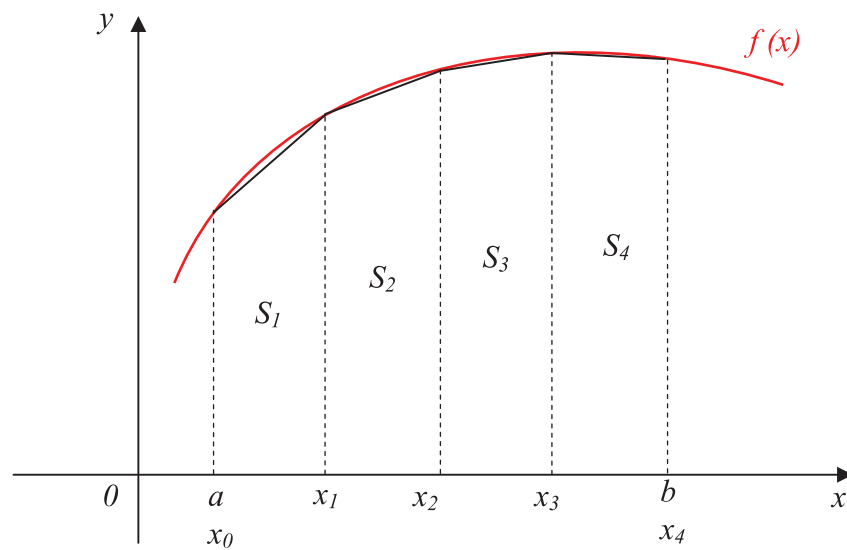


Figure 5.2. Approximation de l'intégral par quatre surfaces de trapèze.

$$h = x_{i+1} - x_i \quad i = \overline{0,3}$$

On a la somme des surfaces des 4 trapèzes :

$$S = \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^4 S_i = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4))$$

De façon générale on peut mettre $\int_a^b f(x) dx$ sous la forme :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

où a_i sont des coefficients à calculer.

2. Méthode des trapèzes et Simpson

Pour $n = 1$: $f(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b 1 dx = b - a = a_0 * 1 + a_1 * 1$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a_0 * a + a_1 * b$$

La résolution du système à 2 équations donne $a_0 = a_1 = \frac{b-a}{2}$, et on obtient donc la formule des trapèzes :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

La formule des trapèzes peut être obtenue en approchant $f(x)$ par le segment de droite joignant les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Pour $n = 2$: $f(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b 1 dx = b - a = a_0 * 1 + a_1 * 1 + a_2 * 1$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a_0 * a + a_1 * \left(\frac{a+b}{2}\right) + a_2 * b$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = a_0 * a^2 + a_1 * \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + a_2 * b^2$$

La résolution du système à 3 équations donne $a_0 = a_2 = \frac{b-a}{6}$ et $a_1 = 4 \frac{b-a}{6}$, et on obtient donc la formule de Simpson :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq (b-a) \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]$$

La formule de Simpson peut être obtenue en approchant $f(x)$ par la parabole passant par les points $(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ et $(b, f(b))$.

3. Méthode des trapèzes généralisée

Divisons l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales de longueur $h = \frac{b-a}{n}$. Les différents intervalles engendrés sont : $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. En appliquant à chaque intervalle la formule des trapèzes on obtient :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

On remarque que tous les termes $f(x_i)$ sont répétés deux fois, sauf le premier et le dernier. On en conclue que :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}))]$$

Cette formule est appelée formule des trapèzes généralisée.

4. Méthode de Simpson généralisée

On peut améliorer la précision de la formule de Simpson en la composant. Puisque la méthode simple requiert deux intervalles, on divise alors l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en

$n = 2m$ sous-intervalles égales de longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on utilise la méthode de Simpson simple dans chaque paire de sous-intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, 2, \dots, m-1$. On a alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{3} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]$$

On remarque que tous les termes de rang impair sont multipliés par 4 tandis que ceux de rang pair sont multipliés par 2, sauf le premier et le dernier. On en conclue que :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_n) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}))]$$

Cette formule est appelée formule de Simpson généralisée.

