

Université Ahmed Zabana-Relizane  
Faculté des Sciences et Technologies  
Département de l'Électrotechnique et Automatique



---

---

# Cours de Théorie de Signal

---

---

**Enseignant :** Dahmane Ghenam

# Chapitre 1 : Généralités sur les signaux

## 1.1 Introduction

Le signal est la représentation physique d'un phénomène qui évolue dans le temps ou dans l'espace.

Le traitement du signal est une discipline technique qui a pour objet l'évolution, la détection, et l'interprétation des signaux porteurs d'information. Cette discipline s'appuie sur la théorie du signal qui donne une description mathématique des signaux. Les applications du traitement du signal sont nombreuses : télécommunication, géophysique, reconnaissance des formes, biomédical,...

## 1.2 Classification des signaux

Il existe différentes classes des signaux :

- Signaux à temps continu et signaux à temps discret
- Signaux analogiques et signaux numériques
- Signaux énergétiques
- Signaux déterministe et signaux aléatoires

### 1.2.1 Signaux à temps continu et signaux à temps discret

Un signal qui prend des valeurs à chaque instant  $t$  est un signal continu, et un signal qui n'ont de valeurs qu'à certains instants  $t_n = nT_e$  ( $n = \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ) est un signal discret. Dans la figure 1.1 on a pris la valeur  $T_e = 0.25$  et  $4 \leq n \leq 20$  avec  $n$  un entier relatif.

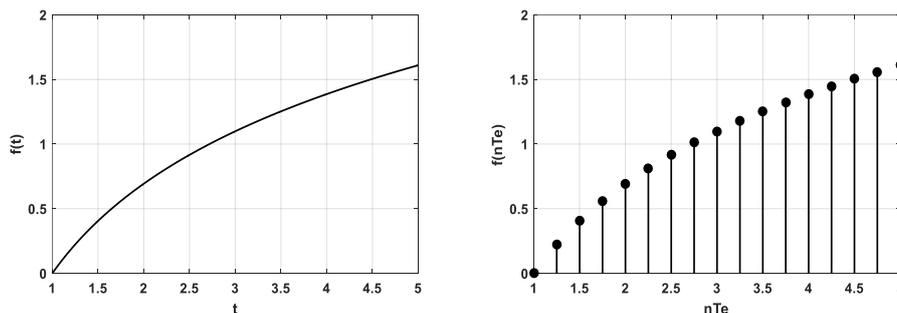
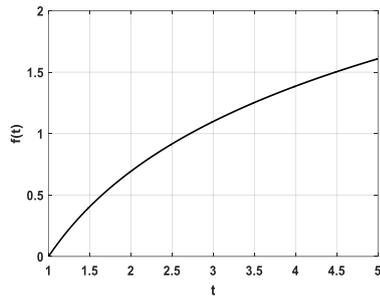


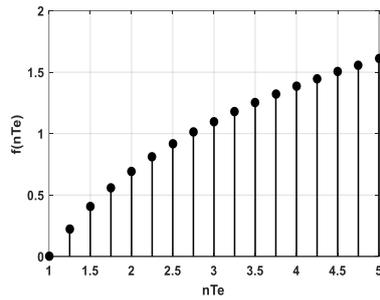
Fig.1.1 signal à temps continu à gauche et signal à temps discret à droite

### 1.2.2 Signaux analogiques et signaux numériques

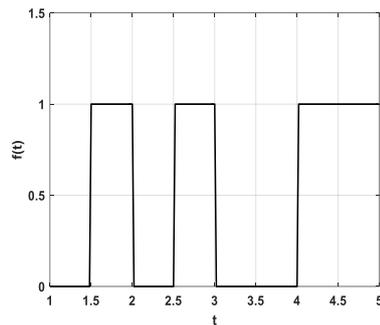
Un signal dont l'amplitude peut prendre une valeur quelconque dans une plage continue des valeurs réelles est un **signal analogique**, c.-à-d. l'amplitude peut prendre un nombre infini de valeurs. Un **signal numérique** est un signal dont l'amplitude peut prendre seulement un nombre fini de valeurs



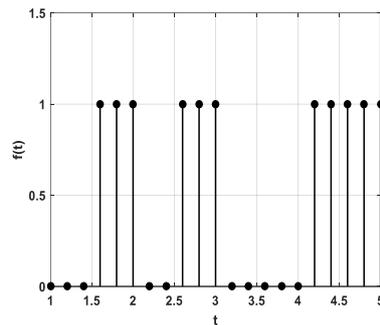
Signal analogique à temps continu



Signal analogique à temps discret



Signal numérique à temps continu



Signal numérique à temps discret

### 1.2.3 Signaux énergétiques :

Les signaux peuvent être à énergie finie ou à puissance moyenne finie.

- Les signaux à énergie finie vérifient :

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (x(t) \text{ fonction réelle ou complexe})$$

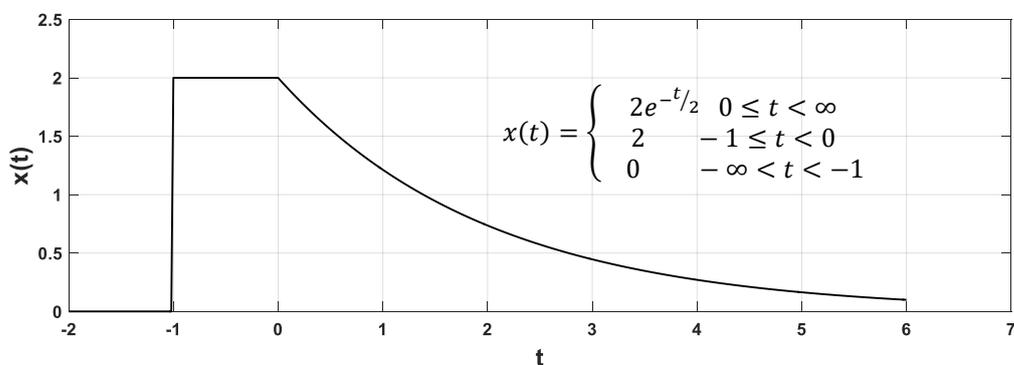
- Les signaux à puissance moyenne finie vérifient :

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (x(t) \text{ fonction réelle ou complexe})$$

Les signaux périodiques sont à puissance moyenne finie

Exemple :

Déterminer l'énergie et la puissance moyenne du signal représenté dans la figure ci-dessous :



- Energie du signal :

$$E_X = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 dt + \int_{-1}^0 2^2 dt + \int_0^{+\infty} 4e^{-t} dt$$

$$E_X = 0 + 4t|_{-1}^0 - 4e^{-t}|_0^{+\infty} = 8$$

- La puissance moyenne :

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_X}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} = 0$$

Remarque :

Tout signal à énergie finie a une puissance moyenne nulle

## 1.2.4 Signaux déterministes

Un signal déterministe peut être décrit par un modèle mathématique parfaitement connu, par exemple le signal  $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ . On peut prévoir la valeur du signal après un instant donné.

Parmi les signaux déterministes, on distingue les signaux périodiques :

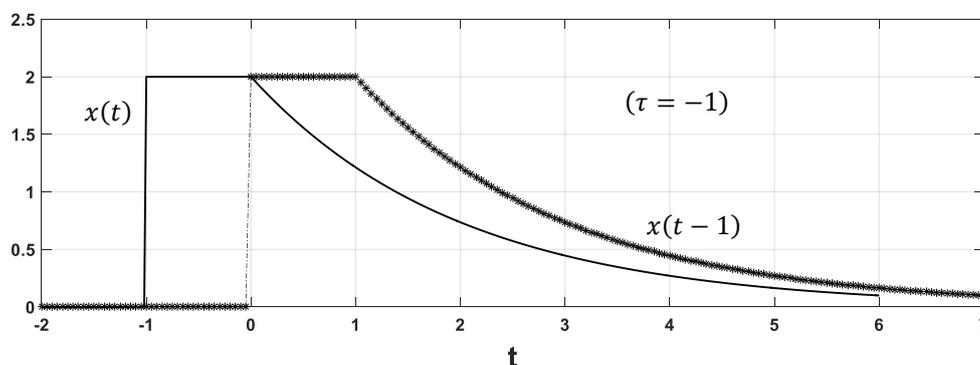
$$x(t + T) = x(t) \quad T \text{ est la période du signal}$$

### 1.2.4.1 Les opérations sur les signaux :

On considère trois transformations qui sont effectuées sur les signaux.

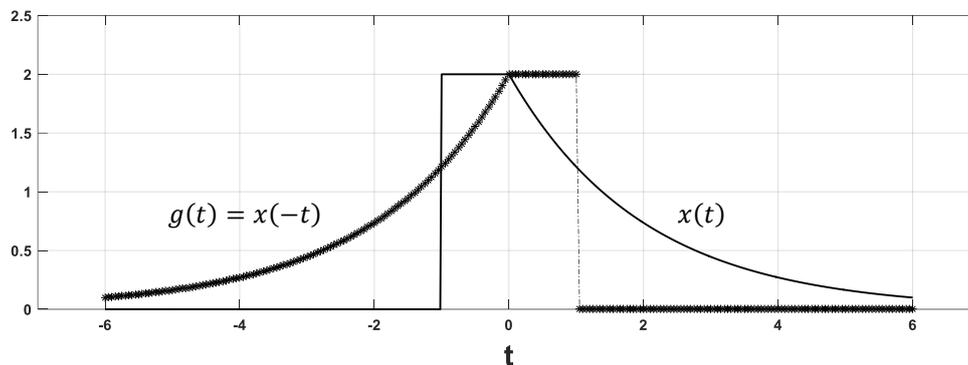
#### a) Décalage temporel :

Un décalage temporel retarde ou avance le signal d'une durée de temps  $\tau \in \mathbb{R}$ , pour  $\tau$  positif ( $\tau > 0$ ) le signal est en avance (décalage vers la gauche) et pour  $\tau$  négatif ( $\tau < 0$ ) le signal est en retard (décalage vers la droite) (voir figure ci-dessous)



#### b) Inversion de temps :

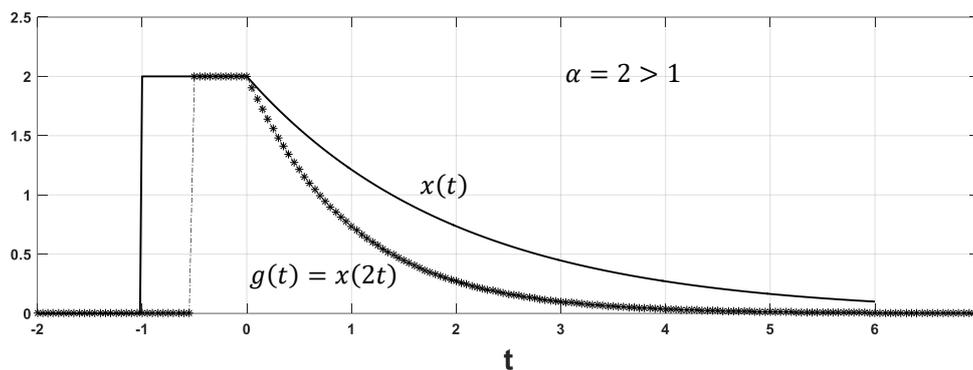
Une inversion de temps est réalisée en multipliant la variable de temps  $t$  par  $-1$  (voir figure ci-dessous)



**c) Changement d'échelle :**

L'opération du changement d'échelle est définie par la multiplication de la variable de temps  $t$  par une constante réelle et positive  $\alpha$ .

