جامعة احمد زبانة بغليزان
AHMED ZABANA UNIVERSITY OF RELIZANE

Université de Ahmed ZABANA -Relizane–Faculté des Sciences et Technologie
Département de Génie Electrique

Systèmes non linéaires

Chapitre 1 : Introduction : (1 Semaines)

Master I « Automatique et Système »

Année 2020/2021

Plan

- Non linéarité statiques et Points d’Equilibres, exemples des systèmes non linéaires.
- Le pendule simple.
- L'oscillateur électrique non linéaire.
- Les cycles limites.
- Orbites chaotiques.
- Le pendule chaotique.
- Le pendule polaire.
- La grue.

Non linéarité statiques

- La première étape lorsqu'on veut analyser un système : Donner un *bon modèle mathématique* de celui-ci : on doit disposer d'un modèle mathématique réalisant un compromis entre sa fidélité de comportement *qualitatif et quantitatif* et sa *simplicité* de mise en œuvre à des fins d'analyse et de synthèse .

- La modélisation entraine obligatoirement des approximations et des simplifications afin de permettre une analyse des propriétés du modèle qui ne soit pas trop complexe et une procédure de synthèse de commande efficace.

- Sous certaines hypothèses (approximation des faibles déviation autour du mouvement nominal), certains systèmes peuvent être décrits par modèle mathématique linéaire, par exemple une équation différentielle à coefficients constants:

$$a_m y^{(m)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_n e_n(t) + \cdots + b_1 \dot{e}(t) + b_0 e(t)$$

Introduction

- ✓ La solution peut être calculée analytiquement par *le principe de superposition* (voir le cours des mathématiques).
- ✓ *Dans ce cadre d'hypothèses,* les méthodes classiques ainsi que de puissants outils d'analyse et de synthèse des asservissements linéaires peuvent être appliquées et développés.

❖ **Méthodes fréquentielles:**

Fonction de transfert de l'équation diff.

$$\begin{cases} Y(p) = L(y(t)) \\ E(p) = L(e(t)) \end{cases}, \quad \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{b_n p^n + \cdots + p_0}{a_m p^m + \cdots + a_0}$$

Outils d'analyse	Outils de synthèse
Lieu de Nyquist	Correcteur à avance de phase
Lieu de Black-Nichols	Correcteur à retard de phase
Lieu de Bode	Commande PID …

Introduction

- **Méthodes temporelles**

  Vecteur des variables d'état $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \;\; eq.dynamique \\ y(t) = Cx(t) \; eq.desortie \end{cases}$$

Outils d'analyse	Outils de synthèse
Critère de Kalman	Retour d'état
Stabilité de Lyapunov	Placement de pôle
Algèbre linéaire	Commande L Q

Introduction

De point de vue qualitatif et quantitatif, il est nécessaire de retenir dans la modélisation du système physique les éléments non linéaire difficilement modélisable et que l'on ne peut approximer *(prendre en compte une réalité plus complexe)*

Différents cas se présentes pour les quelles les modélisations linéaires ne peuvent pas suffire

- Dans un bras manipulateur, la géométrie liée aux transformations de coordonnées contient des cosinus et sinus
- Un moteur a des limitations intrinsèques en courant et donc en couple: les saturations sur les signaux de commande sont des non linéarités courante.
- Les asservissements faisant intervenir dans le bloc de commande des éléments non linéaires tels que relais, systèmes à commutations, hystérésis, ...
- D'importants processus physiques sont d'écrits par des modèles non linéaires. Les caractéristiques courant/tension de nombreux systèmes électroniques sont non linéaires.
- Pour de tels modèles, le principe de superposition ne peut plus être appliquée et les outils nécessitent le développement de mathématiques plus élaborées.

Quelques comportements non linéaires

Points d’équilibres

A la différence des systèmes linéaires qui possèdent un point d’équilibre unique, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d’équilibre .

