

Algèbre-III
Réduction des endomorphismes

Alexis Tchoudjem

Université Lyon I

10 octobre 2011

Dans ce cours $\mathbb{K}$ est un corps qui peut être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Table des matières

1	Un peu de théorie des groupes	7
1.1	Lois de composition	7
1.1.1	Associativité, commutativité	8
1.1.2	Identité, éléments inversibles	9
1.2	Groupes	11
1.3	Sous-groupes	13
1.4	Groupes cycliques	14
1.4.1	Les groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	14
1.5	Morphismes de groupes	17
1.5.1	Sous-groupes distingués	18
1.5.2	Isomorphismes	19
1.6	Classes à gauche et à droite	20
1.7	Le groupe symétrique	22
1.7.1	Décomposition en cycles	22
1.7.2	Signature	24
2	Rappels sur les matrices	27
2.0.3	Opérations	28
2.1	Matrices carrées	29
2.2	Applications	31
2.2.1	La suite de Fibonacci	31
2.2.2	Graphes	32
2.2.3	Équation différentielle	33
2.3	Systèmes linéaires	34
2.4	Rang d'une matrice	34
2.4.1	Rappels sur les espaces vectoriels	34
2.4.2	Matrices échelonnées	39
2.4.3	Égalité entre le rang des lignes et le rang des colonnes .	42
2.4.4	Image et noyau d'une matrice	44
2.5	Lien avec les applications linéaires	46
2.5.1	Matrice associée à une application linéaire	46

2.5.2	Théorème du rang	47
2.5.3	Changements de base	50
3	Le déterminant	53
3.1	Dimension 2 et 3	53
3.2	Déterminant en dimension quelconque	54
3.2.1	Arrangements	54
3.2.2	Définitions du déterminant	54
3.3	Règle de Cramer	60
3.4	Déterminant d'un endomorphisme	65
4	Valeurs propres, vecteurs propres	67
4.1	Sous-espaces invariants	67
4.2	Vecteurs propres	68
4.3	Polynôme caractéristique	70
4.4	Espaces propres	78
4.5	Un premier critère de diagonalisabilité	83
4.6	Trigonalisation	89
5	Polynômes d'endomorphismes	93
5.1	Définition	93
5.2	Théorème de Cayley-Hamilton	95
5.3	Polynômes annulateurs	99
6	Décomposition spectrale	107
6.1	Sous-espaces caractéristiques	107
6.2	Projecteurs spectraux	113
6.3	Décomposition de Dunford-Jordan	115
6.4	Calcul pratique des projecteurs spectraux	117
6.4.1	Méthode	117
6.4.2	Exemples	118
6.5	Réduction de Jordan	119
6.5.1	Blocs de Jordan	119
6.5.2	Matrices nilpotentes	120
6.5.3	Réduction de Jordan	123
7	Puissances	127
7.1	Motivation	127
7.2	Cas diagonalisable	127
7.3	Cas général	130
7.4	Suites récurrentes	130

8	Exponentielle	133
8.1	Exponentielle complexe	133
8.2	Suites de matrices	133
8.3	Définition de $\exp(A)$	134
8.4	Méthode de calcul	137
8.5	Équations différentielles	138
8.5.1	Dérivation des matrices	138
8.5.2	Équations différentielles linéaires à coefficients constants	140
9	Groupe orthogonal	143
9.1	Matrices orthogonales	143
9.2	Produit scalaire	143
9.3	Réflexions orthogonales	145
9.4	Réduction des matrices orthogonales	146
9.4.1	$O_2(\mathbb{R})$	146
9.4.2	$O_3(\mathbb{R})$	148
9.4.3	Cas général	150
9.5	Les quaternions	152
9.5.1	Définitions	153
9.5.2	Norme	155
9.5.3	Lien avec les rotations	155
10	Invariants de similitude	159
10.1	Matrices à coefficients polynomiaux	159
10.1.1	Matrices élémentaires	160
10.2	Réduction des matrices à coefficients polynomiaux	161
10.3	Invariants de similitude	164
10.4	Endomorphismes cycliques	170

Chapitre 1

Un peu de théorie des groupes

1.1 Lois de composition

De manière très générale, *faire de l'algèbre* c'est étudier des structures algébriques *c-à-d* des ensembles où sont définies des opérations.

Une *opération*, ou *loi de composition*, sur un ensemble E est une application :

$$E \times E \rightarrow E .$$

Les éléments de l'ensemble E peuvent être des nombres, des matrices, des fonctions, *etc*

Les ensembles de nombres suivants sont des exemples basiques de structures algébriques. Ils sont munis d'au moins deux opérations, l'addition et la multiplication :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+ .$$

Remarques :

— les opérations d'addition et de multiplication ne sont pas définies sur tous les ensembles de nombres. Par exemple le produit de deux nombres irrationnels n'est pas toujours un nombre irrationnel ;

— Le produit vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est un exemple de loi de composition mais non le produit scalaire.

Rappelons que le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ est défini ainsi :

$$\forall x_i, y_j \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} .$$

Notations : Pour une loi de composition sur un ensemble E , la notation fonctionnelle n'est pas très pratique. On utilise plutôt une notation qui ressemble à celle utilisée pour la somme ou le produit de nombres. Par exemple, si :

$$p : E \times E \rightarrow E \quad (a, b) \mapsto p(a, b)$$

est une loi de composition on notera le plus souvent ab (ou parfois $a \times b$, $a \circ b$ ou $a + b$) le résultat de l'opération $p(a, b)$. Par exemple : $(ab)c = p(p(a, b), c)$.

1.1.1 Associativité, commutativité

Définition 1 Soit une loi de composition sur un ensemble E notée multiplicativement : $(a, b) \mapsto ab$. On dit que cette loi est associative si :

$$(ab)c = a(bc)$$

pour tous $a, b, c \in E$. On dit que cette loi est commutative si :

$$ab = ba$$

pour tous $a, b \in E$.

Exemples : les lois d'addition et de multiplications sur les ensembles de nombres $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ sont associatives et commutatives. La loi d'addition (coordonnée par coordonnée) sur l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est aussi associative et commutative. En revanche, la loi du produit vectoriel sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ n'est ni associative ni commutative. La loi de multiplication des matrices carrées (réelles ou complexes) est une loi associative.

Notations : on note souvent $+$ les lois de composition commutatives.

Remarque : Si une loi $(a, b) \mapsto ab$ sur un ensemble E est associative, on définit le produit de n éléments de E par récurrence sur n de la façon suivante :

$$a_1 \dots a_n := (a_1 \dots a_{n-1})a_n$$

pour tous $a_1, \dots, a_n \in E$. On a alors :

$$a_1 \dots a_n = (a_1 \dots a_i)(a_{i+1} \dots a_n)$$

pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exemple : On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} : a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

sont des matrices carrées réelles, on pose $AB := (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} .$$

Cette loi est associative, en effet, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors pour tous i, j , le (i, j) -ième coefficient de $(AB)C$ est le même que le (i, j) -ième coefficient de $A(BC)$:

$$\sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j} .$$

1.1.2 Identité, éléments inversibles

Définition 2 Soit une loi de composition sur un ensemble E :

$$E \times E \rightarrow E, (a, b) \mapsto ab .$$

Une identité, ou un élément neutre, pour cette loi est un élément $e \in E$ tel que pour tout $a \in E$:

$$ae = ea = a .$$

Proposition 1.1.1 Si une loi de composition sur un ensemble E a un élément neutre, alors cet élément neutre est unique.

Démonstration : Soient e, e' deux éléments neutres, alors :

$$e = ee' = e' .$$

q.e.d.

Exemples :

— L'élément neutre de l'addition sur l'ensemble des nombres entiers (rationnels, réels, complexes) est 0. — L'élément neutre de l'addition sur l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur nul (dont toutes les coordonnées sont 0).

— L'élément neutre de la multiplication sur l'ensemble des nombres entiers (rationnels, réels, complexes) est 1.

— Il n'y a pas d'élément neutre pour la loi du produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.

Notations : on note souvent 1 le neutre d'une loi de composition notée multiplicativement et 0 le neutre d'une loi de composition notée additivement.

Exemple : soit F un ensemble. On note F^F l'ensemble des applications de F dans F . Sur cet ensemble F^F on choisit la loi de composition des applications $(f, g) \mapsto f \circ g$. Pour cette loi, l'élément neutre est l'application $\text{Id}_F : F \rightarrow F, x \mapsto x$.

Exercice 1 Vérifier que le neutre pour la multiplication des matrices (à coefficients entiers, rationnels, réels ou complexes) $n \times n$ est la matrice :

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 3 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition (notée multiplicativement) qui a un élément neutre e . Un élément $x \in E$ est inversible s'il existe un élément $y \in E$ tel que :

$$xy = yx = e$$

et dans ce cas, on dit que y est un inverse de x . Un élément $x \in E$ est inversible à droite, respectivement inversible à gauche, s'il existe un élément $y \in E$ tel que $xy = e$, respectivement $yx = e$.

Exercice 2 Soit E un ensemble. Considérons la loi de composition des applications sur l'ensemble E^E . Soit une application $f : E \rightarrow E$. Vérifier les équivalences suivantes :

- l'application f est injective $\Leftrightarrow f$ est inversible à gauche ;
- l'application f est surjective $\Leftrightarrow f$ est inversible à droite ;
- l'application f est bijective $\Leftrightarrow f$ est inversible.