5. Formules des erreurs

On démontre que :

a. Erreur de trapèzes

$$|R_T| \leq E_{Max} = \frac{h^3}{12} M$$

où

$$h = b - a \text{ et } M = \text{Max}\{|f''(\xi)|\}, \quad \xi \in [a, b]$$

b. Erreur de trapèzes généralisée

$$|R_{TG}| \leq E_{Max} = \frac{nh^3}{12} M$$

où

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ et } M = \text{Max}\{|f''(\xi)|\}, \quad \xi \in [a, b]$$

c. Erreur de Simpson

$$|R_S| \leq E_{Max} = \frac{h^5}{90} M$$

où

$$h = \frac{b-a}{2} \text{ et } M = \text{Max}\{|f^{(4)}(\xi)|\}, \quad \xi \in [a, b]$$

d. Erreur de Simpson généralisée

$$|R_{SG}| \leq E_{Max} = \frac{nh^5}{180} M$$

où

$$h = \frac{b-a}{2m}, m = \frac{n}{2}$$

$$M = \text{Max}\{|f^{(4)}(\xi)|\}, \quad \xi \in [a, b].$$

Chapitre 5

Equations différentielles

1. Introduction

La résolution des équations différentielles est probablement le domaine des mathématiques où les applications sont les plus nombreuses. Que ce soit en électronique, en mécanique ou en transfert de chaleur, on aboutit souvent à la résolution d'équations différentielles.

Très peu d'équations différentielles sont solubles analytiquement. De plus, chaque type d'équation requiert une méthode particulière de résolution. Par suite, la résolution de la plupart des équations nécessite l'utilisation de méthodes numériques.

Dans ce chapitre, les diverses méthodes de résolution proposées sont d'autant plus précises qu'elles sont d'ordre élevé. Nous amorçons le cours par une méthode relativement simple qui nous conduira progressivement à des méthodes plus complexes telle que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, qui permet d'obtenir des résultats d'une grande précision.

L'équation différentielle du premier ordre s'écrit :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ ou } y' = f(x, y(x))$$

Elle possède une infinité de solutions, sauf si on fixe une valeur $y_0 = y(x_0)$ (valeur initiale). La solution est alors dite particulière. La problématique étant de trouver $y(x)$ sur $[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

On appelle problème de Cauchy l'équation différentielle à laquelle on adjoint la condition initiale $y(x_0) = y_0$. On démontre que la solution est unique si f vérifie la condition de Lipschitz c.à.d. s'il existe une constante $L > 0$ indépendante de x, y_1 et y_2 telle que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in [a, b]$.

Une condition suffisante pour que la condition de Lipschitz soit vérifiée est que f soit dérivable par rapport à y et que sa dérivée soit bornée.

2. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est de loin la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision.

Soit $y' = f(x, y)$ et $y_n = y(x_n)$, la méthode permet de calculer la valeur approchée $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ tel que $x_{n+1} - x_n = h$ où h est le pas d'intégration.

La formule de calcul est tirée du développement de Taylor de $y(x)$ au voisinage de x_n . En effet :

$$y(x) = y(x_n) + (x - x_n)y'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2!}y''(x_n) + \frac{(x - x_n)^3}{3!}y'''(x_n) + \dots$$

En remplaçant x par x_{n+1} dans l'équation précédente, on trouve :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \dots$$

En considérant uniquement les deux premiers termes dans le développement de Taylor on obtient :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + h^2E(h)$$

$h^2E(h)$ étant l'erreur commise si on arrête le développement au deuxième terme. L'équation précédente est une égalité, en négligeant le terme d'erreur elle devient une approximation. On aboutit donc à la formule d'Euler :

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + hy'(x_n)$$

ou encore :

$$y_{n+1} \simeq y_n + hf(x_n, y_n)$$

Exemple : Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Calculer $y(1)$ avec $h = 1$, $h = 0.2$ et $h = 0.1$.

Solution :

L'intervalle de travail est $[0, 1]$.

De plus on a : $f(x, y) = y$.

On peut donc utiliser la méthode d'Euler :

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

a. $h = 1$:

L'approximations de $y(1)$ est :

$$y(1) \simeq y(0) + hf(0, 1) = 1 + 1(1) = 2.$$

b. $h = 0.2$:

En appliquant la formule d'Euler on obtient successivement des approximations de $y(0.2)$, $y(0.4)$, $y(0.6)$, $y(0.8)$ et $y(1.0)$. La première itération produit :

$$y(0.2) \simeq y(0) + hf(0, 1) = 1 + 0.2 * 1 = 1.2$$

De manière similaire:

$$y(0.4) \simeq y(0.2) + hf(0.2, 1.2) = 1.2 + 0.2 * 1.2 = 1.44$$

$$y(0.6) \simeq y(0.4) + hf(0.4, 1.44) = 1.44 + 0.2 * 1.44 = 1.728$$

$$y(0.8) \simeq y(0.6) + hf(0.6, 1.728) = 1.728 + 0.2 * 1.728 = 2.074$$

$$y(1.0) \simeq y(0.8) + hf(0.8, 2.074) = 2.074 + 0.2 * 2.074 = 2.489$$

c. $h = 0.1$

En utilisant la formule d'Euler on obtient successivement des approximations de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$, $y(0.4)$, $y(0.5)$, $y(0.6)$, $y(0.7)$, $y(0.8)$, $y(0.9)$ et $y(1.0)$. La première itération produit :