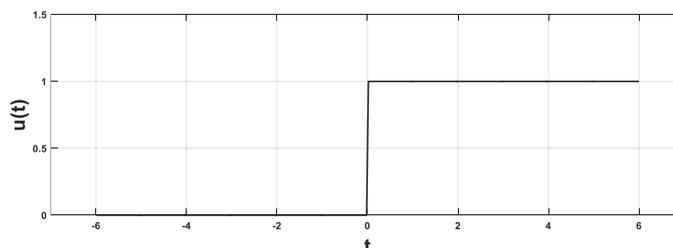
- Si  $0 < \alpha < 1$  : le signal est étendue (expansé) dans le temps.
- Si  $\alpha > 1$  : le signal est compressé dans le temps. Dans la figure ci-dessous le signal original  $x(t)$  est compressé par un facteur de 2 ( $g(t) = x(2t)$ )



**1.2.4.2 Signaux élémentaires :**

**a) Echelon unitaire :**

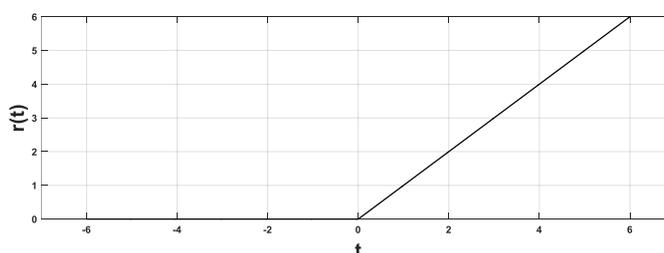
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



**b) Rampe unitaire :**

$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

On a aussi :



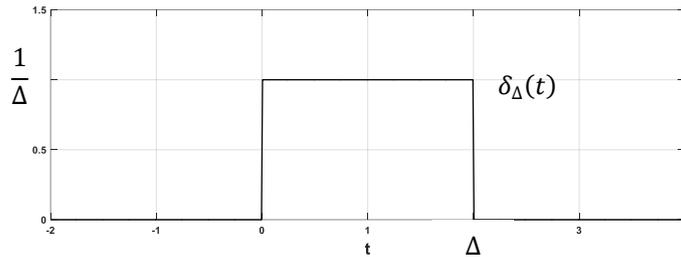
$$r(t) = tu(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau, \quad \frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

**c) Impulsion de Dirac :**

L'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  est une fonction généralisée, elle a une amplitude infinie dans une durée infinitésimale.

On considère une impulsion rectangulaire d'une surface unitaire :

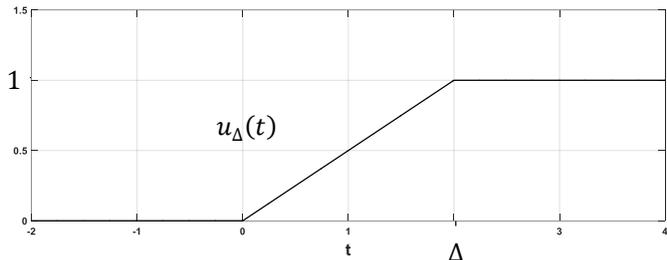
$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



On a :

$$u_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^t \delta_{\Delta}(\tau) d\tau = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^t (u(\tau) - u(\tau - \Delta)) d\tau = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau - \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^t u(\tau - \Delta) d\tau$$

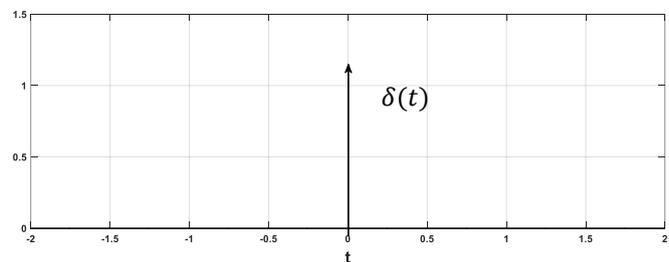
$$u_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} tu(t) - \frac{1}{\Delta} (t - \Delta)u(t - \Delta)$$



On peut déduire :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{r(t) - r(t - \Delta)}{\Delta} = \frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t - \Delta)}{\Delta} = \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$



• propriétés de l'impulsion de Dirac

$$1) u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

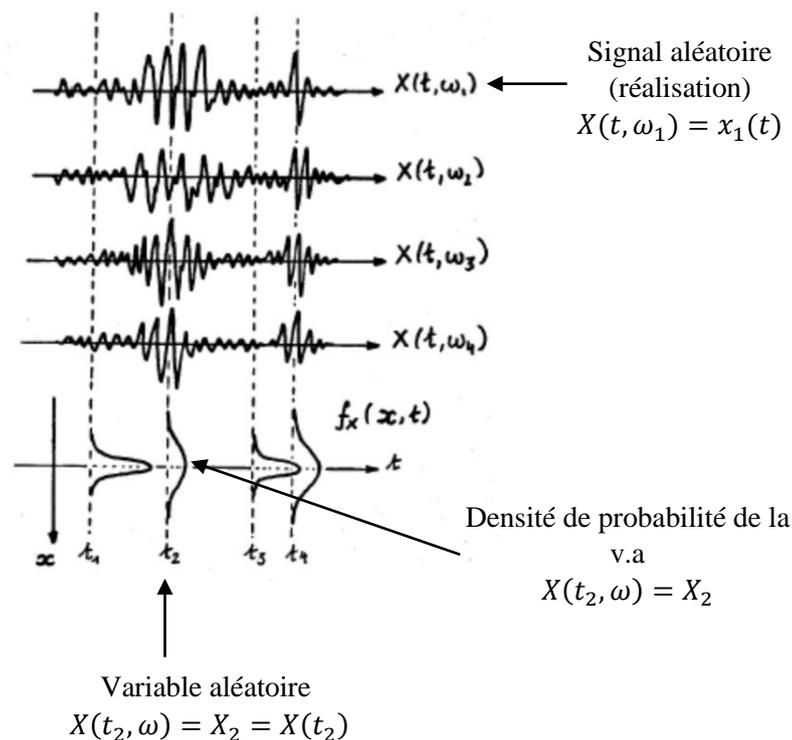
$$3) x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

## 1.2.5 Signaux aléatoires (Stochastiques) :

### 1.2.5.1 Définitions :

- Le signal est dit aléatoire si ses valeurs ou réalisations est imprévisible, on le décrit grâce à des outils statistiques (densité de probabilité, moyenne, variance,...).
- Un signal aléatoire est considéré comme la **réalisation** d'un **processus aléatoire**
- Un **processus aléatoire** est une fonction qui associe l'ensemble des évènements d'une expérience aléatoire à un ensemble des **réalisations (signaux aléatoires)**.
- On note  $X(t, \omega)$  un processus aléatoire où  $t$  est le temps et  $\omega$  évènement lié au résultat d'une expérience aléatoire.
- On note  $x_i(t) = X(t, \omega_i)$  une réalisation (signal aléatoire) d'un processus aléatoire.
- À un instant donné  $t_i$ , le processus aléatoire  $X(t_i, \omega) = X_i = X(t_i)$  est considéré comme une **variable aléatoire**.
- Pour un évènement donné  $\omega_i$ , le processus aléatoire  $X(t, \omega_i)$  est considéré comme une **réalisation (signal aléatoire)**.



### 1.2.5.2 Caractérisation statistiques d'un processus aléatoire :

#### a) Caractérisation statistique d'ordre 1 :

On a déjà mentionné qu'un processus aléatoire  $X(t, \omega)$  à un instant donné  $t_1$  deviens une seule variable aléatoire  $X(t_1, \omega) = X_1 = X(t_1)$ , cette v.a est caractérisée par

- La fonction de répartition

$$F_{X_1}(x_1, t_1) = P\{X_1 \leq x_1; t_1\} = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$

- La densité de probabilité

$$f_{X_1}(x_1, t_1) = \frac{\partial F_{X_1}(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

- Un moment d'ordre 1 (espérance mathématique) ou moyenne

$$m(t_1) = m_1(t_1) = E(X(t_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1, t_1) dx_1$$

- Un moment d'ordre 2

$$m_2(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 f_{X_1}(x_1, t_1) dx_1$$

- Une variance

$$\sigma_{X_1}^2 = E\{(X(t_1) - m(t_1))^2\} = E\{X^2(t_1)\} - m^2(t_1)$$

## b) Caractérisation statistique d'ordre 2 :

Si on fixe deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , le processus aléatoire  $X(t, \omega)$  est considéré comme deux variables aléatoires,  $X(t_1, \omega) = X_1$  et  $X(t_2, \omega) = X_2$ . Ces deux v.a sont caractérisés par :

- Une fonction de répartition conjointe :

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2; t_1, t_2\} = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

- Une densité de probabilité conjointe

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

- Une espérance mathématique :

$$\begin{aligned} m(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1), X(t_2)]^T\} = [E\{X(t_1)\}, E\{X(t_2)\}]^T \\ &= [m(t_1), m(t_2)]^T \end{aligned}$$

- Un moment d'ordre 2 croisé ou fonction d'autocorrélation :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = E(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

### 1.2.5.3 Processus aléatoire stationnaire :

Un processus aléatoire est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps.

- **Stationnarité d'ordre 1 :**

On dit un processus stationnaire d'ordre 1 si sa densité de probabilité est définie par :

$$f_X(x, t) = f_X(x, t - \Delta) = f_X(x)$$

Et caractérisée par une espérance mathématique (moyenne) constante par rapport au temps

$$E\{x(t)\} = m = \text{constante}$$

- **Stationnarité d'ordre 2 :**

On dit un processus stationnaire d'ordre 2 si sa densité de probabilité est définie par :

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1 - \Delta, t_2 - \Delta) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; \tau) \quad (\tau = t_2 - t_1)$$

Un processus stationnaire d'ordre 2 dépend de la différence temporelle  $\tau = t_2 - t_1$

Exemple :

On considère le processus aléatoire :

$$Y(t) = X_1 \cos \omega_0 t + X_2 \sin \omega_0 t,$$

Où  $\omega_0$  est une valeur constante,  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes qui suit la loi normale avec les paramètres :

$$E\{X_1\} = E\{X_2\} = 0 \text{ et } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

Dite si  $Y(t)$  est un processus stationnaire d'ordre 1.

Le processus  $Y(t)$  est normale puisqu'il est défini par une combinaison linéaire de deux v.a normales,  $X_1$  et  $X_2$ .

On calcul la moyenne et la variance de ce processus

- $m(t) = E\{Y(t)\} = E\{X_1 \cos \omega_0 t + X_2 \sin \omega_0 t\} = E\{X_1\} \cos \omega_0 t + E\{X_2\} \sin \omega_0 t = 0$
- $\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t)\} - m^2(t) = E\{Y^2(t)\}$ 

$$= E\{X_1^2 (\cos \omega_0 t)^2 + 2X_1 X_2 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + X_2^2 (\sin \omega_0 t)^2\}$$

$$= E\{X_1^2\} (\cos \omega_0 t)^2 + 2E\{X_1 X_2\} \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + E\{X_2^2\} (\sin \omega_0 t)^2$$

$$= E\{X_1^2\} (\cos \omega_0 t)^2 + 2 \underbrace{E\{X_1\} E\{X_2\}}_{=0} \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t + E\{X_2^2\} (\sin \omega_0 t)^2$$

$$= E\{X_1^2\} (\cos \omega_0 t)^2 + E\{X_2^2\} (\sin \omega_0 t)^2 = \sigma_1^2 (\cos \omega_0 t)^2 + \sigma_2^2 (\sin \omega_0 t)^2 = \sigma^2$$

Donc  $m(t)$  et  $\sigma_Y^2$  sont des valeurs constantes, alors la densité de probabilité de la v.a  $Y$  ne dépende pas du temps :

$$f_Y(y, t) = f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Alors  $Y(t)$  est un processus stationnaire d'ordre 1.