Si de plus E est fini, alors f est inversible à gauche $\Leftrightarrow f$ est inversible à droite $\Leftrightarrow f$ est inversible.

Proposition 1.1.2 Soit une loi de composition : $E \times E \rightarrow E$, $(a, b) \mapsto ab$ **associative** avec un élément neutre. Si un élément a est inversible, alors il a un unique inverse, que l'on note a^{-1} .

Notation : Si la loi est notée additivement, on note plutôt l'inverse de a par $-a$.

Exercice 3 Soit une loi de composition : $E \times E \rightarrow E$, $(a, b) \mapsto ab$ **associative** avec un élément neutre. Si un élément a a un inverse à gauche b , un inverse à droite c , alors a est inversible et $a^{-1} = b = c$ est l'inverse de a .

« L'inversion renverse la multiplication » :

Proposition 1.1.3 Soit une loi de composition : $E \times E \rightarrow E$, $(a, b) \mapsto ab$ **associative** avec un élément neutre. Si a, b sont des éléments inversibles, alors le produit ab est aussi inversible et :

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

Démonstration : On a : $(ab)b^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = 1 = b^{-1}a^{-1}ab$. q.e.d.

Remarque : pour une loi non commutative, on évite la notation $\frac{a}{b}$ car elle ne permet pas de distinguer ab^{-1} de $b^{-1}a$.

Notation : Si E est un ensemble muni d'une loi associative, on note $a^n := \underbrace{a \dots a}_{n \text{ fois}}$ pour tout n entier > 0 . S'il existe un élément neutre e , on pose $a^0 := e$. Si de plus, l'élément a est inversible, on note $a^{-n} := (a^{-1})^n$. On vérifie alors que $a^{r+s} = a^r a^s$ et $(a^r)^s = a^{rs}$ pour tous entiers $r, s \in \mathbb{Z}$.

1.2 Groupes

Définition 4 *Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition **associative** qui a un élément neutre et dont tous les éléments sont inversibles. Si de plus la loi de composition est commutative, on dit que le groupe est abélien .*

Remarque : on note souvent avec la même lettre le groupe et l'ensemble de ses éléments.

Exemples :

$(\mathbb{Z}, +)$ l'ensemble des nombres entiers muni de l'addition

$(\mathbb{Q}, +)$, l'ensemble des nombres rationnels muni de l'addition

$\mathbb{Q}^\times$, l'ensemble des nombres rationnels NON NULS muni de la multiplication

$(\mathbb{R}, +)$, l'ensemble des nombres réels muni de l'addition

$\mathbb{R}^\times$, l'ensemble des nombres réels NON NULS muni de la multiplication

$(\mathbb{C}, +)$, l'ensemble des nombres complexes muni de l'addition

$\mathbb{C}^\times$, l'ensemble des nombres complexes NON NULS muni de la multiplication

sont des exemples de groupes abéliens.

En revanche, $\mathbb{N}$ n'est pas un groupe pour l'addition.

Le groupe trivial est le singleton $\{0\}$ avec la loi évidente. Notons P l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs. On munit l'ensemble $\{P, I\}$ de la loi suivante :

+	P	I
P	P	I
I	I	P

i.e. : $P + P := P, P + I := I$, etc.

On obtient ainsi un groupe abélien à deux éléments. C'est le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Un exemple non commutatif : Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note s_α la réflexion orthogonale par rapport à la droite du plan qui passe par 0 et qui fait un angle α avec l'axe des abscisses et on note r_α la rotation de centre 0 et d'angle α . Alors l'ensemble :

$$O_2 := \{s_\alpha, r_\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

muni de la loi de composition des applications est un groupe non abélien. En effet, $r_\beta s_\alpha = s_{\alpha+\beta/2}$ et $s_\alpha r_\beta = s_{\alpha-\beta/2}$.

Exercice 4 *L'ensemble des applications affines non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, est un groupe non abélien pour la loi de composition des applications.*

Proposition 1.2.1 (Loi de simplification) *Soient a, b, c trois éléments d'un groupe G . Si $ab = ac$, alors $b = c$. Si $ba = ca$, alors $b = c$.*

Démonstration : Il suffit de multiplier à gauche ou à droite par a^{-1} . q.e.d.

Exercice 5 *Si E est un ensemble, l'ensemble des applications bijectives de E dans E muni de la loi de composition des applications est un groupe.*

Définition 5 (Groupe symétrique) *On appelle groupe symétrique d'indice n le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On le note S_n . Ses éléments sont aussi appelés les permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.*

Exercice 6 *Vérifier que S_n est un groupe fini ayant $n!$ éléments.*

Si G est un groupe fini, on appelle *ordre* son cardinal.

Exemples : — Si $n = 2$, on note e l'identité de $\{1, 2\}$ et τ l'application $\tau : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1$. On a :

$$S_2 = \{e, \tau\}, \tau^2 = e.$$

— Si $n = 3$, on note e l'identité de $\{1, 2, 3\}$, s_1 la permutation $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$, s_2 la permutation $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 2$. On a :

$$s_1 s_2 \neq s_2 s_1$$

(S_3 est le plus petit groupe non abélien)

$$s_1^2 = s_2^2 = e, (s_1 s_2)^3 = e, s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$$

$$S_3 = \{e, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1\} .$$

— Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note $\det A := ad - bc$. L'ensemble G des matrices

A 2×2 complexes de déterminant $\det A \neq 0$, muni de la loi de multiplication des matrices est un groupe.

En effet, si A, B sont des matrices 2×2 complexes telles que $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, alors $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$. Donc le produit des matrices est bien une loi de composition sur G . Cette loi est associative car la multiplication des matrices l'est. L'élément I_2 est l'élément neutre. Et enfin toute matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$$

est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} .$$

Ce groupe est noté $GL_2(\mathbb{C})$. Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, on obtient aussi un groupe noté $GL_2(\mathbb{R})$.

1.3 Sous-groupes

Définition 6 Soit G un groupe. Une partie H de G est un sous-groupe si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- i) $1 \in H$;
- ii) H est stable par multiplication ;
- iii) H est stable par passage à l'inverse.

Remarque : Si H est un sous-groupe de G , alors la loi de composition de G induit une loi de composition sur H (exo) et pour cette loi, H est un groupe. En particulier, pour montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition est un groupe il suffit de montrer que c'est un sous-groupe (ce qui évite d'avoir à vérifier la propriété d'associativité par exemple).

Exemples :

- Un groupe G , de neutre e , a toujours comme sous-groupe G et $\{e\}$;
- Si k est un entier, l'ensemble des multiples de k , noté $k\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$;

- l'ensemble des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$;
- l'ensemble μ_n des racines complexes n -ièmes de l'unité est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$;
- l'ensemble des rotations du plan de centre 0 est un sous-groupe du groupe O_2 ;
- l'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a, b, d \in \mathbb{C}$, $a, d \neq 0$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$;
- l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$;
- Soient

$$I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

l'ensemble $\{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ d'ordre 8 noté Q_8 .

Notation : $H \leq G$ signifie « H est un sous-groupe de G ».

Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Proposition 1.3.1 *Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ (pour l'addition). Alors, $H = k\mathbb{Z}$ pour un unique entier $k \geq 0$.*

Démonstration : Soit k le plus petit entier > 0 appartenant à H . il suffit de faire une division euclidienne! q.e.d.

Soient a, b des entiers non tous deux nuls. L'ensemble :

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} := \{ar + bs : r, s \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe non nul de $\mathbb{Z}$. Soit d l'unique entier > 0 tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. On dit que d est le *pgcd* de a, b .

1.4 Groupes cycliques

1.4.1 Les groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Soit n un entier. On pose $\bar{x} := x + n\mathbb{Z} := \{x + nr : r \in \mathbb{Z}\}$ pour tout entier x . On appelle classes modulo n ces ensembles $\bar{x}$.

Par exemple, si $n = 2$ alors $\bar{0}$ est l'ensemble des nombres pairs et $\bar{1}$ est l'ensemble des nombres impairs.

Proposition 1.4.1 *Pour deux entiers x, y , on a l'équivalence :*

$$x + n\mathbb{Z} = y + n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \mid x - y .$$

Notation : pour tous entiers x, y , si $x + n\mathbb{Z} = y + n\mathbb{Z}$, on note :

$$x = y \bmod n .$$

Bien entendu, on a pour tous entiers x, y, z :

$$x = x \bmod n$$

$$x = y \bmod n \Rightarrow y = x \bmod n ,$$

$$x = y \bmod n \text{ et } y = z \bmod n \Rightarrow x = z \bmod n$$

On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des $x + n\mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$. C'est l'ensemble des classes modulo n .

Proposition 1.4.2 *Il y a exactement n classes modulo n ; ce sont :*

$$\bar{0}, \dots, \overline{n-1} .$$

Démonstration : Soit x un entier. Alors $\bar{x} = \bar{r}$ où r est le reste de la division euclidienne de x par n . q.e.d.

On définit une addition sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par :

$$(x + n\mathbb{Z}) + (y + n\mathbb{Z}) := (x + y) + n\mathbb{Z} .$$

Cette addition est bien définie. En effet, on a :

Proposition 1.4.3 *Si $x = x' \bmod n$ et $y = y' \bmod n$, alors $x + y = x' + y' \bmod n$.*

Exemple : voici la table d'addition du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

.