$$y(0.1) \simeq y(0) + hf(0, 1) = 1 + 0.1 * 1 = 1.1$$

La deuxième itération donne :

$$y(0.2) \simeq y(0.1) + hf(0, 1.1) = 1.1 + 0.1 * 1.1 = 1.21$$

De manière similaire:

$$y(0.3) \simeq y(0.2) + hf(0.2, 1.21) = 1.21 + 0.1 * 1.21 = 1.331$$

⋮

$$y(1.0) \simeq y(0.9) + 0.1f(0.9, y(0.9)) = 2.593$$

Remarque : $y_{exacte}(x) = e^x \Rightarrow y_{exacte}(1.0) = e^1 = 2.718$.

3. Méthodes à un pas

3.1. Forme générale

Les méthodes à un pas, aussi appelée méthodes à pas séparés, sont toutes de la forme :

$$y_{n+1} \simeq y_n + h\Phi(x_n, y_n, h)$$

où Φ est une fonction quelconque. La méthode est à un pas si, pour obtenir la solution en $x = x_{n+1}$, on doit utiliser la solution numérique à x_n seulement. On désigne méthodes à pas multiples les méthodes qui exigent également la solution numérique à x_{n-1} , x_{n-2} , x_{n-3} ,

La méthode d'Euler est bien sûr une méthode à un pas où :

$$\Phi(x, y) = f(x, y)$$

3.2. Méthodes de Runge-Kutta

Pour améliorer la précision de la méthode d'Euler, il est préférable d'utiliser des méthodes d'ordre aussi élevé que possible. La méthode d'Euler (d'ordre 1) ne nécessite qu'une seule approximation, alors que les méthodes de Runge-Kutta exigent plusieurs approximations. Ces méthodes sont de la forme :

$$y_{n+1} \simeq y_n + R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_3 k_3 + \dots$$

où

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + ah, y_n + \alpha k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + bh, y_n + \beta k_2)$$

:

Ces méthodes donnent de faibles erreurs et sont facilement programmables.

3.2.1. Formules à deux approximations (ordre 2)

Les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 sont de la forme :

$$y_{n+1} \simeq y_n + R_1 k_1 + R_2 k_2$$

où

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + ah, y_n + \alpha k_1)$$

Le calcul des valeurs de a, α, R_1, R_2, k_1 et k_2 nécessite le calcul de y'', y''' et $y^{(4)}$ à partir de $y' = f(x, y)$ et le développement de Taylor. On obtient ainsi un système d'équations comprenant moins d'équations que d'inconnues et qu'il n'a donc pas de solution unique. Cela offre plusieurs variantes de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Les deux méthodes les plus couramment utilisées sont :

- Formule de la tangente améliorée

La méthode de la tangente améliorée, aussi appelée méthode du point milieu, est de la forme :

$$y_{n+1} \simeq y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}) \quad \text{avec} \quad y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

L'équation précédente illustre bien pourquoi cette méthode est dite du point milieu. On remarque en effet que la fonction $f(x, y)$ est évaluée au point milieu de l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$.

- Formule d'Euler-Cauchy

La méthode d'Euler-Cauchy, aussi appelée méthode d'Euler modifiée, est de la forme :

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y_{n1})] \quad \text{avec} \quad y_{n1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

Pour faciliter les calculs, l'évaluation de y_{n+1} a été scindée en deux étapes. La variable y_{n1} correspond tout simplement à une itération de la méthode d'Euler. On fait ainsi une prédiction y_{n1} de la solution en x_{n+1} qui est corrigée et améliorée à la deuxième étape. On parle alors d'une méthode de prédiction-correction.

3.2.2. Formules à quatre approximations (ordre 4)

La formule de Runge-Kutta la plus utilisée est celle d'ordre 4. On calcul successivement quatre évaluations de la fonction f , ce qui peut prendre du temps pour les fonctions compliquées. En d'autres termes, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 demande à peu près deux fois plus de calculs que la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et quatre fois plus que la méthode d'Euler. La formule de Runge-Kutta d'ordre 4 est de la forme :

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où

$$k_1 = hf(x_n, y(x_n))$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y(x_n) + k_3)$$

Chapitre 6

Interpolation

1. Introduction

A partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n + 1)$ points de la forme $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$, peut-on construire une approximation de $f(x)$, et ce, pour tout x ? les points $(x_i, f(x_i))$ sont appelés points d'interpolation et peuvent provenir de données expérimentales ou d'une table. En d'autres termes, si l'on ne connaît que les points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$ d'une fonction, peut-on obtenir une approximation de $f(x)$ pour une valeur de x différente des x_i ?