- **Stationnarité au sens large :**

Un processus est dit Stationnaire au Sens Large (SSL) si sa moyenne (espérance mathématique) est constante et sa fonction d'autocorrélation dépende seulement de la différence temporelle  $\tau = t_2 - t_1$

$$m(t) = E\{X(t)\} = \text{constante}$$

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(t, t + \tau) = E(X(t)X(t + \tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

## Chapitre 2 : Analyse de Fourier

### 2.1 Introduction :

Soit  $f(t)$  une fonction d'une variable réelle définie sur un ensemble  $D$ . On dit que  $f$  est  $T$ -périodique si et seulement si :

$$\forall t \in D, t + T \in D \text{ et } f(t + T) = f(t)$$

On dit  $f(t)$  une fonction carré intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si :

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$$

L'ensemble des fonctions  $T$ -périodique de carrée intégrable sur l'intervalle  $[-T/2, T/2]$  est noté par  $L^2[0, T]$

Le produit scalaire de deux fonctions  $T$ -périodique est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot g^*(t) dt \quad (g^*(t) \text{ est le conjugué de } g(t))$$

La norme d'une fonction  $T$ -périodique est :

$$\|f\| = \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Deux fonctions sont orthogonales si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\langle f, g \rangle = 0$$

### 2.2 Série de Fourier complexe :

Soit  $f(t)$  une fonction  $T$ -périodique de  $L^2[0, T]$ , alors :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les coefficients  $C_n$  sont appelés les coefficients de la série de Fourier complexe, le calcul de ces coefficients peut se faire grâce au produit scalaire :

$$C_n = \langle f(t), e^{jn\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Les séries de Fourier peuvent être vues de deux points de vue. Dans le premier on connaît la fonction  $f(t)$  et on cherche les coefficients  $C_n$ , c'est une analyse dans laquelle on passe de la considération temporelle de  $f(t)$  comme une fonction analytique à sa considération fréquentielle à l'aide des coefficients  $C_n$ . Dans la pratique il existe des analyseurs à partir d'un signal, nous donnent la représentation dans le domaine des fréquences. La figure 2.1 représente un analyseur de spectre destiné à afficher les différentes fréquences contenues dans un signal ainsi que leurs amplitudes respectives.



Fig. 2.1 Analyseur de spectre

Le second point de vue est l'inverse du premier. C'est-à-dire qu'on connaît le contenu fréquentiel  $C_n$  et on cherche à retrouver l'expression analytique de la fonction  $f(t)$ . Les appareils qui font ceci sont des synthétiseurs.

### 2.2.1 Quelques définitions :

- Nous noterons  $f(t) \leftrightarrow C_n$  la fonction  $f(t)$  qui admet un développement en série de Fourier complexe  $C_n$ .
- $C_0$  est la valeur moyenne de  $f(t)$ . En effet nous avons :

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

- $C_{-1}e^{-j\omega t} + C_1e^{j\omega t}$  est appelé la fondamentale (la première harmonique) du signal  $f(t)$
- $C_{-n}e^{-jn\omega t} + ne^{jn\omega t}$  est appelé la nième harmonique du signal.
- La représentation cartésienne des coefficients de Fourier :

$$C_n = A_n + jB_n$$

- La représentation polaire des coefficients de Fourier :

$$C_n = |C_n|e^{j\theta_n}$$

- $|C_n|$  : est le spectre d'amplitude du signal  $f(t)$ . Dans l'exemple suivant le spectre d'amplitude de la porte périodisée est donné par :

$$|C_n| = \left| \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sin \pi \frac{n}{2}}{\pi \frac{n}{2}} \right| = \frac{1}{2} \text{sinc} \left( \frac{n}{2} \right)$$

La figure 2.2 représente le spectre d'amplitude de la porte périodisée.

- $\theta_n$  : est le spectre de phase du signal  $f(t)$

### Exemple (porte périodisée) :

Soit  $f(t)$  la fonction porte périodisée, son graphe est représenté sur la figure 2.3.

On a :  $T = 4$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

L'expression analytique de  $f(t)$  sur une période :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 \leq t < -1 \\ 2 & -1 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Les coefficients de Fourier  $C_n$  est donnés par :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{4} \left[ -\frac{2}{jn\pi} e^{-jn\frac{\pi}{2}} \right]_{-1}^1$$

$$C_n = \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n\pi}$$

Pour les valeurs paire de  $n$  ( $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^*$ ) :  $C_n = C_{2k} = \frac{\sin k\pi}{2k\pi} = 0$

Pour  $n = 0$ , on a :

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{4} [t]_{-1}^1 = \frac{1}{2}$$

Pour les valeurs impaire de  $n$  ( $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ ) :  $C_n = C_{2k+1} = \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{(2k+1)\pi} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}$

Donc on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\frac{\pi}{2}t} = C_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{2k+1} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} e^{j(2k+1)\frac{\pi}{2}t}$$

La première harmonique est donnée par : (voir figure 2.3)

$$h_1(t) = C_{-1} e^{-j\omega t} + C_1 e^{j\omega t} = \frac{1}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{\pi} e^{j\frac{\pi}{2}t} = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} t$$

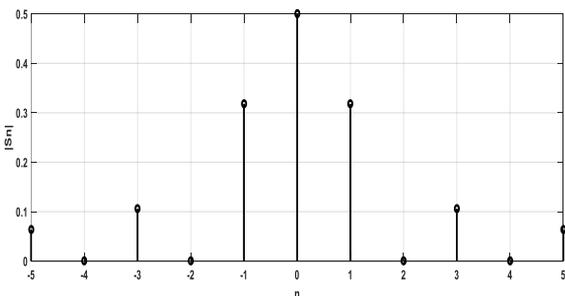


Fig. 2.2 Spectre d'amplitude du signal porte

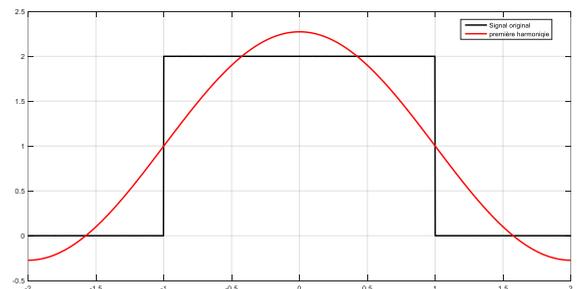


Fig. 2.3 signal original  $f(t)$  et sa 1<sup>ère</sup> harmonique  $h_1(t)$

## 2.2.2 Propriétés de la série de Fourier complexe :

Supposons  $f(t)$  une fonction périodique à valeurs réelles et admet un développement en série de Fourier à coefficients complexe  $C_n$  :

- 1) Si  $f(t)$  est réelle  $\Leftrightarrow C_n^* = C_{-n}$
- 2)  $A_n$  et  $|C_n|$  sont paires,  $B_n$  et  $\theta_n$  sont impaires.
- 3)  $C_n$  est réel et paire  $\Leftrightarrow f(t)$  est paire.
- 4)  $C_n$  est imaginaire pur et impaire  $\Leftrightarrow f(t)$  est impaire.

## 2.3 Série de Fourier réelle :

Si la fonction  $f(t)$  est  $T$ -périodique à valeur réelle on peut la mettre sous la forme d'une série réelle :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Les coefficients de la série de Fourier réelle sont :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt$$

### 2.3.1 Propriétés de la série de Fourier réelle :

- Si la fonction  $f(t)$  est paire alors :

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

- Si la fonction  $f(t)$  est impaire alors :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt \quad \text{et} \quad a_0 = 0$$

## 2.4 Egalité de Parseval :

Soit  $f(t)$  une fonction de  $L^2[0, T]$  (c.-à-d. une fonction  $T$ -périodique de puissance finie) qui admet un développement en série de Fourier. La puissance moyenne peut s'exprimer en fonction :

- Des coefficients de Fourier complexe :

$$\|f(t)\|^2 = P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \quad \text{égalité de Parseval}$$

- Des coefficients de Fourier réelle :

$$\|f(t)\|^2 = P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 \quad \text{égalité de Parseval}$$

### 2.4.1 Spectre de puissance :

L'égalité de Parseval nous permet de calculer la puissance moyenne d'une fonction  $f(t)$  périodique à partir de son analyse fréquentielle (grâce à des coefficients de Fourier). On peut déterminer la puissance  $P_n$  présente à chaque harmonique, on aura donc :

$$P_n = |C_n|^2 \quad \text{cas de la série de Fourier complexe}$$

$$P_n = \begin{cases} a_0^2 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) & n \geq 1 \end{cases} \quad \text{cas de la série de Fourier réelle}$$

On gardant toujours l'exemple du signal porte périodisée, on peut connaître la puissance présente à chaque harmonique, par exemple la puissance moyenne de la 3<sup>ème</sup> harmonique est donnée par :

$$P_3 = |C_{-3}|^2 + |C_3|^2 = \frac{1}{4} \left( \text{sinc} \left( -\frac{3}{2} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \text{sinc} \left( \frac{3}{2} \right) \right)^2 = \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} = \frac{2}{9\pi^2}$$

La figure 2.4 représente le spectre de puissance du signal porte périodisée pour 7 harmoniques.

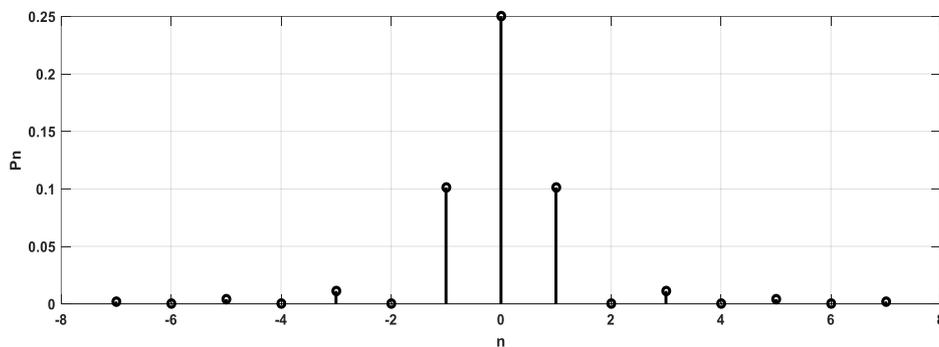


Fig. 2.4 Spectre de puissance du signal porte périodisée

### Exemple :

Soit la fonction  $\frac{2\pi}{3}$ -périodique définie par :

$$f(t) = 4 + 2 \cos 3t$$

On détermine les coefficients de Fourier complexe :

$$f(t) = 4 + 2 \cdot \frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2} = e^{-3jt} + 4e^{0jt} + e^{3jt}$$

Alors :  $C_{-1} = 1, C_0 = 4$  et  $C_1 = 1$

Pour les autres harmoniques  $C_n = 0$

La puissance moyenne est :

$$P = \sum_{n=-1}^1 |C_n|^2 = |C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + |C_1|^2 = 1 + 16 + 1 = 18$$

Vérifions le résultat par les calculs (égalité de Parseval) :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \frac{3}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 + 2 \cos 3t)^2 dt = \frac{3}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (16 + 16 \cos 3t + 4 \cos^2(3t)) dt$$

$$P = \frac{3}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 16 dt + \underbrace{\frac{3}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 16 \cos 3t dt}_{=0} + \frac{3}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos^2 3t dt$$

$$P = \frac{24}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} dt + \frac{6}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 6t}{2} dt = 16 + \frac{3}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} dt + \underbrace{\frac{3}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 6t dt}_{=0} = 16 + 2 = 18$$

## Chapitre 3 : Transformée de Fourier

### 3.1 De la série de Fourier à l'intégrale de Fourier :

Nous allons voir, comment on peut passer de l'analyse que nous avons faite sur les fonctions périodiques à une analyse qui s'applique à toutes les fonctions (fonctions non-périodiques).