Remarque : on peut aussi définir une multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Soit G un groupe de neutre 1. Si $x \in G$, on note :

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &:= \{ \dots x^{-2}, x, {}^{-1}1, x, x^2, \dots \} \\ &= \{ x^m : m \in \mathbb{Z} \} .\end{aligned}$$

C'est le plus petit sous-groupe de G contenant x (*exo*) . On appelle ce sous-groupe le sous-groupe engendré par x .

Lemme 1.4.4 *Soit G un groupe de neutre 1. Si $x \in G$, alors l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $x^n = 1$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.*

Proposition 1.4.5 *Soit G un groupe de neutre 1. Si $x \in G$, alors :*

— *soit le sous-groupe engendré par x est infini et dans ce cas les x^k sont deux à deux distincts, $k \in \mathbb{Z}$;*

— *soit le sous-groupe engendré par x est d'ordre fini m . Dans ce cas, m est le plus petit entier > 0 tel que $x^m = 1$, les éléments $1, \dots, x^{m-1}$ sont deux à deux distincts et $\langle x \rangle = \{1, \dots, x^{m-1}\}$.*

Définition 7 *Un groupe fini G d'ordre n de la forme $G = \langle x \rangle$ est appelé un groupe cyclique d'ordre n . On dit que x engendre G . Un élément x dans un groupe tel que $\langle x \rangle$ est fini d'ordre n est appelé un élément d'ordre n .*

Exemples : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est d'ordre 6 dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$.

En effet, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = -I_2$, $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$, $A^6 = I_2$.

En revanche, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est d'ordre infini car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut montrer que si A est une matrice à coefficients entiers d'ordre fini n , alors $n = 1, 2, 3$ ou 6 .

Exercice 7 *Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique d'ordre n , engendré par $\bar{k}$ pour tout entier k premier à n .*

Exercice 8 Le groupe μ_n est cyclique d'ordre n , engendré par $e^{2ik\pi/n}$ pour tout entier k premier n .

Plus généralement, si G est un groupe, on peut parler du sous-groupe de G engendré par une partie X de G . On le note $\langle X \rangle$. C'est le sous-groupe formé par les produits d'une chaîne finie d'éléments de X et d'inverses d'éléments de X .

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fini, on note $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ le groupe engendré par X . On dit aussi que $x_1, \dots, x_n$ engendrent $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Dans ce cas, on a :

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \{x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k} : k \geq 0, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n, \epsilon_1, \dots, \epsilon_k = \pm 1\}.$$

Exemples : le groupe S_3 est engendré par s_1, s_2 , le groupe Q_8 est engendré par I, J .

Exercice 9 Tout sous-groupe de $\mathbb{Q}$ de type fini (c-à-d qui peut être engendré par un nombre fini d'éléments) est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r \in \mathbb{Q}$.

1.5 Morphismes de groupes

Définition 8 Soient G, G' deux groupes. Une application $\phi : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes si :

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

pour tous $a, b \in G$.

Exemples :

- l'application $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ pour un entier n ,
 - l'exponentielle $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \mathbb{R}^\times, x \mapsto \exp x$,
 - le logarithme $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln |x|$,
 - le déterminant : $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$,
 - l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times, x \mapsto \cos x + i \sin x$,
 - l'application $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow G, n \mapsto x^n$, pour un groupe G et un élément fixé x de G ,
 - l'inclusion $H \rightarrow G, x \mapsto x$ pour un sous-groupe H d'un groupe G
- sont des morphismes de groupes.

Proposition 1.5.1 Si $\phi : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes, alors $\phi(1_G) = 1_{G'}$.

Définition 9 (noyau et image) Soit $\phi : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. On note

$$\text{Im } \phi := \{y \in G' : \exists x \in G, y = \phi(x)\}$$

c'est un sous-groupe de G' (exo), c'est l'image de ϕ .

On note

$$\ker \phi := \{x \in G : \phi(x) = 1\} = \phi^{-1}\{1\}$$

c'est un sous-groupe de G , appelé noyau de ϕ .

Remarque : plus généralement, si H' est un sous-groupe de G' , alors $\phi^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G .

Exemples :

— le noyau de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $x \mapsto \cos x + i \sin x$ est $2\pi\mathbb{Z}$ et son image est le sous-groupe des nombres complexes de module 1 ;

— le noyau de $\det : \text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est le groupe spécial linéaire d'indice 2, noté $\text{SL}_2(\mathbb{C})$;

— le noyau de $\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times$, $x \mapsto x^2$ est $\{\pm 1\}$ et son image est le sous-groupe des nombres réels strictement positifs ;

— si n est un entier > 1 , le noyau du morphisme $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto z^n$ est le sous-groupe des racine n -ièmes de l'unité μ_n .

Remarque : un morphisme de groupes est injectif $\Leftrightarrow$ son noyau est trivial.

1.5.1 Sous-groupes distingués

Le noyau d'un morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow G'$ possède une propriété remarquable :

$$\forall x \in \ker \phi, \forall g \in G, gxg^{-1} \in \ker \phi .$$

Définition 10 Si H est un sous-groupe de G , on dit que H est distingué dans G si pour tout $g \in G$, tout $h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

Le noyau d'un morphisme est toujours distingué.

Exemples : — Dans un groupe abélien, tous les sous-groupes sont distingués ;

— le sous-groupe des rotations est distingué dans O_2 ;

— le sous-groupe $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ est distingué dans $\text{GL}_2(\mathbb{C})$;

— le sous-groupe des matrices diagonales n'est pas distingué dans $\text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 10 Soit D_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que D_n est fini d'ordre $2n$ et qu'il contient un sous-groupe cyclique distingué d'ordre n . C'est le groupe diédral d'ordre $2n$.

Définition 11 Si G est un groupe, on note :

$$Z(G) := \{x \in G : \forall g \in G, gx = xg\}.$$

C'est un sous-groupe de G appelé le centre de G .

Remarque : le centre de G est distingué dans G .

Exemple : le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est formé des matrices $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}$.

1.5.2 Isomorphismes

Soit U l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C}$. On vérifie facilement que U est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

De plus, pour tous $x, y \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc multiplier de telles matrices revient à faire des additions dans $\mathbb{C}$. Plus précisément, l'application bijective :

$$\mathbb{C} \rightarrow U, x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un morphisme de groupes.

Si ϕ est un morphisme de groupes bijectif alors l'application réciproque ϕ^{-1} est aussi un morphisme de groupes.

Définition 12 Un isomorphisme entre deux groupes G et G' est un morphisme bijectif entre G et G' . S'il existe un isomorphisme de groupes $\phi : G \rightarrow G'$, on dit que G est isomorphe à G' ce qui se note : $G \simeq G'$. Si $G = G'$ et si $\phi : G \rightarrow G$ est un isomorphisme, on dit que ϕ est un automorphisme.

Exercice 11

$$(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \times)$$

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \simeq \mu_n$$

Proposition 1.5.2 *Tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Démonstration : Soit G un groupe cyclique d'ordre n engendré par un élément x . Alors, l'application :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad k + n\mathbb{Z} \mapsto x^k$$

est bien définie et c'est un isomorphisme de groupes.

q.e.d.

Exercice 12 *Montrer que l'ensemble des matrices 2×2 réelles inversibles de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathbb{C}^\times$.*

Montrer l'ensemble des matrices 2×2 réelles de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$,

$\theta \in \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ isomorphe à S^1 le groupe des nombres complexes de module 1.

Exemples : l'application $\bar{0} \mapsto \bar{0}$, $\bar{1} \mapsto \bar{2}$, $\bar{2} \mapsto \bar{1}$ est un automorphisme de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

— l'application $A \mapsto {}^t A^{-1}$ est un automorphisme de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$;

— si G est un groupe et si $g \in G$ est un élément fixé, l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ est un automorphisme de G . Un tel automorphisme est appelé un *automorphisme intérieur*.

1.6 Classes à gauche et à droite

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G .

Définition 13 *Une classe à gauche est une partie de G de la forme :*

$$gH := \{gh : h \in H\}$$

pour un certain $g \in G$.

Par exemple le sous-groupe H lui-même est une classe à gauche : celle de 1 (et plus généralement celle de h pour tout $h \in H$).

Proposition 1.6.1 *Si $x, y \in G$, alors $xH = yH \Leftrightarrow y^{-1}x \in H \Leftrightarrow x \in yH \Leftrightarrow y \in xH \Leftrightarrow xH \cap yH \neq \emptyset$.*

Corollaire 1.6.1.1 *Les classes à gauche forment une partition de G .*

Notation : on note G/H l'ensemble des classes à gauche gH , $g \in G$.

Le nombre de classes à gauche, s'il est fini, est appelé *l'indice* de H dans G et noté $[G : H]$.

Remarque : on peut définir aussi des classes à droite. L'application $gH \mapsto Hg$ est une bijection entre l'ensemble des classes à gauche et l'ensemble des classes à droite.

Proposition 1.6.2 *Le sous-groupe H est distingué si et seulement si $gH = Hg$ pour tous $g \in G$.*

Remarque : si $g \in G$ est fixé, alors l'application $H \rightarrow gH$, $h \mapsto gh$ est bijective ; donc si H est fini, toutes les classes à gauche ont $|H|$ éléments.

Corollaire 1.6.2.1 (théorème de Lagrange) *Si G est un groupe fini et si H est un sous-groupe de G , alors $|H|$ divise $|G|$.*

Démonstration : $|G| = |H|[G : H]$. q.e.d.