Exemple

Soit le système physique régi par l’équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t), \quad x_0 = x(0)$$

Le système linéarisé autour du $\boldsymbol{x = 0}$ point est donné par :

$$\dot{x}(t) = -x(t) \rightarrow \begin{cases} pt\, d'équilibre\, x = 0 \\ solution\, x = x_0 e^{-t} \end{cases}$$

Quelques comportements non linéaires

Exemple

Soit le système physique régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t), \quad x_0 = x(0)$$

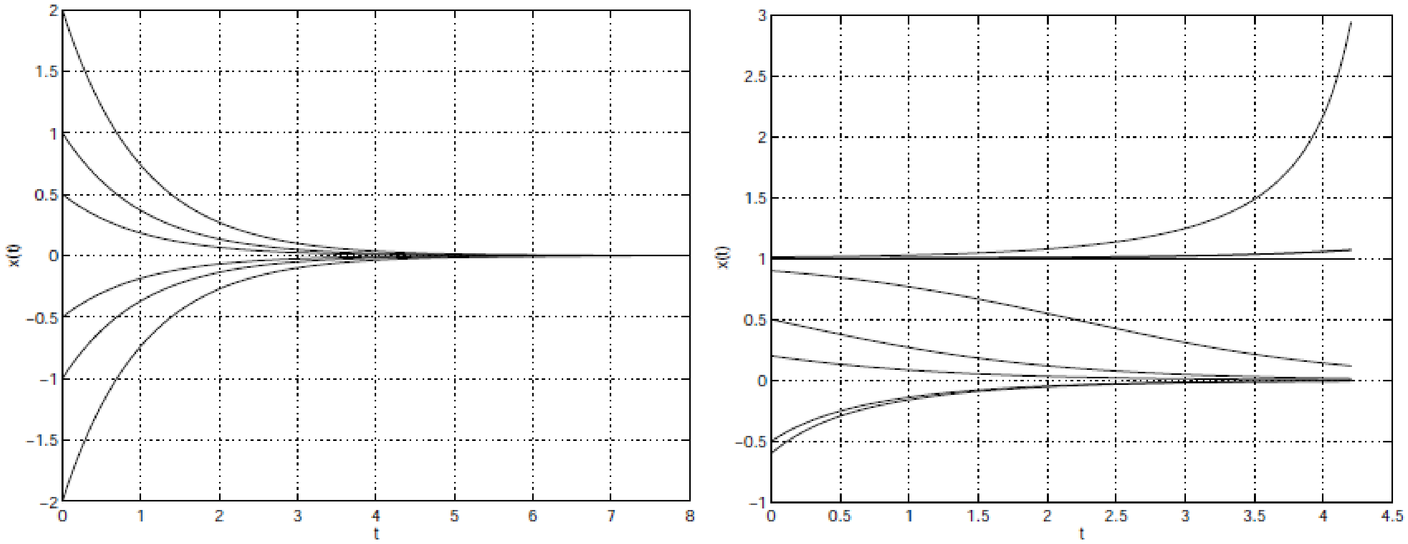
Le système linéarisé autour du point $\boldsymbol{x = 0}$ est donné par :

$$\dot{x}(t) = -x(t) \rightarrow \begin{cases} pt\, d'équilibre\, x = 0 \\ solution\, x = x_0\, e^{-t} \end{cases}$$

Le système non linéaire, quant à lui à les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} 2\, pts\, d'équilibre\, x = (0,1) \\ solution\, x(t) = \dfrac{x_0\, e^{-t}}{1 - x_0 + x_0\, e^{-t}} \end{cases}$$

Quelques comportements non linéaires



- Cas linéaire : on voit que le point 0 est stable
- Cas non linéaire deux pts de nature différentes :
- Le point 0 est *localement stable*(les conditions initiales proche de 0 converge vers 0)

Le point ***1*** est instable constitue en quelque sorte une frontière de stabilité L'axe est en effet divisé en deux régions de conditions initiales pour les quelles les trajectoires sont convergentes vers l'état d'équilibre ***0*** ou sont divergentes.

Quelques comportements non linéaires

Cycles limites

- ✓ Un système linéaire invariant dans le temps, pour osciller, doit avoir une paire de pôles sur l’axe imaginaire. Cette condition est évidemment très fragile vis `a vis de perturbations et/ou erreurs de modélisation pouvant affecter la valeur de ces pôles. De plus, l’amplitude de l’oscillation obtenue en théorie dépend uniquement de la condition initiale. Au contraire, les systèmes non linéaires peuvent ˆêtre le siège d’oscillations, (**cycles limites**), caractérisées par leur amplitude et leur fréquence, indépendantes de la condition initiale, x_0, et sans excitation extérieure. Il est donc indispensable d’utiliser un système non linéaire si l’on souhaite réaliser en pratique une oscillation stable.