Soit une fonction  $f(t)$  de carré intégrable ( $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ) représenté sur la figure 3.1. On veut définir la restitution de  $f(t)$  sur  $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$  de la manière suivante :

$$f_r(t) = \begin{cases} f(t) & t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans la figure 3.2 on peut voir que si on fait tendre  $T_0$  vers l'infini ( $T_0 \rightarrow \infty$ ) alors  $f_r(t) \rightarrow f(t)$

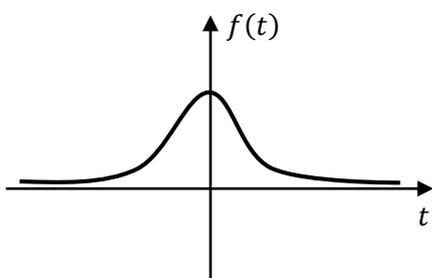


Fig. 3.1 signal  $f(t)$

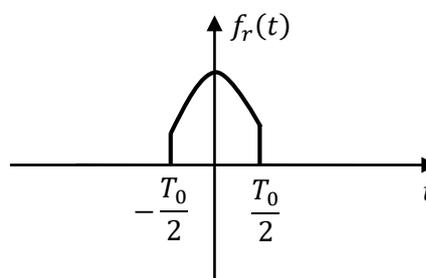


Fig. 3.2 signal  $f_r(t)$  est la restitution du signal  $f(t)$  sur  $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$

On plus, on peut rendre la fonction  $f_r(t)$  périodique de période  $T$ . Notons  $f_p(t)$  la fonction périodisée de  $f_r(t)$ , voir figure 3.3.

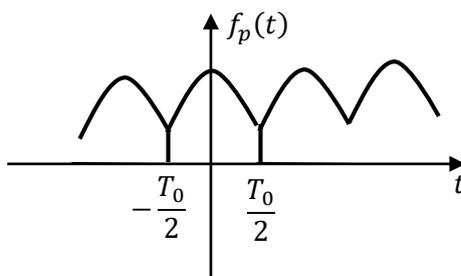


Fig. 3.3 signal périodique  $f_p(t)$

La fonction  $f_p(t)$ , peut se décomposer en série de Fourier puisque elle est périodique et de carré intégrable sur  $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$  on a :

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \text{ et } C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Comme  $f_p(t)$  est la fonction périodisée de  $f_r(t)$  sur  $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$  nous aurons aussi :

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \text{ pour } -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_r(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2)$$

Quand  $T_0 \rightarrow \infty$  on aura :

- $\omega_0 \rightarrow d\omega$
- $n\omega_0 \rightarrow \omega$
- $f_r(t) \rightarrow f(t)$
- La sommation tend vers l'intégrale ( $\sum \rightarrow \int$ )

L'équation (2) devient :

$$C_{n\infty} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f_r(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega \quad (3)$$

L'intégrale entre parenthèse de l'équation (3) est défini par la transformée de Fourier de la fonction  $f(t)$ , cette transformation est notée par :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

D'après l'équation (1) on peut écrire :

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_r(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}_{F(\omega)} \right) d\omega \cdot e^{j\omega t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

L'équation (4) est défini par la transformée de Fourier inverse, cette transformation est notée par :

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Nous adoptons la notation suivante  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  pour dire que  $F(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $f(t)$  et que  $f(t)$  est la transformée de Fourier inverse de  $F(\omega)$ .

### Exemple :

On veut calculer la transformée de Fourier du signal porte

Le signal porte est défini par :

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

On détermine la TF du signal porte :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{j\omega} \left( e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right)$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \left( \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j} \right) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\tau}{2} \omega = \tau \frac{\sin \frac{\tau}{2} \omega}{\frac{\tau}{2} \omega} = \tau \text{sinc} \left( \frac{\tau}{2} \omega \right)$$

La figure 3.4 représente la transformée de Fourier du signal porte pour  $\tau = 1$  et  $\tau = 2$

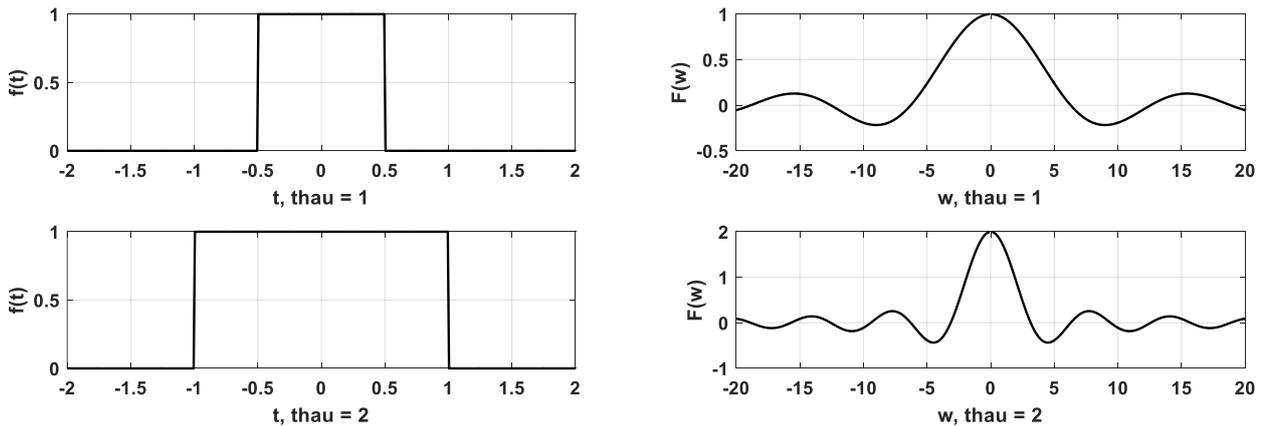


Fig. 3.4 Transformée de Fourier du signal porte pour  $\tau = 1$  et  $\tau = 2$

### 3.2 Spectre d'amplitude et de phase :

- Représentation cartésienne de la TF :

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

- Représentation polaire de TF :

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{j\theta(\omega)}$$

- Pour visualiser le spectre d'amplitude et de phase on utilise la forme polaire :

$|F(\omega)|$  : Le spectre d'amplitude

$\theta(\omega) = \arg(F(\omega))$  : Le spectre de phase

Dans notre exemple précédent, le spectre d'amplitude du signal porte est donné par :

$$|F(\omega)| = |\tau| \cdot \left| \text{sinc} \left( \frac{\tau}{2} \omega \right) \right| \quad \text{voir figure 3.5}$$

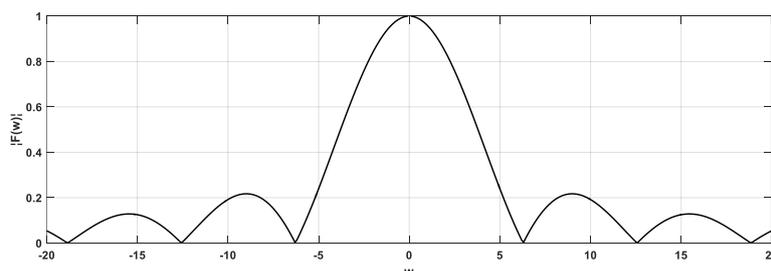


Fig. 3.5 spectre d'amplitude du signal porte

### 3.3 Propriétés de la transformée de Fourier :

#### - Linéarité :

Si  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$  et  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  alors pour tout constants  $a_1$  et  $a_2$  on ait  
 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

#### - Changement d'échelle :

Si  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  alors pour tout constant  $a \neq 0$  on ait  $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

#### - Translation en temps :

Si  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  alors pour tout constant  $t_0$  on ait  $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$

#### - Translation en fréquence :

Si  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  alors  $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$ ,  $\omega_0 \in \mathbb{R}$

#### - Dérivation :

Si  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  alors  $\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$

#### - Intégration :

Si  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  alors  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

#### - Dualité :

Si  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  alors  $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

#### - Convolution :

Si  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$  et  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  alors  $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

Et  $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} (F_1(\omega) * F_2(\omega))$

On rappelle que le produit de convolution de deux signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  est défini par :

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

### 3.4 Théorème de Parseval :

Pour tout signal  $f$  à énergie fini on ait :

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

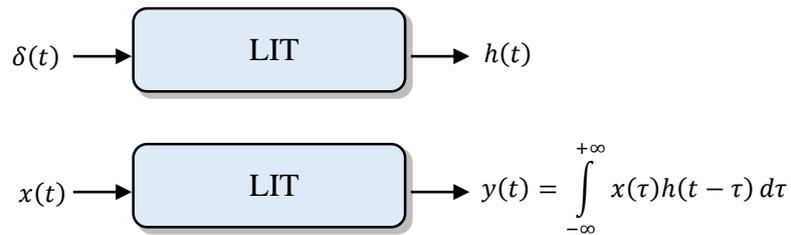
### 3.5 Table de la transformée de Fourier de quelques signaux usuels :

CT signals	Time domain $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} dt$	Frequency domain $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$	Comments
(1) Constant	1	$2\pi \delta(\omega)$	
(2) Impulse function	$\delta(t)$	1	
(3) Unit step function	$u(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
(4) Causal decaying exponential function	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$a > 0$
(5) Two-sided decaying exponential function	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
(6) First-order time-rising causal decaying exponential function	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$a > 0$
(7) Nth-order time-rising causal decaying exponential function	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
(8) Sign function	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	
(9) Complex exponential	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	
(10) Periodic cosine function	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
(11) Periodic sine function	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	
(12) Causal cosine function	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
(13) Causal sine function	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
(14) Causal decaying exponential cosine function	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
(15) Causal decaying exponential sine function	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
(16) Rectangular function	$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 &  t  \leq \tau/2 \\ 0 &  t  > \tau/2 \end{cases}$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau \neq 0$
(17) Sinc function	$\frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 &  \omega  \leq W \\ 0 &  \omega  > W \end{cases}$	
(18) Triangular function	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau} &  t  \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\tau \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau > 0$
(19) Impulse train	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$	$\omega_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0)$	angular frequency $\omega_0 = 2\pi/T_0$
(20) Gaussian function	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma \sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2 \omega^2/2}$	

## Chapitre 4 : Produit de convolution

### 4.1 Introduction :

La plupart des systèmes physiques sont linéaires et invariants dans le temps (SLIT), par exemple les circuits électriques constitués par des éléments passifs (résistance, inductance et condensateur) sont des systèmes (SLIT). La réponse d'un tel système est déterminée par le produit de convolution de l'entrée de ce dernier et sa réponse impulsionnelle (la réponse pour une entrée l'impulsion de Dirac) fig.1.