Conséquence : l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe (dans un groupe fini G). En particulier, si G est un groupe fini, $x^{|G|} = 1$ pour tout $x \in G$.

Exemple : dans S_3 tous les éléments ont un ordre qui divise 6 (en fait, 1, 2 et 3 sont les seules possibilités).

Exercice 13 *Soit p un nombre premier. Si G est un groupe d'ordre p , alors G est cyclique et tout $1 \neq g \in G$ engendre G .*

Proposition 1.6.3 *Si G est cyclique d'ordre n , alors pour tout $d|n$ il existe un unique sous-groupe de G d'ordre d et ce sous-groupe est cyclique. De plus tout sous-groupe de G est cyclique.*

Exercice 14 *Les seuls sous-groupes finis de $\mathbb{C}^\times$ sont les groupes de racines de l'unité μ_n , $n > 0$.*

1.7 Le groupe symétrique

L'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe appelé *groupe symétrique* d'indice n et noté S_n .

Proposition 1.7.1 *Si G est un groupe fini, alors G est isomorphe à un sous-groupe de S_n pour un n assez grand.*

Démonstration : Soit $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un groupe fini d'ordre n . Soit $g \in G$. Pour tout i , il existe un unique entier $1 \leq k \leq n$ tel que $g_k = gg_i$; on pose $\sigma_g(i) := k$. Alors $\sigma_g \in S_n$ et $G \rightarrow S_n, g \mapsto \sigma_g$ est un morphisme injectif de groupes. q.e.d.

Exemple : dans S_4 , la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est aussi notée $(2, 3)$.

Plus généralement si $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, sont des entiers deux à deux distincts, on note :

$$(i_1, \dots, i_k)$$

la permutation qui envoie i_1 sur i_2 , i_2 sur i_3 , ..., i_k sur i_1 et laisse fixe tous les entiers $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$.

On dit qu'une telle permutation est un *cycle de longueur k* ou un *k -cycle*.

Un cycle de longueur 1 est l'identité. Un cycle de longueur 2 est aussi appelé une *transposition*.

Exemple : dans S_3 , il y a 3 transpositions : $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$ et 2 3-cycles : $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$.

Remarque : on a bien sûr : $(1, 2, 3) = (2, 3, 1) = (3, 1, 2)$.

Exercice 15 *Vérifier que dans S_n , le cycle $(i_1, \dots, i_k)$ est un élément d'ordre k .*

Remarque : pour tout $\sigma \in S_n$, on a :

$$\sigma(i_1, \dots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)) .$$

1.7.1 Décomposition en cycles

Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. Le *support* de σ est l'ensemble des $1 \leq x \leq n$ tel que $\sigma(x) \neq x$.

Exercice 16 *Vérifier que si $\sigma, \tau \in S_n$ sont des permutations à supports disjoints, alors $\sigma\tau = \tau\sigma$.*

Proposition 1.7.2 *Toute permutation se décompose en un produit de cycles à supports disjoints. Cette décomposition est unique à permutation près de l'ordre des cycles.*

Exemple : soit $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\sigma = (1, 5)(2, 4)$.

Démonstration : Soit $\sigma \in S_n$. Si $1 \leq k \leq n$, on pose :

$$\mathcal{O}_k := \{\sigma^l(k) : l \in \mathbb{Z}\} .$$

Comme $\{1, \dots, n\}$ est fini, $\mathcal{O}_k = \{k, \dots, \sigma^{l-1}(k)\}$ où l est le plus petit entier > 0 tel que $\sigma^l(k) = k$. On a aussi $l = |\mathcal{O}_k|$.

Si $1 \leq k, k' \leq n$, alors $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_{k'}$ ou $\mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}_{k'} = \emptyset$. Les ensembles $\mathcal{O}_k$ forment donc une partition de $\{1, \dots, n\}$. Soient $k_1, \dots, k_r$ des entiers tels que les ensembles $\mathcal{O}_{k_i}$ soient deux à deux distincts et tels que :

$$\{1, \dots, n\} = \mathcal{O}_{k_1} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{k_r} .$$

Posons $n_i := |\mathcal{O}_{k_i}|$ pour tout i . Alors :

$$\mathcal{O}_{k_i} = \{k_i, \sigma(k_i), \dots, \sigma^{n_i-1}(k_i)\}$$

et :

$$\sigma = (k_1, \sigma(k_1), \dots, \sigma^{n_1-1}(k_1)) \dots (k_r, \sigma(k_r), \dots, \sigma^{n_r-1}(k_r))$$

q.e.d.

Corollaire 1.7.2.1 *L'ensemble des transpositions engendre S_n .*

Démonstration : Il suffit de remarquer qu'un cycle est un produit de transpositions :

$$(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{k-1}, i_k) .$$

q.e.d.

Remarque : par exemple : $(1, 2, 3) = (1, 2)(2, 3) = (2, 3)(1, 2)(2, 3)(1, 2)$. La décomposition en produit de transpositions n'est pas unique, ni le nombre de transpositions mais la parité du nombre de transpositions est unique (cf. plus loin ...). Autre exemple : $(1, 3) = (1, 2)(2, 3)(1, 2)$.

Corollaire 1.7.2.2 *Les transpositions $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$, engendrent S_n .*

Démonstration : Il suffit de vérifier qu'une transposition quelconque est un produit de transpositions de la forme $(i, i+1)$. Or, si $1 \leq i < j \leq n$, on a :

$$(i, j) = s_i s_{i+1} \dots s_{j-2} s_{j-1} s_{j-2} \dots s_{i+1} s_i$$

où pour tout $1 \leq k \leq n-1$, s_k est la transposition $(k, k+1)$. q.e.d.

Exercice 17 Les transpositions $(1, i)$, $2 \leq i \leq n$ engendrent S_n .

1.7.2 Signature

Soit $\sigma \in S_n$. Une *inversion* de σ est une paire $\{i, j\}$ telle que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

« Le nombre d'inversions de σ est le nombre de fois où, dans la liste $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$, un entier plus grand apparaît à gauche d'un plus petit. »

EXEMPLE : Voici les inversions et les signatures des 6 permutations $\sigma \in \mathcal{S}_3$:

σ	$\frac{I(\sigma)}{\#I(\sigma)}$	$\epsilon(\sigma)$
$\text{Id} : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$	$\emptyset$ 0	1
$s_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$	$\{\{1,2\}\}$ 1	-1
$s_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$	$\{\{2,3\}\}$ 1	-1
$s_1 s_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$	$\{\{2,3\}, \{1,3\}\}$ 2	1
$s_2 s_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$	$\{\{1,2\}, \{1,3\}\}$ 2	1
$s_1 s_2 s_1$ ($= s_2 s_1 s_2$) : $\begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$	$\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ 3	-1

Le nombre d'inversions d'une permutation est aussi le nombre de « croisements » dans le diagramme qui la représente.

Exemple : les inversions de la transposition (r, s) , $r < s$, sont les paires :

$$\{r, r+1\}, \dots, \{r, s-1\}, \{r, s\}, \{r+1, s\}, \dots, \{s-1, s\}$$

ce qui fait $2(s-r) - 1$ inversions.

Définition 14 Si σ est une permutation avec un nombre pair (respectivement impair) d'inversions, on dit que c'est une permutation paire (respectivement impaire). On définit $\epsilon(\sigma) := (-1)^{\text{nombre d'inversions de } \sigma}$; c'est la signature de σ .

Exemple : les transpositions sont de signature -1 .

Lemme 1.7.3 Soit $\sigma \in S_n$ et soit τ une transposition. Alors $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\tau\sigma) = -\epsilon(\sigma)$.

Démonstration du lemme :

Soient $I(\sigma)$ l'ensemble des inversions de σ . On a une bijection :

$$(I(\sigma\tau) \setminus I(\sigma)) \cup (I(\sigma) \setminus I(\sigma\tau)) \xleftrightarrow{1:1} I(\sigma\tau\sigma^{-1})$$

$$\{i, j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

(exo) .

Or, $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est une transposition : c'est la transposition qui échange $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$. Donc $|I(\sigma\tau\sigma^{-1})|$ est impair. Or :

$$|I(\sigma)| = |I(\sigma) \cap I(\sigma\tau)| + |I(\sigma) \setminus I(\sigma\tau)|$$

$$|I(\sigma\tau)| = |I(\sigma) \cap I(\sigma\tau)| + |I(\sigma\tau) \setminus I(\sigma)|$$

$$\Rightarrow |I(\sigma)| + |I(\sigma\tau)| = 2|I(\sigma) \cap I(\sigma\tau)| + |I(\sigma) \setminus I(\sigma\tau)| + |I(\sigma\tau) \setminus I(\sigma)|$$

$$\Rightarrow |I(\sigma)| + |I(\sigma\tau)| = 2|I(\sigma) \cap I(\sigma\tau)| + |I(\sigma\tau\sigma^{-1})|$$

et $|I(\sigma)| + |I(\sigma\tau)|$ est impair. Donc $\epsilon(\sigma) = -\epsilon(\sigma\tau)$.

q.e.d.

Exercice 18 On note s_i la transposition $(i, i+1)$. Redémontrer le lemme en montrant que si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, alors :

$$I(\sigma s_i) = \{\{s_i(k), s_i(l)\} : \{k, l\} \in I(\sigma)\} \cup \{i, i+1\} .$$

En particulier si σ est un produit de p transpositions, $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$. On en déduit donc qu'un k -cycle a pour signature $(-1)^{k-1}$.