Il s'agit d'un problème d'interpolation, dont la solution est relativement simple. Il suffit de construire un polynôme de degré n dont la courbe passe par les $(n + 1)$ points d'interpolation. On parle alors du polynôme d'interpolation.

2. Polynôme de Lagrange

Soit à calculer $y(x)$ pour $x = 1.5$. connaissant $y(1) = 2.7128$ et $y(2) = 7.3890$

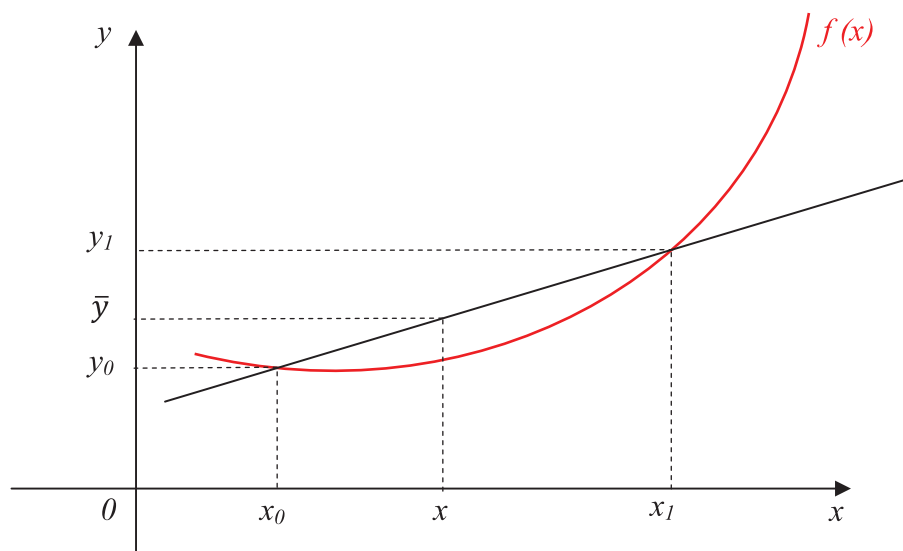


Figure 4.1. Interpolation de la fonction par une droite

Les propriétés de la droite dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ nous permettent d'écrire :

$$\frac{y_1 - \bar{y}}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

On tire $\bar{y}$

$\bar{y}$ étant la valeur approchée de $y(1)$

$$\bar{y} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

On peut alors calculer $\bar{y}(1.5)$

Cette formule est appelée polynôme de Lagrange (il s'agit ici de l'équation d'une droite donc un polynôme de degré 1 obtenu à partir de 2 points de mesure).

2.1. Formule générale

On démontre que le polynôme de Lagrange $P_n(x)$ de degré n pour $n + 1$ points de mesures s'écrit :

$$\bar{y} = P_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} y_1 \\ + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n$$

Si on pose $L_K(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{K-1})(x - x_{K+1}) \dots (x - x_n)$

La forme simplifiée pour $n + 1$ points est :

$$P_n(x) = \sum_{K=0}^n \frac{L_K(x)}{L_K(x_K)} y_K$$

2.2. Théorème

On démontre que le polynôme d'interpolation de Lagrange est unique, aussi que

$$\sum_{K=0}^n \frac{L_K(x)}{L_K(x_K)} = 1$$

Exemple : Calculer le polynôme de Lagrange de degré 3 pour les points de mesure suivants :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
y_i	$y_0 = -4$	$y_1 = -2$	$y_2 = 2$	$y_3 = 14$

On a 4 points donc le degré du polynôme est ≤ 3 .

$$P_3(x) = \sum_{K=0}^3 \frac{L_K(x)}{L_K(x_K)} y_K = \frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} y_0 + \frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} y_1 + \frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} y_2 + \frac{L_3(x)}{L_3(x_3)} y_3$$

Pour $K = 0$:

$$\frac{L_0(x)}{L_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 3)} = -\frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Pour $K = 1$:

$$\frac{L_1(x)}{L_1(x_1)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{1}{2}x(x - 2)(x - 3)$$

Pour $K = 2$:

$$\frac{L_2(x)}{L_2(x_2)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 3)}{(2 - 0)(2 - 1)(2 - 3)} = -\frac{1}{2}x(x - 1)(x - 3)$$