### 4.2 Définition :

Le produit de convolution de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ , noté  $x * y$ , est défini par :

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

### 4.3 Propriétés :

#### 4.3.1 Commutativité

Soit deux signaux notés  $x(t)$  et  $y(t)$ , leur produit de convolution est commutatif c.-à-d.

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \\ &= - \int_{+\infty}^{-\infty} x(t - \beta)y(\beta)d\beta \\ &= y(t) * x(t) \end{aligned}$$

Où  $\beta = t - \tau$ , soit  $\tau = t - \beta$  et  $d\tau = -d\beta$

#### 4.3.2 Associativité

Soit trois signaux  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ , l'opération de convolution est associative :

$$(x(t) * y(t)) * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau) * y(\tau))z(t - \tau)d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)y(\tau - \beta)d\beta \right) z(t - \tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)y(\tau - \beta)z(t - \tau)d\tau \right) d\beta \quad (\text{théorème de Fubini}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau - \beta)z(t - \tau)d\tau \right) d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} y(\rho)z(t - \beta - \rho)d\rho \right) d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\beta)(y * z)(t - \beta)d\beta \\
&= x(t) * (y(t) * z(t))
\end{aligned}$$

Où  $\rho = \tau - \beta$ , soit  $\tau = \rho + \beta$  et  $d\tau = d\rho$

### 4.3.3 Distributivité

L'opérateur de convolution est distributif sur l'addition :

$$\begin{aligned}
x(t) * (y(t) + z(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(y(t - \tau) + z(t - \tau))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(y(t - \tau) + z(t - \tau))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x(\tau)y(t - \tau) + x(\tau)z(t - \tau))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t - \tau)d\tau \\
&= x(t) * y(t) + x(t) * z(t)
\end{aligned}$$

### 4.3.3 Élément neutre de convolution

L'élément neutre du produit de convolution est l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t - \tau)d\tau = x(t)$$

### 4.3.3 Convolution de deux signaux retardés

Soit le produit de convolution de deux signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  :

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$$

Alors le produit de convolution de ces deux signaux retardés  $x_1(t - t_1)$  et  $x_2(t - t_2)$  est donné par :

$$x_1(t - t_1) * x_2(t - t_2) = y(t - (t_1 + t_2))$$

En effet :

$$x_1(t - t_1) * x_2(t - t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau - t_1)x_2(t - \tau - t_2)d\tau \quad (1)$$

On pose  $\tau - t_1 = \alpha$  alors  $d\alpha = d\tau$  et  $\tau = \alpha + t_1$

L'équation 1 devient :

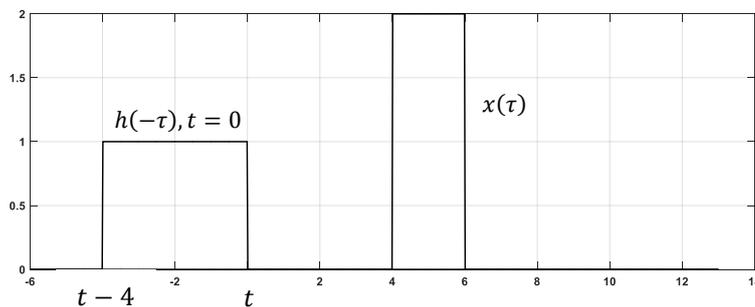
$$\begin{aligned} x_1(t - t_1) * x_2(t - t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\alpha)x_2(t - (\alpha + t_1) - t_2)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\alpha)x_2(t - (t_1 + t_2) - \alpha)d\alpha = y(t - (t_1 + t_2)) \end{aligned}$$

### 4.4 Exemple 1 :

On détermine la convolution de deux signaux porte définis par :

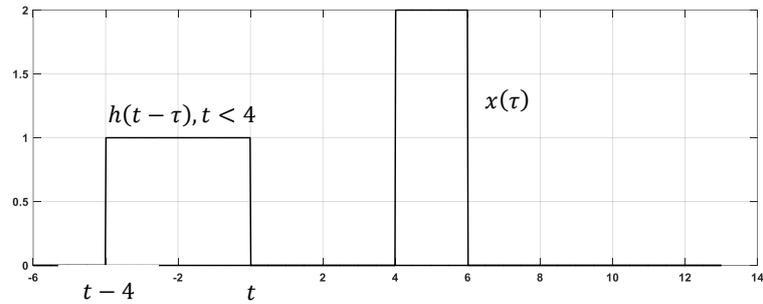
$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t - 5}{2}\right) \text{ et } h(t) = \Pi\left(\frac{t - 2}{4}\right)$$

On trace  $x(\tau)$  et  $h(-\tau)$  dans un même graphique



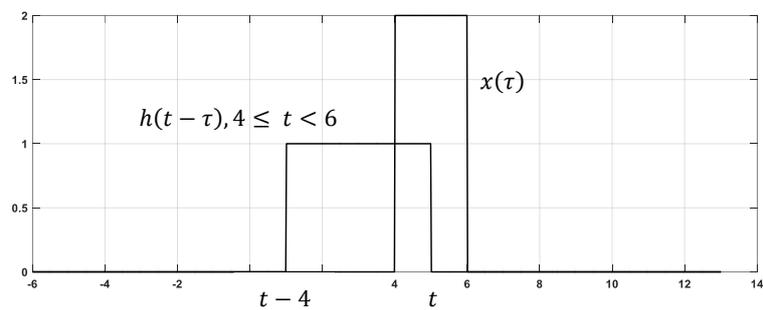
- Pour  $t < 4$  pas de chevauchement entre les signaux  $x(\tau)$  et  $h(t - \tau)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = 0$$



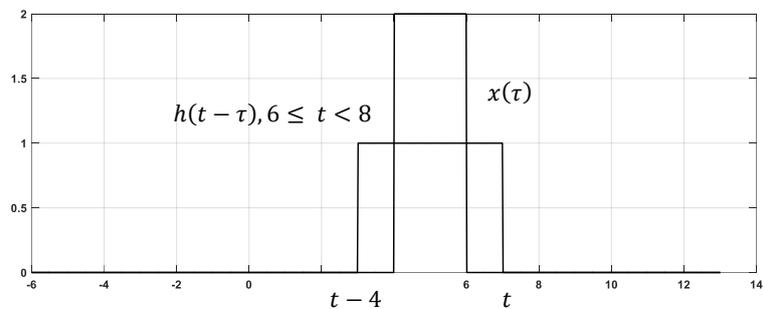
- Pour  $4 \leq t < 6$  il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_4^t 2 \cdot 1d\tau = [2\tau]_4^t = 2t - 8$$



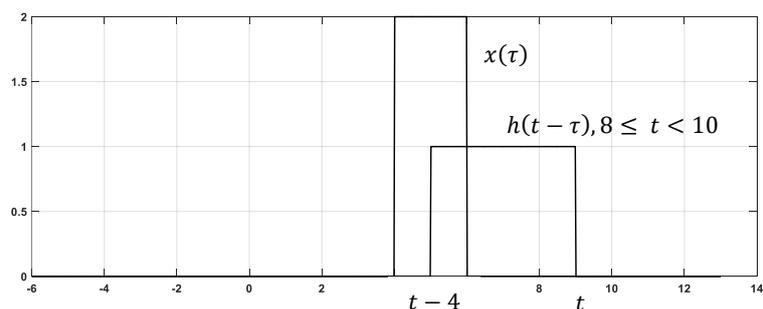
- Pour  $t \geq 6$  et  $t - 4 < 6$  ou  $6 \leq t < 8$  il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_4^6 2 \cdot 1d\tau = [2\tau]_4^6 = 4$$



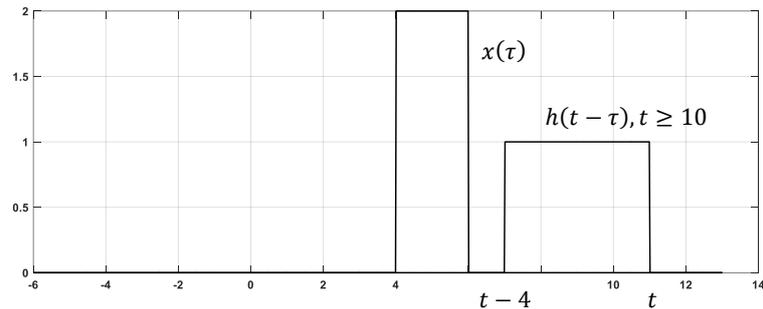
- Pour  $4 \leq t - 4 < 6$  ou  $8 \leq t < 10$  il y'a chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-4}^6 2 \cdot 1d\tau = [2\tau]_{t-4}^6 = -2t + 20$$



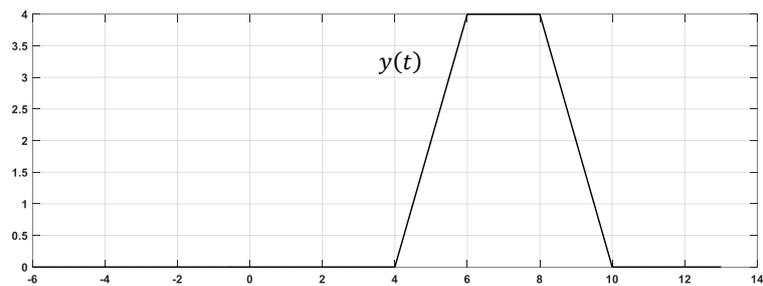
- Pour  $t - 4 \geq 6$  ou  $t \geq 10$  pas de chevauchement

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = 0$$



Finalement :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ 2t - 8 & 4 \leq t < 6 \\ 4 & 6 \leq t < 8 \\ -2t + 20 & 8 \leq t < 10 \\ 0 & t \geq 10 \end{cases}$$



## 4.5 Exemple 2 :

Le produit de convolution est très important en analyse des circuits, dans cet exemple en va déterminer la réponse d'un circuit électrique à une entrée donnée.