Proposition 1.7.4 *La signature $\epsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes.*

Définition 15 *L'ensemble des permutations paires est le noyau de la signature. C'est donc un sous-groupe distingué de S_n . On le note A_n : c'est le groupe alterné d'indice n .*

Notation : $A_n := \ker \epsilon$.

Exemple : le groupe A_3 a trois éléments : $1, (1, 2, 3), (1, 3, 2)$.

Exercice 19 *Si $n \geq 3$, le groupe A_n est engendré par les 3-cycles $(1, 2, i)$, $3 \leq i \leq n$.*

Comme ϵ est un morphisme, on en déduit que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$ pour toute permutation σ .

En fait on a même plus :

Exercice 20 *Vérifier qu'il y a une bijection entre $I(\sigma)$ et $I(\sigma^{-1})$.*

Proposition 1.7.5 *La signature est le seul morphisme non trivial de S_n vers $\mathbb{C}^\times$.*

Démonstration : Une transposition est d'ordre 2 et donc son image par un morphisme dans $\mathbb{C}^\times$ est ± 1 . De plus, toutes les transpositions sont conjuguées[†] et engendrent S_n . q.e.d.

[†]. On dit que deux éléments x et y d'un groupe G sont *conjugués* s'il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$.

Chapitre 2

Rappels sur les matrices

Définition 16 Une matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un « tableau » de nombres $\in \mathbb{K}$ à m lignes et n colonnes. Notation : $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Notation : On note $a_{i,j}$ le coefficient de la ligne i et de la colonne j .

EXEMPLE : *Triangles de Pascal*. Voici 3 exemples de matrices de taille $n+1 \times n+1$:

$$T_- := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & n & \dots & & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

$$T_+ := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\ \vdots & & 1 & 3 & 6 & & \vdots \\ & & & 1 & 4 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & n+1 \\ 1 & 3 & 6 & & & & \\ 1 & 4 & & \ddots & & & \\ 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & n+1 & & & & & \binom{2n}{n} \end{pmatrix} = \left(\binom{i+j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$$

2.0.3 Opérations

— On peut additionner deux matrices de même taille (addition terme à terme);

— On peut multiplier une matrice par un scalaire λ (tous les coefficients sont multipliés par λ);

— On peut multiplier une matrice A de taille $m \times n$ par une matrice B de taille $n \times p$ pour obtenir une matrice $C = AB$ de taille $m \times p$:

$$c_{i,j} := \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

« le coefficient (i, j) de la matrice AB est le produit scalaire de la ligne i de A par la colonne j de B . ».

Exercice 21 — *matrices de rotations* :

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

— *nombre complexes*

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z' & -\operatorname{Im} z' \\ \operatorname{Im} z' & \operatorname{Re} z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(zz') & -\operatorname{Im}(zz') \\ \operatorname{Im}(zz') & \operatorname{Re}(zz') \end{pmatrix}$$

— matrices de Pascal

$$T_- T^+ = P$$

indication : $P_{i,j}$ est le coefficient de degré j du polynôme $(1+X)^{i+j}$. Or, $(1+X)^{i+j} = (1+X)^i(1+X)^j$; exprimer le polynôme $(1+X)^i$ (respectivement $(1+X)^j$) en fonction des coefficients de T_- (respectivement T^+).

Proposition 2.0.6 (Associativité) Soient A une matrice de taille $m \times n$, B une matrice de taille $n \times p$ et C une matrice de taille $p \times q$. Alors on a l'égalité de matrices $m \times q$:

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration : Notons $u_{i,j}$ les coefficients du membre de gauche et $v_{i,j}$ ceux du membre de droite. Alors :

$$u_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j} = v_{i,j} .$$

q.e.d.

2.1 Matrices carrées

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \dots & (i < j) \\ & \vdots & (i = j) & \vdots \\ (i > j) & & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

— Propriétés de $\mathbb{K}$ -algèbre :
distributivité

$$A(B+C) = AB+AC, (A+B)C = AB+BC,$$

$$\forall t \in \mathbb{K}, t(A)B = A(tB) = t(AB)$$

— Propriétés « négatives » :
non commutativité :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

existence d'éléments nilpotents non nuls :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

— Effet de la multiplication à gauche ou à droite par une matrice diagonale :

$$(2.1) \quad \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & \dots & d_1 a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_n a_{n,1} & & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & \dots & d_n a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_1 a_{n,1} & & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Définition 17 La matrice identité, notée I_n :

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

« Des 1 sur la diagonale, des 0 en dehors ».

D'après 2.1 et 2.2,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = I_n A = A .$$

Définition 18 Matrices inversibles. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice, notée A^{-1} , telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n .$$

Notation : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque : $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication : c'est le groupe général linéaire.

Remarque : $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$ (non trivial!)

2.1.0.1 La transposée

Définition 19 ${}^t(A)_{i,j} := A_{j,i}$ « Les lignes de tA sont les colonnes de A (et vice versa) ».

Propriétés :

$${}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

2.2 Applications

2.2.1 La suite de Fibonacci

C'est la suite :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

$$f_0 := 0, f_1 := 1, \forall n \geq 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Problème : exprimer f_n en fonction de n .

Solution : On remarque que :

$$\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\forall n \geq 0, \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que :

$$\forall n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer A^n , on introduit :

$$\delta := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \bar{\delta} := \frac{1-\sqrt{5}}{2}, P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & \bar{\delta} \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\bar{\delta} & 1 \\ \delta & -1 \end{pmatrix}$$

(« pourquoi ? patience ! »)

et on remarque que :

$$A = PDP^{-1}$$

où $D := \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \bar{\delta} \end{pmatrix}$.

On trouve donc :

$$\forall n \geq 0, A^n = PD^nP^{-1}$$

$$\forall n \geq 0, A^n = P \begin{pmatrix} \delta^n & 0 \\ 0 & \bar{\delta}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc :

$$\forall n \geq 0, f_n = A_{1,2}^n = \frac{\delta^n - \bar{\delta}^n}{\sqrt{5}}.$$

Remarque : Les nombres $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ et $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$ sont les *valeurs propres* de A (définition à venir ...).

2.2.2 Graphes

Un pilote voyage entre trois villes suivant le graphe suivant :

$$P \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{matrix} B \xrightarrow{\quad} M$$

1 2 3

Les flèches représentent les trajets possibles à chaque étape.

Question : En n étapes, combien y a-t-il de façons d'aller de i à j ?

Réponse : Notons $b_{i,j,n}$ le nombre cherché. On pose A la matrice d'incidence du graphe *i.e.*

$$a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{s'il y a une flèche de } i \text{ vers } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $b_{i,j,n} = A_{i,j}^n$. *Démonstration* : Par récurrence sur $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_{i,j,n} &= \sum_k b_{i,k,n-1} b_{k,j,1} = \sum_k A_{i,k}^{n-1} A_{k,j} \\ &= A_{i,j}^n . \end{aligned}$$

En particulier, si on sait calculer A^n (cf. suite du cours), on peut vérifier qu'un pilote qui part de P atterrira, au bout d'une infinité d'étapes, ρ^2 fois plus souvent à M qu'à B avec :

$$\rho^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{1,3}^n}{A_{1,2}^n} \approx 1,75 \dots$$

où ρ est l'unique racine réelle de $X^3 - X - 1$.

Ici encore, ρ est une *valeur propre* de A .

2.2.3 Équation différentielle

Problème : Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + k^2 y = 0$$

où $0 \neq k \in \mathbb{R}$.

Solution : On pose $Y := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

$$(E) \Leftrightarrow Y' = AY$$

où A est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

or, nous verrons plus loin que :

$$Y' = AY \Leftrightarrow Y(t) = e^{tA} Y(0)$$

où e^{tA} est une matrice définie de la même manière que l'exponentielle complexe.

Ici :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(kt) & \frac{\sin(kt)}{k} \\ -k \sin(kt) & \cos(kt) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\forall t, y(t) = y(0) \cos(kt) + \frac{y'(0)}{k} \sin(kt).$$

q.e.d.

2.3 Systèmes linéaires

Les matrices permettent d'écrire de façon condensée les systèmes d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ \dots & \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_n \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

où

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2.4 Rang d'une matrice

2.4.1 Rappels sur les espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel *c-à-d* :

E est un ensemble muni d'une addition $+$ et d'une multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ (appelés scalaires) telles que :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien *i.e.* :
 - $\forall x, y, z \in E, x + (y + z) = (x + y) + z$;
 - $\forall x, y \in E, x + y = y + x$;
 - $\exists 0 \in E, \forall x \in E, x + 0 = 0 + x = x$;

- $\forall x \in E, \exists (-x) \in E, x + (-x) = (-x) + x = 0$;
- 2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
- 3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
- 4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;
- 5. $\forall x \in E, 1x = x$.

Les éléments de E sont appelés des *vecteurs*.

EXEMPLE : [de base] $E = \mathbb{K}^n$ muni de l'addition :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et de la multiplication par les scalaires :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

pour tous $\lambda, x_1, \dots, y_1, \dots \in \mathbb{K}$.

Soient $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E .

Une *combinaison linéaire* des vecteurs $v_1, \dots, v_m$ est un vecteur de la forme :

$$t_1 v_1 + \dots + t_m v_m$$

où $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}$.