Quelques comportements non linéaires

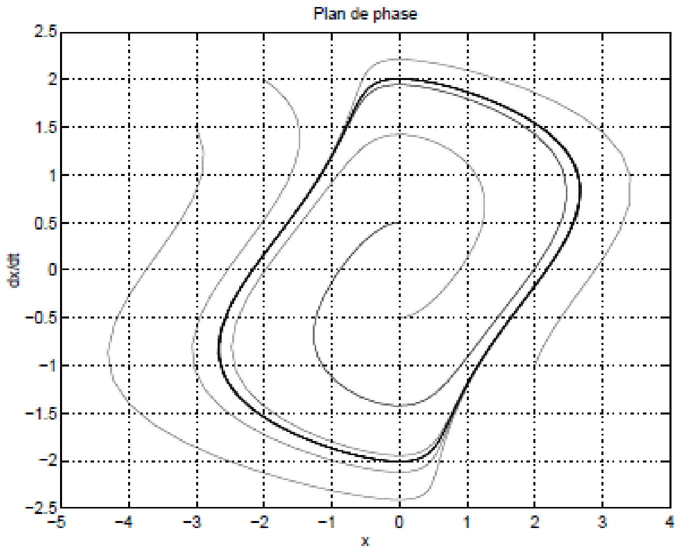
Exemple: équation de Van der Pol

- ✓ L'équation de Van der Pol est une équation d'ordre 2 non linéaire donnée par:

$$m\ddot{x}(t) + 2c(x^2 - 1)\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad c > 0$$

- Simulation pour différentes conditions initiales

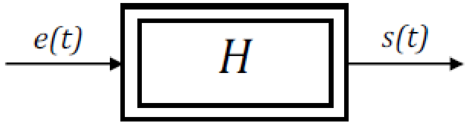
- ✓ *Courbe fermée vers la quelle convergent toutes les trajectoires quelque soit le point initial choisie.*



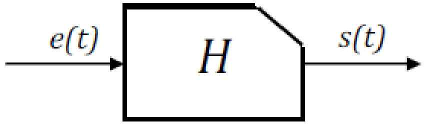
Quelques comportements non linéaires

Oscillation presque périodique–sous harmonique

- ✓ Par définition, un système non linéaire est un système qui n’est pas linéaire, c’est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.
- ✓ Cette définition, ou plutôt cette non-linéarité explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s’y appliquent. Il n’y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes non linéaires.



ou



H : opérateur tramittance du système

$$Si : \quad e_1(t) \rightarrow s_1(t) = H.e_1(t)$$

$$et \quad e_2(t) \rightarrow s_2(t) = H.e_2(t)$$

$$alors : \quad e_3(t) = e_1(t) + e_2(t) \rightarrow H.(e_1(t) + e_2(t)) \neq s_1(t) + s_2(t)$$

Quelques comportements non linéaires

Bifurcations

- ✓ Des changements quantitatifs des paramètres peuvent entrainer des changements qualitatifs des propriétés du système, (nombre de points d'équilibre, stabilité des points d'équilibre).

Exemple: équation non amortie de Duffing

$$\ddot{x}(t) + \alpha x(t) + x^3(t) = 0 \quad \alpha \geq 0$$

L'équation donnant le point d'équilibre est:

$$x_e(x_e^2 + \alpha) = 0$$

- ✓ Suivant que α sera négatif ou positif, le nombre de points d'équilibre sera diffèrent. Quand α varie, le nombre de points d'équilibre varie de 1 à 3,

$$(x_e, \dot{x}_e) = (0, 0),\ (\sqrt{\alpha}, 0)\ (-\sqrt{\alpha}, 0)$$

Ainsi α =0 est une valeur de bifurcation critique.

Quelques comportements non linéaires

Chaos

- ✓ Un système non linéaire peut avoir un comportement en régime permanent plus complexe que ceux habituellement répertories tels que l’´équilibre, les oscillations périodiques.... Dans ce cas, la sortie du système est extrêmement sensible aux conditions initiales, d’ou la non prévisibilité de la sortie. Certains comportements chaotiques font ainsi apparaitre un aspect aléatoire malgré leur nature déterministe intrinsèque.