Soit un circuit R-L représenté dans la figure a, en applique à l'entrée de ce circuit un signal rectangulaire  $v_s(t)$  illustré dans la figure b. La réponse  $v_o(t)$  de ce circuit est donnée par le produit de convolution :

$$v_o(t) = v_s(t) * h(t)$$

Où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle du système (notre circuit)

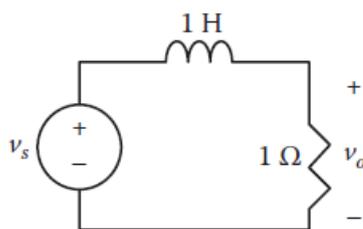


Fig. a

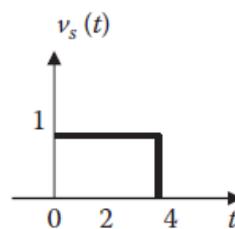


Fig. b

On peut déterminer la réponse impulsionnelle par la transformée de Laplace (chapitre 6)

On admet que :

$$h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot u(t) = e^{-t} \cdot u(t)$$

L'entrée du système est donnée par :

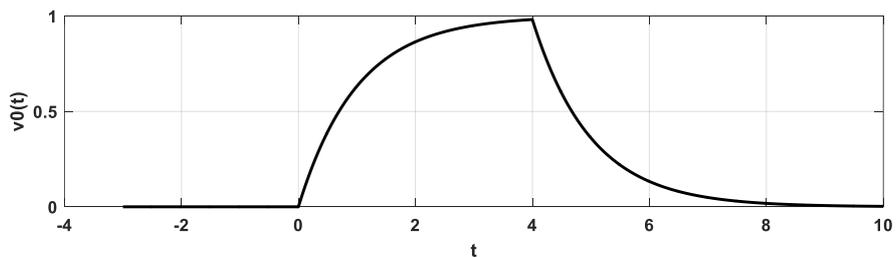
$$v_s(t) = u(t) - u(t - 4)$$

Alors la sortie  $v_o(t)$  :

$$v_o(t) = v_s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_s(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

On procède comme dans l'exemple 1 et on trouve :

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 \leq t < 4 \\ e^{4-t} - e^{-t} & t \geq 4 \end{cases}$$



## Chapitre 5 : Corrélation

### 5.1 Introduction :

Les techniques de corrélations sont utilisées dans de nombreux domaines tels que les communications, le traitement du signal, les systèmes de contrôle, la détection Radar, et la médecine.

Mathématiquement, la corrélation est une opération similaire à la convolution. Elle consiste à faire glisser une fonction sur l'autre et de trouver la zone sous la région de chevauchement. La corrélation peut être divisée en deux cas : l'intercorrélation (la corrélation de deux signaux différents) et l'autocorrélation (la corrélation d'un signal avec lui-même).

### 5.1 Intercorrélation :

L'intercorrélation entre deux signaux  $x(t)$  et  $h(t)$  est défini par :

$$R_{xh}(\tau) = x(\tau) ** h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t + \tau)dt$$

Cet intégrale mesure le degré de similitude entre les signaux  $x(t)$  et  $h(t + \tau)$ . Dans la plupart des cas le signal  $h(t)$  est le signal  $x(t)$  noyé dans le bruit défini par le signal  $n(t)$  c.-à-d.  $h(t) = x(t) + n(t)$ , par exemple pour identifier un individu en fonction de son modèle de parole, nous pouvons stocker son discours dans un ordinateur. Lorsqu'il présente dans une zone sécurisée en lui demande de parler et de calculer l'intercorrélation entre le signal stocké et le signal enregistré. L'opération d'intercorrélation nous aide à identifier cet individu. Généralement un individu est identifié si le pic de l'intercorrélation est proche de la valeur maximale d'autocorrélation.

### 5.2 Autocorrélation :

Lorsque  $x(t) = h(t)$ , l'intercorrélation devient autocorrélation c.-à-d. l'autocorrélation est la corrélation entre un signal avec lui-même :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau)dt$$

- L'autocorrélation en  $\tau = 0$  correspond à l'énergie totale du signal, on effet

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- L'autocorrélation est une fonction paire en effet

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t - \tau)dt$$

Par changement de variable  $t - \tau = s$

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s + \tau)x(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)x(s + \tau)ds = R_x(\tau)$$

### 5.3 Propriétés de la fonction d'intercorrélation :

- Soit  $x(t)$  et  $h(t)$  deux signaux, alors :

$$R_{xh}(\tau) = R_{hx}(-\tau)$$

En effet

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t + \tau)dt \quad (*)$$

On pose  $t + \tau = \alpha$ , l'équation (\*) devient

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha - t)h(\alpha)d\alpha = R_{hx}(-\tau)$$

- La fonction intercorrélation est liée à la convolution par la relation suivante :

$$R_{xh}(\tau) = x(\tau) ** h(\tau) = x(-\tau) * h(\tau)$$

$$R_{hx}(\tau) = h(\tau) ** x(\tau) = h(-\tau) * x(\tau)$$

En effet par changement de variable  $t = -\alpha$ ,

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\alpha)h(\tau - \alpha)d\alpha = x(-\tau) * h(\tau)$$

### 5.4 Exemple :

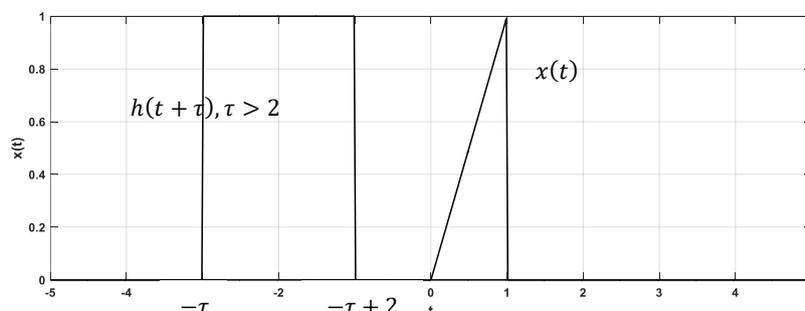
On détermine l'intercorrélation entre les signaux suivants :

$$x(t) = t(u(t) - u(t - 1)), \quad h(t) = \Pi\left(\frac{t - 1}{2}\right)$$

On trace dans un même graphique les signaux  $x(t)$  et  $h(t + \tau)$

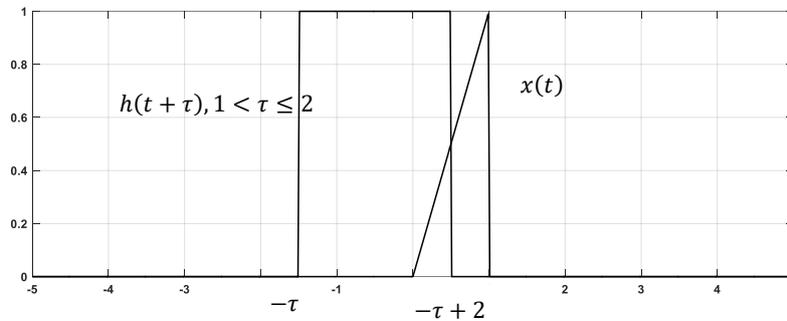
- Si  $-\tau + 2 < 0 \Rightarrow \tau > 2$  pas de chevauchement entre les signaux  $x(t)$  et  $h(t + \tau)$ , alors

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t + \tau)dt = 0$$



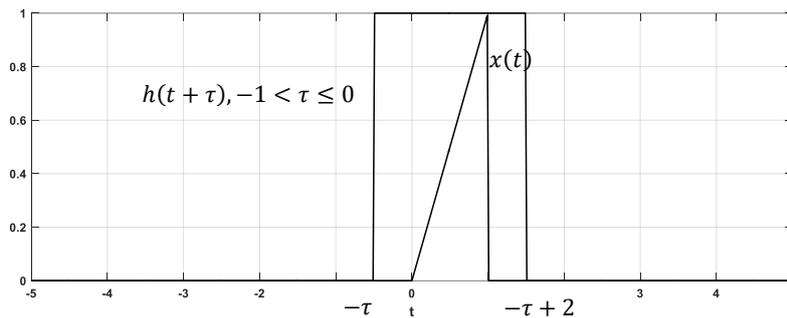
- Si  $0 \leq -\tau + 2 < 1 \Rightarrow 1 < \tau \leq 2$  il existe de chevauchement entre les signaux

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_0^{-\tau+2} t(1)dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{-\tau+2} = \frac{1}{2}(-\tau+2)^2$$



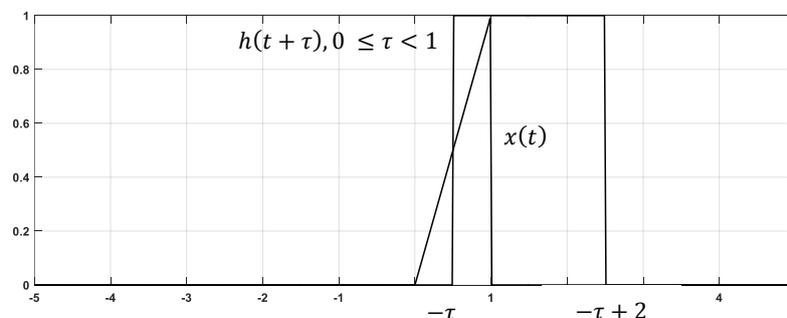
- Si  $-\tau + 2 \geq 1$  et  $-\tau < 0 \Rightarrow 0 < \tau \leq 1$  il existe de chevauchement entre les signaux

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_0^1 t(1)dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



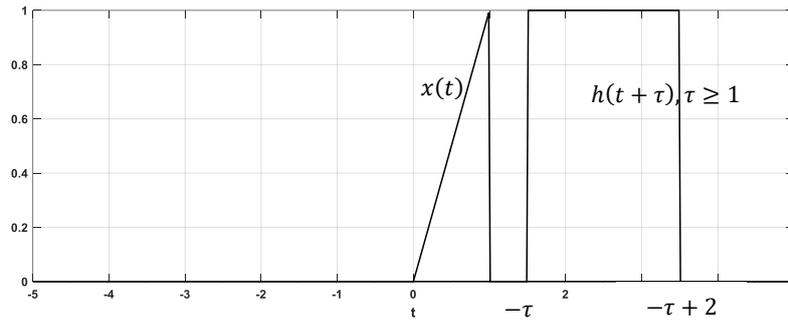
- Si  $0 \leq -\tau < 1 \Rightarrow -1 < \tau \leq 0$  il existe de chevauchement entre les signaux

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \int_{-\tau}^1 t(1)dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_{-\tau}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau^2$$



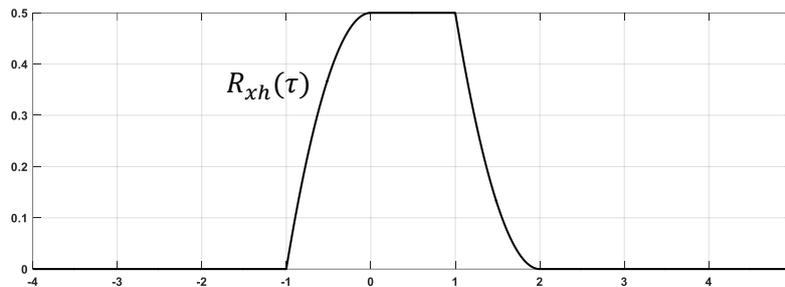
- Si  $-\tau \geq 1 \Rightarrow \tau \leq -1$  il n'existe pas de chevauchement entre les signaux

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt =$$



Finalement :

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(t+\tau)dt = \begin{cases} 0 & \tau > 2 \\ \frac{1}{2}(-\tau+2)^2 & 1 < \tau \leq 2 \\ \frac{1}{2} & 0 < \tau \leq 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau^2 & -1 < \tau \leq 0 \\ 0 & \tau \leq -1 \end{cases}$$



### 5.4 Intercorrélation et autocorrélation des signaux périodiques :

Si les signaux  $x(t)$  et  $h(t)$  sont périodique et de même période  $T$ , alors l'intercorrélation entre ces deux signaux est donnée par :

$$R_{T,xh}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_T(t)h_T(t+\tau)dt$$

On définit ainsi l'autocorrélation ( $x(t) = h(t)$ ) entre ces deux signaux par :

$$R_{T,x}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_T(t)x_T(t+\tau)dt$$

## Chapitre 6 : Transformée de Laplace

### 6.1 Introduction :

La transformée de Laplace est très utile dans l'étude des régimes transitoires qui vérifient le principe de causalité. En particulier, elle sera un outil important dans l'étude des filtres basée sur la réponse impulsionnelle (signal causal). D'une manière générale, cette transformée est l'outil de base dans le domaine de l'automatique, c'est-à-dire des systèmes bouclés. Le seul but de cette présentation est de rapprocher les deux principaux outils utilisés dans le cadre des signaux continus. Dans le cas d'un régime harmonique établi, on peut remplacer  $p$  par  $j\omega$  dans la transformée de Laplace.