On dit que $v_1, \dots, v_m$ sont $\mathbb{K}$ -*linéairement indépendants* (ou *libres*) si :

$$\forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}, t_1 v_1 + \dots + t_m v_m = 0 \Rightarrow t_1 = \dots = t_m = 0$$

sinon, on dit qu'ils sont *liés*.

On dit que $v_1, \dots, v_m$ sont *générateurs* (de E) ou qu'ils engendrent E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_m$.

Si les vecteurs $v_1, \dots, v_m$ sont à la fois libres et générateurs on dit qu'ils forment une *base* de E .

EXEMPLE : La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la base formée des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.4.1 Soit $v_1, \dots, v_n$ une base de E .

i) Si $w_1, \dots, w_m$ engendrent E , alors $m \geq n$;

ii) Si $w_1, \dots, w_m$ sont libres, alors $m \leq n$;

Conséquence :

Définition 20 Deux bases de E ont le même cardinal. Ce cardinal commun est la dimension de E , notée $\dim E$.

Remarque : $\dim \mathbb{K}^n = n$. D'après la proposition $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont toujours liés.

Démonstration : i : supposons, quitte à diminuer m , que pour tout k ,

$$w_{k+1} \notin \langle w_1, \dots, w_k \rangle .$$

Il existe $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$w_1 = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n .$$

Soit $1 \leq i_1 \leq n$ tel que $t_{i_1} \neq 0$. Alors :

$$v_1, \dots, \cancel{v_{i_1}}, \dots, v_n, w_1$$

(« dans la liste $v_1, \dots, v_n$, on remplace v_{i_1} par w_1 ») est encore une base de E (*exo*) . On peut montrer plus généralement, par récurrence sur k que pour tout $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, il existe $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ deux à deux distincts tels que :

$$v_1, \dots, \cancel{v_{i_1}}, \dots, \cancel{v_{i_k}}, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k$$

est encore une base de E (où on a remplacé dans la liste $v_1, \dots, v_n$ les vecteurs $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ par les vecteurs $w_1, \dots, w_k$).

En particulier, si, par l'absurde, $m < n$, on obtient une base de E de la forme :

$$v_i, w_1, \dots, w_m, i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$$

ce qui est absurde car $\langle w_1, \dots, w_m \rangle$ engendre E .

Donc $m \geq n$.

ii : On raisonne de la même façon. Il existe $t_1, \dots, t_n$ tels que $w_1 = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$. Il existe i_1 tel que $t_{i_1} \neq 0$. Alors, $w_1, v_1, \dots, \cancel{v_{i_1}}, \dots, v_n$ forment une base de E . De même, par récurrence sur $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$, on peut montrer qu'il existe $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ deux à deux distincts tels que les vecteurs :

$$w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, \cancel{v_{i_1}}, \dots, \cancel{v_{i_k}}, \dots, v_n$$

forment une base de E . Si (*par l'absurde*), $m > n$, on peut prendre $k = n$:

$$w_1, \dots, w_n$$

forment une base de E . Mais cela est absurde car alors w_m ($m > n$) est une combinaison linéaire de $w_1, \dots, w_n$ ce qui contredit l'indépendance linéaire des w_j . q.e.d.

Définition 21 Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels est linéaire si :

$$i) \quad \forall u, \forall v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$ii) \quad \forall u \in E, \forall t \in \mathbb{K}, f(tu) = tf(u)$$

Définition 22 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une partie $F \subseteq E$ est un sous-espace de E si :

$$0 \in F, \quad \forall u, v \in F, \forall t \in \mathbb{K}, tu \in F \text{ et } u + v \in F$$

EXEMPLE : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Son noyau $\ker f := f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace de E et son image $\text{Im } f := \{y \in F : \exists x \in E, y = f(x)\}$ est un sous-espace de F .

Proposition 2.4.2 Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

Démonstration : Si $\ker f = 0$, si $f(u) = f(v)$, alors $f(u - v) = 0$ i.e. $u - v \in \ker f = 0$ donc $u - v = 0$ i.e. $u = v$. q.e.d.

Définition 23 Le rang d'une famille de vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans un espace vectoriel E est la dimension de $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On notera $\underline{A}$, ou simplement A , l'application linéaire associée :

$$\underline{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

où

$$\forall 1 \leq i \leq m, y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j .$$

Remarque : Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors :

$$A = B \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{K}^n, AX = BX .$$

Exercice 22 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\underline{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $\underline{B} : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ les applications linéaires associées. Alors $\underline{AB} = \underline{A} \circ \underline{B}$.

Définition 24 (image et noyau) Soit A une matrice $m \times n$. Son noyau est le sous-espace (exo) :

$$\ker A = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : AX = 0 \right\}$$

$$\operatorname{Im} A = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m : \exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, Y = AX \right\}$$

Remarque : La j -ième colonne de A est le vecteur Ae_j où : e_j est le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

avec un « 1 » en j -ième position et des « 0 » ailleurs.

En particulier, $\operatorname{Im} A$ est le sous-espace de $\mathbb{K}^m$ engendrée par les vecteurs colonnes de A .

2.4.2 Matrices échelonnées

Définition 25 Une matrice échelonnée est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1,j_1} & \dots & \\ 0 & \dots & & a_{2,j_2} & \dots \\ \vdots & & & & \\ & & & a_{r,j_r} & \dots \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

où $0 \leq r \leq n$, pour tout $1 \leq k \leq r$, a_{k,j_k} est le premier terme non nul de la ligne k et $j_1 < \dots < j_r$.

On appellera opération élémentaire sur les lignes une des opérations suivantes :

- ajouter à une ligne (i) une autre ligne (j) multipliée par un coefficient $t \in \mathbb{K}$;
- échanger deux lignes : i et j ;
- multiplier la ligne i par un coefficient non nul $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Remarque : Chaque opération élémentaire revient à multiplier à gauche par une matrice « simple » : respectivement :

- $T_{i,j}(t)$ « la matrice I_n à laquelle on a ajouté un t en position i, j »

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & t & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $\Sigma_{i,j}$ « la matrice obtenue à partir de I_n en permutant les colonnes i et j » :

$$\text{exemple : } \Sigma_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 1 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

— $D_i(\alpha)$ « la matrice obtenue à partir de I_n en remplaçant le i ème coefficient diagonal par α :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.4.3 *Chaque matrice peut être transformée en une matrice échelonnée par une suite finie d'opérations élémentaires.*

Démonstration : Par récurrence sur le nombre de lignes. Soit A une matrice $m \times n$. Soit j_1 la première colonne non nulle. Quitte à permuter la première ligne avec une autre, on peut supposer que $a_{1,j_1} \neq 0$. On note $L_1, \dots, L_m$ les lignes de A . On remplace alors, pour tout $k > 1$, la ligne L_k par $L_k - \frac{a_{k,j_1}}{a_{1,j_1}} L_1$. On obtient alors une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1,j_1} & \dots \\ \vdots & & 0 & \dots \\ & & \vdots & \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix}$$

et on termine par récurrence.

q.e.d.

Définition 26 *Le nombre r est le rang des lignes de la matrice.*

Proposition 2.4.4 *Le rang r est indépendant des transformations effectuées : r est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes $L_1, \dots, L_m$ de la matrice.*

Démonstration : En effet, une opération élémentaire ne change pas l'espace vectoriel $\langle L_1, \dots, L_m \rangle$ et les lignes non nulles d'une matrice échelonnée sont clairement indépendantes.

q.e.d.

On peut aussi définir le rang des colonnes de la matrice en utilisant des opérations élémentaires sur les colonnes. Ce rang est égal à la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de la matrice.

Proposition 2.4.5 *Si A est une matrice carrée de taille n , si A est de rang n , alors A est inversible.*

Démonstration : On applique des transformations élémentaires à A jusqu'à obtenir la matrice I_n . Si $r = n$, c'est possible. Si on applique les mêmes transformations à I_n on obtient A^{-1} . En effet, soit $E_1, \dots, E_N$ des matrices « élémentaires » telles que :

$$E_1 \dots E_N A = I_n$$

alors :

$$E_1 \dots E_N = A^{-1} .$$

q.e.d.

EXEMPLE : Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue les opérations suivantes :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{conclusion : } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, le même raisonnement montre qu'il existe $P \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$ tel que :

$$PA = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

(en particulier, dans ce cas $n \leq m$).

Si l'on multiplie à gauche par $\left(I_n \mid 0 \right)$, on trouve :

$$\left(I_n \mid 0 \right) PA = I_n .$$

On peut raisonner de même avec les colonnes. En résumé :

Théorème 2.4.6 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

i) Si le rang des lignes de A est n , alors $n \leq m$ et il existe $P \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$ tel que $PA = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$ et il existe $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$. On dit que A est inversible à gauche.

ii) Si le rang des colonnes de A est m , alors $m \leq n$ et il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $AQ = \left(I_m \mid 0 \right)$ et il existe $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_m$. On dit que A est inversible à droite.

2.4.3 Égalité entre le rang des lignes et le rang des colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On rappelle que le rang des lignes de A , notons-le $\text{rg}_L(A)$, est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes de A . On rappelle que rang des colonnes de A , notons-le $\text{rg}_C(A)$, est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A .