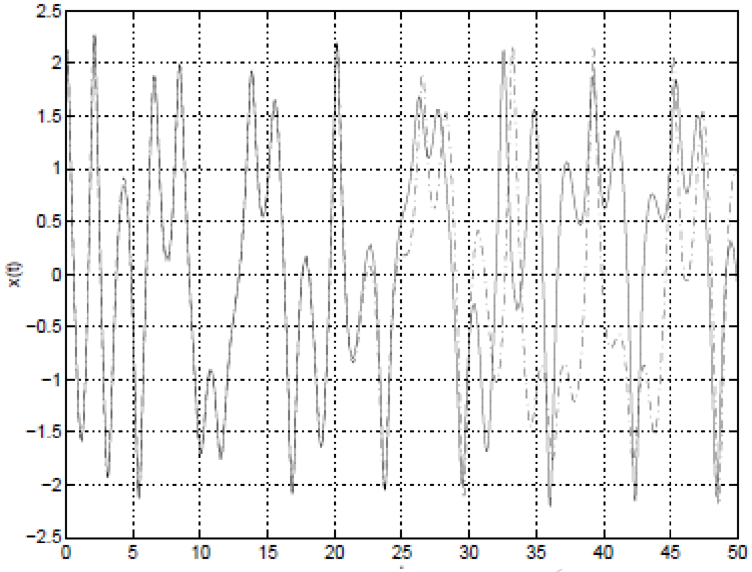
Exemple

$$\ddot{x}(t)+0.1\dot{x}(t)+x^5(t)=6\sin(t)$$

Pour deux conditions initiales différentes:

-: $x(0)=2, \dot{x}(0)=3,$

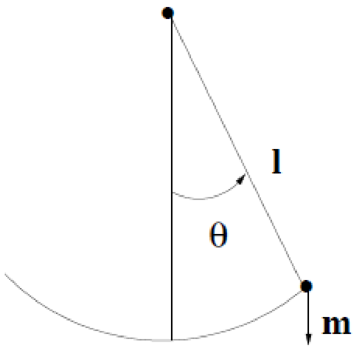
--: $x(0)=2.01, \dot{x}(0)=3.01,$



pendule simple

- Soit le pendule simple, ou l est la longueur de la corde considérée comme rigide et sans masse et m la masse en mouvement. On note θ l’angle que la corde fait avec la verticale. Afin d’écrire les équations du mouvement, il est nécessaire d’identifier les forces agissant sur la masse. Tout d’abord, il y a la force gravitationnelle donnée par $F_g = mg$ ou g est l’accélération de la gravite. On suppose de plus que la masse est soumise `a une force de résistance de friction proportionnelle `a la vitesse de la masse et de coefficient de friction k. En appliquant le premier principe de la dynamique par projection sur l’axe tangentiel, on obtient l’équation différentielle du mouvement.

$$ml\ddot{\theta} = -mgsin(\theta) - kl\dot{\theta} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{cases}$$



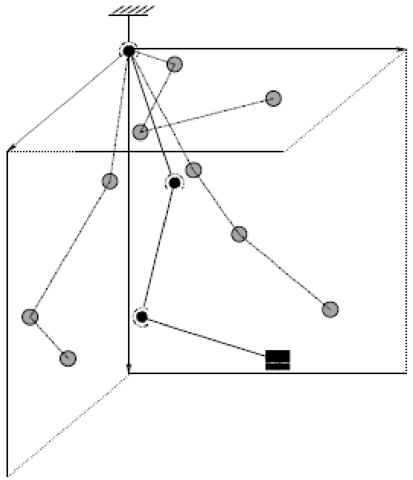
- Si l’on souhaite connaitre les points d’équilibre de ce système, il suffit de résoudre le système algébrique suivant.

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\frac{g}{l}sin(x_1) - \frac{k}{m}x_2 \end{cases}$$

- Les points d' equilibre sont donc donn´es par $(n\pi,\ 0)$ pour $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,$

Le pendule chaotique

- ✓ Soit le système conçu `a partir de trois pendules simples mis bout `a bout, représente dans l'espace sur la figure suivante



Système `a trois pendules

(projections suivant les trois axes du plan)

- ✓ On néglige les frottements. Les équations décrivant le comportement dynamique duc système sont fastidieuses à établir mais le modelé est parfaitement déterministe. Ceci est un exemple de modelé chaotique. Pour une position initiale des trois poids, le comportement ne sera ni convergeant (frottements considères nuls) ni oscillatoire. De plus, pour deux positions initiales infiniment proches, le comportement du système diffère fortement