### 6.2 Définition :

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, la transformée de Fourier du signal non périodique  $f(t)$  s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$  n'existe que si cette intégrale a une valeur finie (convergente). Dans le cas contraire on peut rendre cette intégrale convergente en multipliant  $f(t)$  par  $e^{-\sigma t}$ , la valeur  $\sigma$  est réelle positive et est appelée « rayon de convergence ». Cela conduit à définir une nouvelle grandeur, appelée « fréquence complexe »,  $p$  :

$$p = \sigma + j\omega$$

Si de plus on considère un signal causal (nul pour  $t < 0$ ), on obtient la transformée de Laplace, notée  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

### 6.3 Transformée de Fourier et transformée de Laplace :

Si on a une fonction  $f(t)$  telle que  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ , alors on a la relation :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{p=j\omega}$$

### 6.4 Propriétés de la transformée de Laplace :

On retrouve les mêmes propriétés pour la transformation de Laplace que pour la transformation de Fourier. Soit la fonction  $x(t)$  et la transformée de Laplace  $X(p)$  de ce signal, nous écrirons

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$$

Les principales propriétés de la transformée de Laplace, similaires à celles de la transformée de Fourier, sont :

- Linéarité :

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\{ax(t) + by(t)\} = a\mathcal{L}\{x(t)\} + b\mathcal{L}\{y(t)\} = aX(p) + aY(p)$$

- Homothétie (changement d'échelle)

$$x(at) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{p}{a}\right)$$

- Translation

$$x(t-a) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(p)e^{-ap}$$

et

$$x(t)e^{bt} \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(p-b)$$

- Dérivation

$$(-1)^n \cdot t^n \cdot x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{d^n(X(p))}{dp^n}$$

et

$$\frac{d^n(x(t))}{dt^n} \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} p^n X(p) - \left( p^{n-1} \cdot x(0) + \sum_{i=2}^n p^{n-i} \cdot \left( \frac{d^{i-1}(x(t))}{dt^{i-1}} \right)_{t=0^+} \right)$$

pour  $n = 1$

$$\frac{d(x(t))}{dt} \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} pX(p) - x(0)$$

- Intégration

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{X(p)}{p}$$

- Transformée d'une fonction périodique

Soit  $x(t)$  une fonction périodique de période  $T_0$ , nous avons :

$$x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-pT_0}} \int_{0^-}^{T_0} e^{-pt} \cdot x(t) dt$$

- Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Le théorème de la valeur initiale donne la valeur du signal à l'instant 0 en fonction de sa transformée de Laplace :

$$x(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot X(p)$$

Le théorème de la valeur finale donne la valeur du signal à l'infini en fonction de sa transformée de Laplace :

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p)$$

- Convolution et transformée de Laplace

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(p) \cdot Y(p)$$

## 6.4 Transformée de Laplace des fonctions usuelles :

**Table 6.1.** CTFT and Laplace transform pairs for several causal CT signals

CT signals $x(t)$	CTFT $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$	Laplace transform $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$
(1) Impulse function $x(t) = \delta(t)$	1	1 ROC: entire s-plane
(2) Unit step function $x(t) = u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	$\frac{1}{s}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(3) Causal gate function $x(t) = u(t) - u(t - a)$	$(1 - e^{-ja\omega}) \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right)$	$\frac{1}{s}(1 - e^{-as})$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(4) Causal decaying exponential function $x(t) = e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$\frac{1}{a + s}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > -a$
(5) Causal ramp function $x(t) = tu(t)$	does not exist	$\frac{1}{s^2}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(6) Higher-order causal ramp function $x(t) = t^n u(t)$	does not exist	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(7) First-order time-rising causal decaying exponential function $x(t) = te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$ provided $a > 0$ .	$\frac{1}{(a + s)^2}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > -a$
(8) Higher-order time-rising causal decaying exponential function $x(t) = t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$ provided $a > 0$	$\frac{n!}{(a + s)^{n+1}}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > -a$
(9) Causal cosine wave $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ $+ \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	$\frac{s}{\omega_0^2 + s^2}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(10) Causal sine wave $x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$ $+ \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(11) Squared causal cosine wave $x(t) = \cos^2(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)]$ $+ \frac{1}{j2\omega} + \frac{j\omega}{2(4\omega_0^2 - \omega^2)}$	$\frac{(2\omega_0^2 + s^2)}{s(4\omega_0^2 + s^2)}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(12) Squared causal sine wave $x(t) = \sin^2(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega) - \delta(\omega - 2\omega_0) - \delta(\omega + 2\omega_0)]$ $+ \frac{1}{j2\omega} - \frac{j\omega}{2(4\omega_0^2 - \omega^2)}$	$\frac{2\omega_0^2}{s(4\omega_0^2 + s^2)}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > 0$
(13) Causal decaying exponential cosine function $x(t) = \exp(-at) \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ provided $a > 0$	$\frac{a + s}{(a + s)^2 + \omega_0^2}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > -a$
(14) Causal decaying exponential sine function $x(t) = \exp(-at) \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ provided $a > 0$	$\frac{\omega_0}{(a + s)^2 + \omega_0^2}$ ROC: $\text{Re}\{s\} > -a$

### Exemple 1 :

Calculer la transformée de Laplace du signal suivant.

$$x(t) = \delta(t) - 3u(t) + 5e^{-2t} \cdot u(t)$$

En effet

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t) - 3u(t) + 5e^{-2t} \cdot u(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} - 3\mathcal{L}\{u(t)\} + 5\mathcal{L}\{e^{-2t} \cdot u(t)\}$$

$$X(p) = 1 - \frac{3}{p} + \frac{5}{p+2} = \frac{p^3 + 4p - 6}{p(p+2)}$$

### 6.5 Transformée de Laplace inverse :

Après avoir analysé un problème dans le domaine de Laplace (domaine complexe), il faut effectuer la transformée inverse pour obtenir la solution dans le domaine du temps.

La transformée de Laplace inverse est défini par l'intégrale complexe :

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p) \cdot e^{pt} dp$$

L'intégrale est prise le long d'une ligne se trouvant dans le plan complexe. Toutefois, nous n'aborderons pas l'utilisation de cette intégrale qui demande des résultats d'analyse complexe plus poussé (calculs des résidus). La technique, utilisée pour trouver la Transformée de Laplace inverse est de décomposer la fraction rationnelle  $X(p)$  pour laquelle le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur en éléments simple de première et seconde espèces et utilisé le tableau des transformées de Laplace pour déterminer  $x(t)$ .

### Exemple 2 :

Trouver la Transformée de Laplace inverse de

$$X(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

Pour déterminer  $A$ , on multiplie chaque côté par  $p+1$

$$\frac{2}{p+2} = A + \frac{B(p+1)}{p+2}$$

Si on prend  $p = -1$

$$\left. \frac{2}{p+2} \right|_{p=-1} = A = 2$$

Pour  $B$ , on fait le même processus :

$$\left. \frac{2}{p+1} \right|_{p=-2} = B = -2$$

Et on obtient :

$$X(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2}\right\}$$

$$x(t) = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} - 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} = 2e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

## 6.6 Fonction de transfert :

Dans le chapitre 4 on a expliqué que les systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT) peuvent être modélisé par le produit de convolution c.-à-d. si on excite un système par un signal d'entrée  $e(t)$ , la sortie  $s(t)$  est défini par :

$$s(t) = e(t) * h(t) \quad (6.6)$$

$h(t)$  est la réponse impulsionnelle du système, elle est définie comme la sortie du système lorsqu'on applique à son entrée l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$ .

Si on applique la transformée de Laplace, l'équation (6.6) devient

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = \mathcal{L}\{e(t) * h(t)\} \Rightarrow S(p) = E(p) \cdot H(p)$$

Donc

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$H(p)$  : s'appelle la fonction de transfert du système.

### Exemple :

On calcule la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du circuit électrique de l'exemple 2 du chapitre 4. On peut modéliser ce circuit (SLIT) par une équation différentielle linéaire à coefficients constants comme suit : (conditions initiales sont nulles)

$$\begin{cases} v_s(t) = v_L(t) + v_R(t) \\ v_L(t) = L \frac{di}{dt} \\ v_R(t) = v_o(t) = Ri \end{cases} \Rightarrow v_s(t) = \begin{cases} v_s(t) = v_L(t) + v_o(t) \\ v_L(t) = \frac{L}{R} \frac{dv_o(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{R} \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_s(t) \quad (6.7)$$

On applique la transformée de Laplace, l'équation (6.7) devient

$$\mathcal{L}\left\{\frac{L}{R} \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t)\right\} = \mathcal{L}\{v_s(t)\} \Rightarrow \frac{L}{R} \mathcal{L}\left\{\frac{dv_o(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{v_o(t)\} = \mathcal{L}\{v_s(t)\}$$

$$\frac{L}{R} p V_o(p) + V_o(p) = V_s(p) \Rightarrow \left(\frac{L}{R} p + 1\right) V_o(p) = V_s(p)$$

$$H(p) = \frac{V_o(p)}{V_s(p)} = \frac{R/L}{p + R/L}$$

Pour trouver la réponse impulsionnelle  $h(t)$  on doit déterminer la transformée de Laplace inverse de  $H(p)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R/L}{p + R/L}\right\} = \frac{R}{L} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p + R/L}\right\} = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \cdot u(t)$$

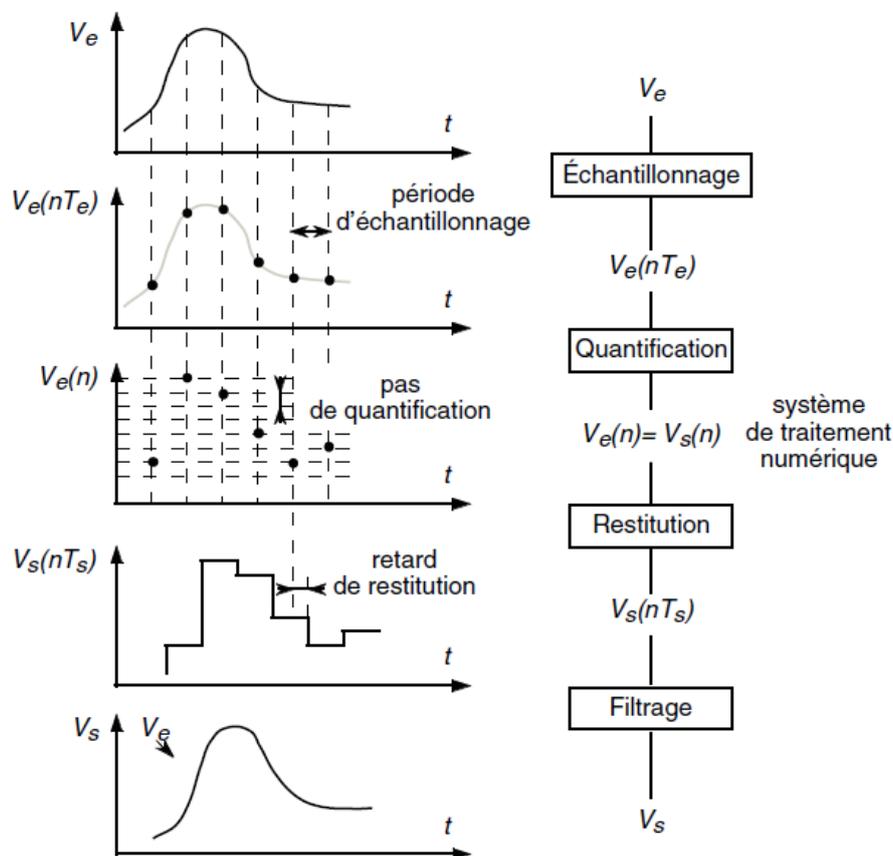
## Chapitre 7 : Echantillonnage et signaux discrets

### 7.1 Introduction :

L'échantillonnage d'un signal continu est l'opération qui consiste à prélever des échantillons du signal pour obtenir un signal discret, c'est-à-dire une suite de nombres représentant le signal, dans le but de mémoriser, transmettre, ou traiter le signal.