Alors :

Théorème 2.4.7

$$\begin{aligned} & \text{rg}_L(A) \\ &= \min \left\{ t \geq 1 : \exists B \in \mathcal{M}_{m,t}(\mathbb{K}), \exists C \in \mathcal{M}_{t,n}(\mathbb{K}), A = BC \right\} \\ &= \text{rg}_C(A) . \end{aligned}$$

On notera $\text{rg}(A)$ le rang de A (des lignes ou des colonnes).

En particulier, $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Démonstration :

Montrons par exemple la première égalité (la deuxième se montre de la même façon) :

Notons r_0 le minimum des t tels que $A = BC$ pour un certain $B \in \mathcal{M}_{m,t}(\mathbb{K})$ et un certain $C \in \mathcal{M}_{t,n}(\mathbb{K})$.

Soit $r := \text{rg}_L(A)$. Alors, il existe une base $l_1, \dots, l_r$ du sous-espace engendré par les lignes de A . En particulier, pour toute ligne L_i de A ,

$$* \quad L_i = b_{i,1}l_1 + \dots + b_{i,r}l_r$$

pour certains coefficients $b_{i,j} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$ la matrice des $b_{i,j}$ et soit $C \in \mathcal{M}_{r,n}$ la matrice dont les lignes sont $l_1, \dots, l_r$. La relation $*$ pour tout i , donne : $A = BC$. Donc, $r_0 \leq r$.

D'un autre côté, si $A = BC$ avec $B \in \mathcal{M}_{m,t}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{t,n}(\mathbb{K})$. alors pour tout $1 \leq i \leq m$, la ligne L_i de A vérifie :

$$L_i = B_{i,1}l_1 + \dots + B_{i,t}l_t$$

où $l_1, \dots, l_t$ sont les lignes de C . Donc le sous-espace engendré par les lignes de A est de dimension $\leq t$. Donc $r \leq t$. Et donc, $r \leq r_0$ si on prend $t = r_0$.

En résumé, le rang d'une matrice A est à la fois le rang des lignes de A , le rang de ses colonnes et la dimension de son image.

q.e.d.

On déduit de cette caractérisation du rang que :

$$\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg } A, \text{rg } B\}$$

pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 2.4.8 *Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang r , il existe $B \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ tels que $A = BC$. Dans ce cas, $\text{rg } B = r = \text{rg } C$. De plus, il existe $P \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$, $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que :*

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Démonstration : Si $A = BC$ avec $B \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$, alors $r = \text{rg } A \leq \text{rg } B \leq r$ donc $\text{rg } B = r$. De même, $\text{rg } C = r$. D'après le théorème 2.4.6, il existe donc $P \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$, $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$PB = \left(\begin{array}{c} I_r \\ 0 \end{array} \right), \quad CQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array} \right)$$

D'où :

$$PAQ = PBCQ = \left(\begin{array}{c} I_r \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

q.e.d.

Pour terminer voici un critère pratique pour calculer le rang d'une matrice :

Proposition 2.4.9 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que B est une matrice extraite de A si B est de la forme :

$$B = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$$

pour un certain $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ et un certain $J \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice B , extraite de A , carrée, inversible de taille r .

Exemple : la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible (*exo*) mais la matrice extraite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

l'est (*exo*) . Donc A est de rang 2.

Démonstration : Soit B une matrice extraite de A , carrée, inversible de taille r . Supposons pour simplifier que $B = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$. Alors, les r premières lignes de B sont linéairement indépendantes. A fortiori, les r premières lignes de A sont aussi linéairement indépendantes. Donc $\text{rg } A \geq r$. Supposons que A est de rang R . Alors il existe R lignes de A qui sont linéairement indépendantes, par exemple les R premières. La matrice

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq R \\ 1 \leq j \leq n}}$$

est donc de rang R . Elle admet donc au moins R colonnes indépendantes, par exemple les R premières. Alors la matrice extraite :

$$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq R}$$

est carrée, de taille R et inversible (car de rang R).

q.e.d.

2.4.4 Image et noyau d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est *injective* si ses colonnes sont indépendantes. On dit que A est *surjective* si ses lignes sont indépendantes.

Remarque : si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , alors :

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

notons :

$$\ker A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

c'est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$: c'est le *noyau* de A . Alors A est injective $\Leftrightarrow \ker A = 0$.

Notons

$$\operatorname{Im} A := \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

c'est le sous-espace de $\mathbb{K}^m$ engendré par les colonnes de A , on l'appelle *l'image* de A . Comme le rang des lignes est aussi le rang des colonnes, les lignes sont indépendantes *i.e.* A est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} A = m \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^m$.

Exercice 23 Soit $P \in \operatorname{GL}_m(\mathbb{K})$. Alors : $\ker(PA) = \ker A$.

Exercice 24 Si $A := \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1,j_1} & \dots \\ \vdots & & 0 & \dots \\ & & \vdots & \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée avec

$j_1 < \dots < j_r$ et $a_{i,j_i} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$, alors l'application linéaire :

$$\ker A \rightarrow \mathbb{K}^{n-r}, (x_j)_{1 \leq j \leq n} \mapsto (x_j)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq j_1, \dots, j_r}}$$

est un isomorphisme (cf. plus bas le rappel de la notion d'isomorphisme).

En particulier, $\ker A$ est de dimension $n - r$.

On déduit des deux exercices précédents le

Théorème 2.4.10 (du rang)

$$\dim \ker A + \operatorname{rg} A = n$$

(le nombre de colonnes).

Pour résumé, on a démontré les équivalences suivantes :

$$A \text{ injective} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow A \text{ inversible à gauche}$$

$$A \text{ surjective} \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m \Leftrightarrow A \text{ inversible à droite}$$

2.5 Lien avec les applications linéaires**2.5.1 Matrice associée à une application linéaire**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 27 *Un endomorphisme de E est une application linéaire $f : E \rightarrow E$. On note $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .*

Soit $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(E)$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E . Pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe $a_{1,j}, \dots, a_{n,j} \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{n,j}e_n$$

en fait, f est entièrement déterminé par ces coefficients : $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$:

$$\forall v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in E, f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j a_{i,j} e_i .$$

autrement dit, si $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est le vecteur « coordonnées de v dans la

base (e) » si $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est le vecteur « coordonnées de $f(v)$ dans la base

(e) » alors :

$$Y = AX$$

où A est la matrice $(a_{i,j})$.

On dit que la matrice $A := (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la *matrice de f dans la base $(e) := e_1, \dots, e_n$* .

Notation :

$$A := \text{Mat}(f)_{(e)} .$$

Exercice 25 Soient $f, f' : E \rightarrow E$ deux applications linéaires. Soit (e) une base de E , alors :

$$\text{Mat}(f \circ f')_{(e)} = \text{Mat}(f)_{(e)} \text{Mat}(f')_{(e)} .$$

EXEMPLE :

— matrices de rotations : soit $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de centre 0 et d'angle θ dans le plan. C'est une application linéaire. Dans la base usuelle e_1, e_2 de $\mathbb{R}^2$, la matrice de R_θ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

— matrices de la dérivation sur l'espace des polynômes de degré $\leq n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & & \vdots \\ & & & & n \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

respectivement dans la base $1, X, \dots, X^n$ et dans la base $1, X, \dots, \frac{X^n}{n!}$.

2.5.2 Théorème du rang

Théorème 2.5.1 Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On suppose que $f : E \rightarrow F$ est linéaire. Alors si E est de dimension finie :

$$\dim E = \dim \ker f + \text{rg } f$$

où $\text{rg } f$ est la dimension de l'image de f .

Démonstration : Soit $e_1, \dots, e_r$ une base de $\ker f$. On la complète en une base $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ de E . Alors $f(e_{r+1}), \dots, f(e_n)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ (exo). q.e.d.

Définition 28 *Un isomorphisme entre deux espaces vectoriels E et F est une application linéaire bijective $f : E \rightarrow F$, notation : $E \simeq F$.*

Corollaire 2.5.1.1 (Miracle de la dimension finie) *Si E est de dimension finie, si $f : E \rightarrow E$ est linéaire, alors f injectif $\Leftrightarrow f$ surjectif $\Leftrightarrow f$ isomorphisme.*

Remarque : ATTENTION : il faut le même espace au départ et à l'arrivée (ou au moins deux espaces de même dimension au départ et à l'arrivée).

Démonstration :

$$f \text{ injectif} \Rightarrow \ker f = 0$$

$$\Rightarrow \dim f(E) = \dim E$$

$$\Rightarrow f(E) = E$$

c-à-d f surjectif. Réciproque :

$$f \text{ surjectif} \Rightarrow f(E) = E$$

$$\Rightarrow \dim \ker f = 0$$

$$\Rightarrow \ker f = 0$$

i.e. f injectif. On utilise que si V est un sous-espace de U , alors V est de dimension finie $\leq \dim U$ avec égalité si et seulement si $V = U$. q.e.d.

Versions matricielles :

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors : $\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = n$.

On dira qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est injective si

$$\ker A = 0$$

i.e.