Pour $K = 3$:

$$\frac{L_3(x)}{L_3(x_3)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{1}{6}x(x - 1)(x - 2)$$

donc,

$$P_3(x) = -\frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3)(-4) + \frac{1}{2}x(x - 2)(x - 3)(-2) - \frac{1}{2}x(x - 1)(x - 3)(2) + \frac{1}{6}x(x - 1)(x - 2)(14)$$

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

2.3. Estimation de l'erreur

On démontre que l'erreur commise en interpolant $f(x)$ (fonction d'origine) par le polynôme de Lagrange $P_n(x)$ en $n + 1$ points vérifie :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|$$

avec : $M = \max\{|f^{(n+1)}(\xi)|\}, \xi \in [x_0, x_n]$

3. Méthode de Newton

3.1. Forme générale

Lorsqu'on écrit l'expression générale d'un polynôme, on pense immédiatement à la forme suivante :

$$P_n(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n$$

Il en existe cependant d'autres qui sont plus appropriées au cas de l'interpolation, par exemple :

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + C_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

On remarque que le coefficient de C_n comporte n monômes de la forme $(x - x_i)$ et qu'en conséquence le polynôme est de degré n .

L'aspect intéressant de cette formule apparaît lorsqu'on essaie de déterminer les $(n + 1)$ coefficients C_i , de telle sorte que $P_n(x)$ passe par les $(n + 1)$ points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$. On doit donc s'assurer que :

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$$

3.2. Relations nécessaires pour le calcul des coefficients C_i

Pour calculer les coefficients C_i , on utilise les relations suivantes :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1}) - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

On peut tirer les deux relations générales suivantes :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad (1)$$

$$\Delta^k y_0 = y_k - \binom{k}{1} y_{k-1} + \binom{k}{2} y_{k-2} - \dots + (-1)^k y_0 \quad (2)$$

$$\binom{k}{i} = C_k^i = \frac{k!}{i! (k-i)!}$$

En utilisant la relation (1) on peut construire le tableau suivant :

i	x_i	y_i	Δy_i $= y_{i+1} - y_i$	$\Delta^2 y_i$ $= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$	$\Delta^3 y_i$ $= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$	$\Delta^4 y_i$ $= \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i$
0	x_0	y_0	Δy_0 Δy_1 Δy_2 Δy_3	$\Delta^2 y_0$ $\Delta^2 y_1$ $\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_0$ $\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$
1	x_1	y_1				
2	x_2	y_2				
3	x_3	y_3				
4	x_4	y_4				
.	.	.				
.	.	.				
.	.	.				

3.3. Calcul des coefficients C_i

On prend un polynôme de degré 3 puis on généralise. On suppose que les points x_i sont équidistants ($x_{i+1} - x_i = h \quad \forall i = \overline{0, n-1}$)

$$P_3(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{cases} P_3(x_0) = C_0 \\ P_3(x_1) = C_0 + hC_1 \\ P_3(x_2) = C_0 + 2hC_1 + 2h^2C_2 \\ P_3(x_3) = C_0 + 3hC_1 + 6h^2C_2 + 6h^3C_3 \end{cases}$$

La résolution du système nous donne (utilisation de la formule (2)) :

$$C_0 = y_0$$

$$C_1 = \Delta y_0 / h$$

$$C_2 = \Delta^2 y_0 / 2h^2$$

$$C_3 = \Delta^3 y_0 / 6h^3$$

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Pour le cas général du polynôme d'interpolation de Newton de degré n , on obtient l'expression suivante :

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Remarque :

- Contrairement à la méthode de Lagrange, celle de Newton exige de refaire les calculs des coefficients à chaque changement de données.
- Si les points x_i ne sont pas équidistants, le h et ses puissances seront remplacés par les écarts respectifs entre les différentes valeurs x_i .

Exemple : Trouver le polynôme de Newton qui passe par les points équidistants suivants :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 4$	$y_2 = 8$	$y_3 = 14$

On a 4 points donc le degré du polynôme est $n = 3$. Le polynôme de Newton qui passe par ces 4 points est :

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{où : } h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = 1$$

$$\begin{array}{l} x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1 \\ x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 4 \\ x_2 = 2 \rightarrow y_2 = 8 \\ x_3 = 3 \rightarrow y_3 = 14 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3 \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 4 \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 = 6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 1 \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 2 \end{array} \right\} \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 1$$

Donc,

$$P_3(x) = 1 + \frac{3}{1}(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 1) + \frac{1}{6}(x - 0)(x - 1)(x - 2)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{17}{6}x + 1.$$