L'échantillonnage intervient dans l'opération de conversion analogique-numérique, par exemple dans un dispositif de numérisation du son ou de l'image.

L'enchaînement des différents signaux dans une chaîne d'acquisition et de restitution de données par un système numérique est celui présenté sur la figure suivante.



Le signal analogique d'entrée  $V_e(t)$  est échantillonné pour donner un signal discrétisé temporellement  $V_e(nT_e)$ , avec  $T_e$  la période d'échantillonnage. Mais après cette phase de prélèvement d'échantillons, il est nécessaire de coder la donnée réelle obtenue dans un ensemble fini de valeurs : opération de quantification. Après cette quantification du signal, les différentes valeurs sont mémorisées dans le système numérique selon l'ordre de leur arrivée, formant ainsi une suite de valeurs numériques  $V_e(n)$ .

Après le traitement numérique (filtrage numérique), le système numérique fourni en sortie les valeurs  $V_s(n)$ , cette de valeurs numérique est envoyée vers le procédé externe en réalisant successivement deux étapes. D'une part le système doit restituer la valeur analogique  $V_s(nT_e)$  qui est l'opération inverse de la quantification et ensuite il est nécessaire de mettre en place le filtrage de ce signal pour obtenir un signal de sortie  $V_s$  sans fronts raides.

## 7.2 Échantillonnage idéal :

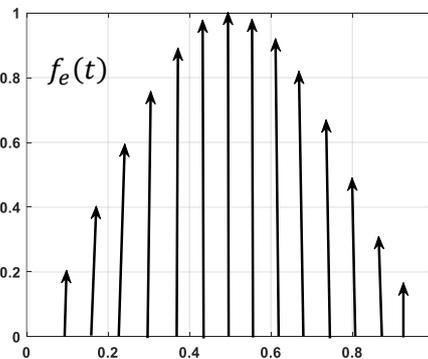
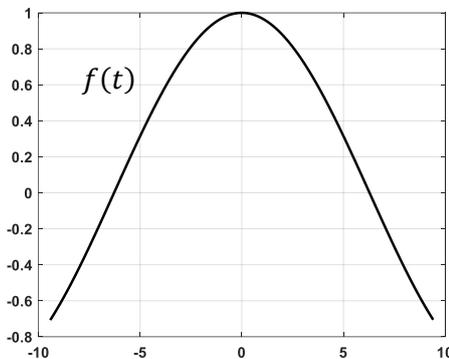
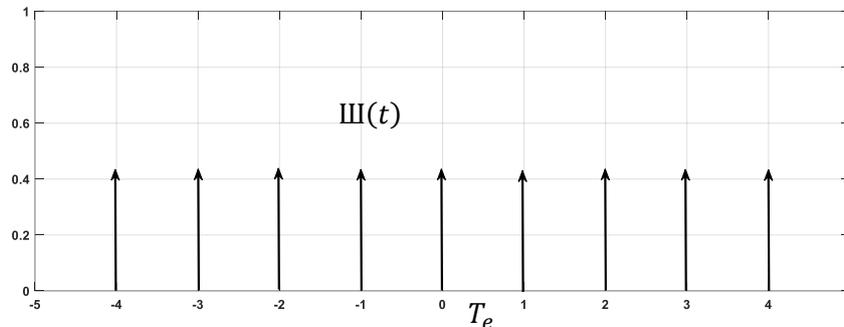
Échantillonnage idéal consiste à multiplier un signal à temps continu  $f(t)$  (un signal dont son spectre est limité c.-à-d.  $F(\omega) = 0$  pour  $\omega > \omega_{max}$ ) par un train d'impulsion de Dirac (peigne de Dirac) définie par

$$\mathbb{I}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$$

Le signal échantillonné  $f_e(t)$  est donné par :

$$f_e(t) = f(t) \cdot \mathbb{I}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT_e)$$

$$f_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)$$



Le choix de la période d'échantillonnage  $T_e$  détermine avec quelle précision le signal échantillonné  $f_e(t)$  représente le signal original  $f(t)$ .

Pour déterminer le spectre du signal échantillonné  $f_e(t)$ , on calcul la transformée de Fourier de ce signal

$$F_e(\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \mathcal{F}\{f(t) \cdot \mathbb{I}(t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)\right\}$$

$$F_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(t)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)\right\} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_e)$$

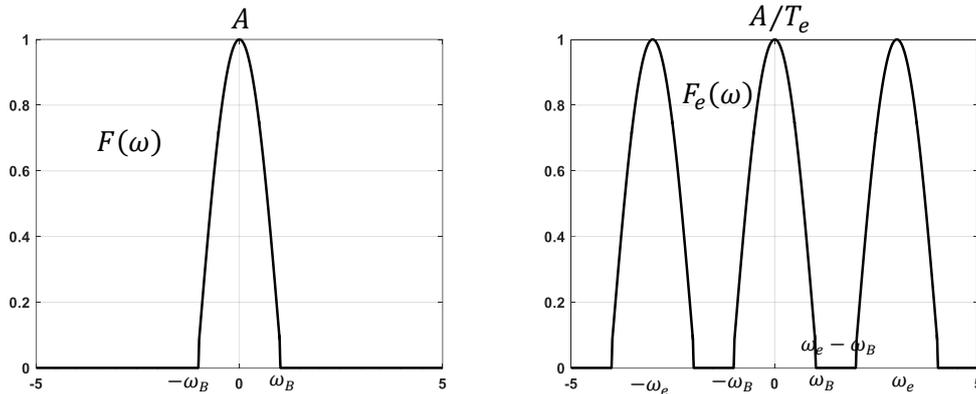
Avec

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$$

$$F_e(\omega) = \frac{\omega_e}{2\pi} \cdot F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_e) = \frac{1}{T_e} F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_e}\right)$$

$$F_e(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_e}\right)$$

Comme conséquence, le spectre du signal échantillonné  $F_e(\omega)$  correspond au spectre du signal original  $F(\omega)$  dupliqué avec une période  $\omega_e$ .



Le spectre  $F(\omega)$  a une bande de fréquence limitée, il est nul en dehors de l'intervalle  $[-\omega_B, \omega_B]$

$$F(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_B = \omega_{max}$$

### 7.2.1 Théorème de Shannon :

À partir de ce premier résultat, représenté sur la figure ci-dessus, nous pouvons faire une première remarque : pour que la répétition périodique du spectre du signal échantillonné  $F_e(\omega)$  ne déforme pas le motif répété, il faut et il suffit que la fréquence de répétition  $\omega_e$ , qui est la fréquence d'échantillonnage, soit égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal initial  $\omega_B = \omega_{max}$ . C'est le théorème de l'échantillonnage ou aussi appelé **théorème de Shannon** :

D'après la figure ci-dessus

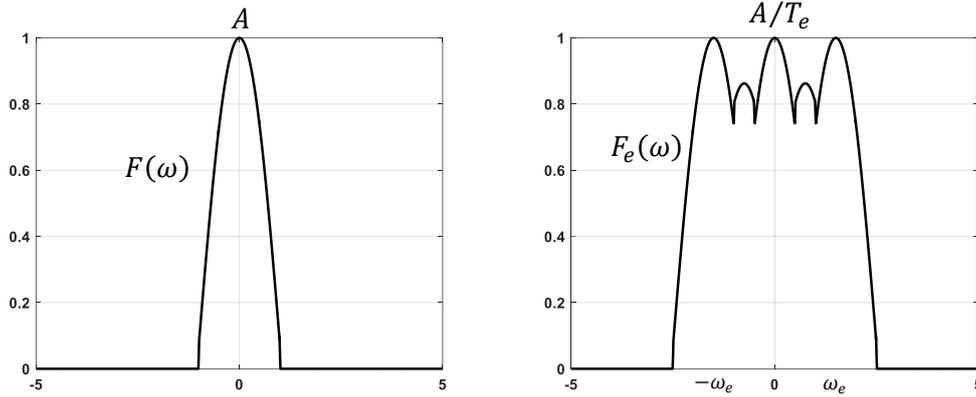
$$\omega_e - \omega_B \geq \omega_B \Rightarrow \omega_e \geq 2\omega_B = 2\omega_{max}$$

Ou bien

$$\omega_e \geq 2\omega_{max} \Rightarrow 2\pi f_e \geq 4\pi f_{max} \Rightarrow f_e \geq 2f_{max}$$

### 7.2.2 Effet de repliement du spectre :

Si la condition de Shannon n'est pas respectée ( $f_e < 2f_{max}$ ), il y a donc un phénomène de recouvrement du spectre (aliasing), dans ces conditions on ne peut pas récupérer le signal original à partir de ses échantillons par un filtre idéal passe-bas. La figure ci-dessus représente ce phénomène.



### 7.2.2 Extraction du signal original à partir du signal échantillonné :

En supposant le signal original à bande limitée de fréquence maximale  $\omega_{max}$  et la condition du théorème de Shannon remplie. On peut restituer le signal original  $f(t)$  à partir du spectre de signal échantillonné  $F_e(\omega)$  en appliquant un filtre idéal passe-bas  $H(\omega)$  de fréquence de coupure  $\omega_e/2$ . Voir figure ci-dessous

En effet

$$F(\omega) = F_e(\omega) \cdot H(\omega) \quad (*)$$

Avec

$$H(\omega) = \begin{cases} T_e & |\omega| < \omega_e/2 \\ 0 & |\omega| \geq \omega_e/2 \end{cases}$$

Prenant la transformée de Fourier inverse de l'équation (\*)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F_e(\omega) \cdot H(\omega)\}$$

$$f(t) = f_e(t) * h(t)$$

Comme

$$f_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e), \quad h(t) = \text{sinc}\left(\frac{\omega_e t}{2\pi}\right)$$

On ait

$$f(t) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \right) * \left( \text{sinc}\left(\frac{\omega_e t}{2\pi}\right) \right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \cdot \left( \text{sinc}\left(\frac{\omega_e t}{2\pi}\right) * \delta(t - nT_e) \right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \cdot \left( \text{sinc}\left(\frac{\omega_e(t - nT_e)}{2\pi}\right) \right)$$

On peut confirmer que le signal original est somme des fonctions sinus cardinal (Sinc(t)) décalé par des multiples périodes d'échantillonnage  $nT_e$ .