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, AX = 0 \Rightarrow X = 0$$

et que A est surjective si :

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^m$$

i.e.

$$\forall Y \in \mathbb{K}^m, \exists X \in \mathbb{K}^n, Y = AX .$$

Une matrice A est injective $\Leftrightarrow A$ est inversible à gauche *i.e.* :

$$\exists B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), BA = I_n .$$

En effet, si $BA = I_n$, alors, $AX = 0 \Rightarrow BAX = 0 \Rightarrow I_n X = X = 0$. Réciproquement, si A est injective, le rang de ses lignes est aussi le rang de ses colonnes *i.e.* la dimension de son image. D'après le théorème du rang, ce rang vaut n . Donc le sous-espace de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) (= \mathbb{K}^n)$ engendré par les lignes $L_1, \dots, L_m$ de A est de dimension n . Donc les lignes de A engendrent $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. En particulier, si on note $l_1, \dots, l_n$ les lignes de la matrice I_n (*i.e.* la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$), il existe, pour tout $1 \leq i \leq n$, des coefficients $b_{i,1}, \dots, b_{i,m} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$l_i = b_{i,1}L_1 + \dots + b_{i,m}L_m .$$

Autrement dit, si on note $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la matrice des $b_{i,j}$, on a :

$$BA = I_n .$$

On peut montrer de même (en raisonnant plutôt avec les colonnes) que A est surjective $\Leftrightarrow A$ est inversible à droite *i.e.* :

$$\exists B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), AB = I_m .$$

Supposons maintenant que $m = n$ et que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$$

Démonstration : $AB = I_n \Rightarrow A$ surjective $\Rightarrow A$ injective.

Or :

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, A(BAX) = (AB)(AX) = A(X) \Rightarrow BAX = X$$

donc $BA = I_n$.

q.e.d.

Théorème 2.5.2 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors,

$$A \text{ injective} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

$$A \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = m$$

en particulier si $m = n$, A injective $\Leftrightarrow A$ surjective $\Leftrightarrow A$ inversible.

Démonstration : Par exemple : $\text{rg } A = n \Rightarrow \dim \text{Im } A = n \Rightarrow \dim \ker A = 0$ et réciproquement si A est injective, alors A est inversible à gauche : il existe $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tel que : $BA = I_n$. Donc $n \geq \text{rg } A \geq \text{rg } BA = n$ et $\text{rg } A = n$.

q.e.d.

2.5.3 Changements de base

— **Interprétation de l'ensemble des bases au moyen des matrices inversibles.**

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de $\mathbb{K}^n$. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Les vecteurs :

$$e'_1 = Pe_1, \dots, e'_n = Pe_n$$

forment encore une base de $\mathbb{K}^n$. On obtient ainsi toutes les bases de $\mathbb{K}^n$.

En effet, soient (e') , (e) deux bases de $\mathbb{K}^n$ (ou de n'importe quel $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n). Pour tout j ,

$$e'_j = p_{1,j}e_1 + \dots + p_{n,j}e_n$$

pour certains $p_{i,j} \in \mathbb{K}$.

$$\text{Soit } v \in \mathbb{K}^n. \text{ Si on note } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ses coordonnées dans la base } (e), \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

ses coordonnées dans la base (e') , alors :

$$X = PX'$$

où $P := (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Démonstration :

$$v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \dots + x'_ne'_n$$

$$= \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{i,j}e_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j}x'_j \right) e_i$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, x_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j}x'_j$$

$$\Leftrightarrow X = PX'.$$

q.e.d.

Définition 29 (Matrice de passage) La matrice P est la matrice de passage de (e) à (e') ; notation :

$$P_{(e)}^{(e')}.$$

Exercice 26 P est inversible d'inverse la matrice de passage de (e') à (e) .

— **Formule de changement de base :**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ (ou de n'importe quel $\mathbb{K}$ —espace vectoriel de dimension n). Soit A la matrice de f dans la base (e) , soit A' la matrice de f dans la base (e') . Ces deux matrices sont reliées par :

$$A = PA'P^{-1}$$

Démonstration : Soit $v \in \mathbb{K}^n$. Soient X, X', Y, Y' respectivement les vecteurs (colonnes) coordonnées de v dans les bases (e) et (e') , de $f(v)$ dans les bases (e) et (e') .

Alors : $Y = AX$ et $Y' = AX'$ (*exo*). De plus :

$$X = PX', Y = PY'$$

$$\Rightarrow PY' = APX'$$

$$\Rightarrow Y' = P^{-1}APX' = A'X'$$

(pour tout $X' \in \mathbb{K}^n$). Donc $P^{-1}AP = A'$.

q.e.d.

Exercice 27

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Le déterminant

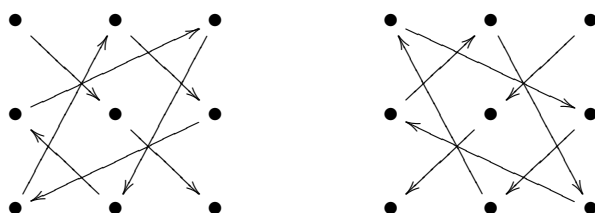
3.1 Dimension 2 et 3

Définition 30

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} := a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} := a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ - a_{2,1}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$$

Moyen mnémotechnique :



+

-

Interprétation géométrique (sur $\mathbb{R}$) : $\det(A)$ est une aire ou un volume « orienté ».

Exercice 28 — $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible ; — $\det(AB) = \det A \det B$

3.2 Déterminant en dimension quelconque

3.2.1 Arrangements

Un *arrangement* d'ordre n est une suite

$$\underline{k} := (k_1, \dots, k_n)$$

des n entiers $1, \dots, n$ dans un ordre quelconque. (Autrement dit une suite $(k_1, \dots, k_n)$ où chaque entier $1, \dots, n$ apparaît exactement une fois.

Exemples : les arrangements d'ordre 2 sont $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Les arrangements d'ordre 3 sont $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$. Plus généralement, il y a exactement $n!$ arrangements d'ordre n (n possibilité pour le premier terme, $n - 1$ pour le deuxième, *etc*).

Soit $\underline{k}$ un arrangement. Une *inversion* de $\underline{k}$ est une paire $\{k_i, k_j\}$ telle que $i < j$ et $k_i > k_j$ (« c'est quand un plus grand est à gauche d'un plus petit »).

On note $I(\underline{k})$ l'ensemble des inversions de $\underline{k}$.

On dit qu'un arrangement est *pair* s'il a un nombre pair d'inversions ; on dit qu'il est *impair* s'il a un nombre impair d'inversions. Pour tout arrangement $\underline{k}$ on pose :

$$\epsilon(\underline{k}) := 1 \text{ si } \underline{k} \text{ est un arrangement pair}$$

$$-1 \text{ si } \underline{k} \text{ est un arrangement impair}$$

Exemple : voici les inversions et les signatures des 6 arrangements d'ordre 3 :

σ	$\frac{I(\sigma)}{\#I(\sigma)}$	$\epsilon(\sigma)$
$(1, 2, 3)$	$\emptyset$ 0	1
$(2, 1, 3)$	$\{\{1, 2\}\}$ 1	-1
$(1, 3, 2)$	$\{\{2, 3\}\}$ 1	-1
$(2, 3, 1)$	$\{\{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ 2	1
$(3, 1, 2)$	$\{\{3, 1\}, \{3, 2\}\}$ 2	1
$(3, 2, 1)$	$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ 3	-1

3.2.2 Définitions du déterminant

Définition 31 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice. On note :

$$\det A := |A| := \sum_{\sigma \text{ arrangement d'ordre } n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

le déterminant de A .

Exercice 29 Pour $n = 2, 3$ on retrouve la définition usuelle.

Proposition 3.2.1 (déterminant d'une matrice triangulaire) Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure i.e. $t_{i,j} = 0$ si $i > j$. Alors :

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \cdots t_{n,n}$$

le produit des coefficients diagonaux. En particulier,

$$|I_n| = 1$$

.

Démonstration : Par définition :

$$|T| = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n}$$

(somme sur les arrangements σ d'ordre n)

Or, le produit $t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n}$ est nul sauf si, éventuellement, $\sigma(1) \leq 1, \dots, \sigma(n) \leq n$. Cela n'arrive que si $\sigma(1) = 1, \dots, \sigma(n) = n$ c-à-d si $\sigma = (1, \dots, n)$. Donc :

$$|T| = \epsilon((1, 2, \dots, n)) t_{1,1} \cdots t_{n,n} = t_{1,1} \cdots t_{n,n} .$$

q.e.d.

En particulier, $\det(I_n) = 1$.

Cette définition du déterminant et « la seule possible » au sens suivant :

Théorème 3.2.2 Il existe une unique application :

$$D : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A \mapsto D(A)$$

i) linéaire en les colonnes de A , ii) alternée i.e. $D(A) = 0$ si A a deux colonnes identiques, iii) $D(I_n) = 1$.

De plus, $D = \det$.

Démonstration : Le i) signifie que si on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes d'une matrice A . Pour tout j , si C'_j est un vecteur colonne, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$D(C_1 | \dots | \lambda C_j + \mu C'_j | \dots | C_n) = \lambda D(C_1 | \dots | C_j | \dots | C_n) + \mu D(C_1 | \dots | C'_j | \dots | C_n) .$$

Existence : Il est clair que $\det$ vérifie i) et iii). Vérifions ii) :

supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a ses colonnes C_i et C_j identiques, $i < j$. Pour tout arrangement σ d'ordre n , posons σ' l'arrangement défini par :

$$\sigma'(p) = \begin{cases} \sigma(p) & \text{si } p \neq i, j, \\ \sigma(j) & \text{si } p = i, \\ \sigma(i) & \text{si } p = j. \end{cases}$$

Alors

$$(*) \quad \epsilon(\sigma) = -\epsilon(\sigma') .$$

En effet,

$$(I(\sigma) \cup I(\sigma')) \setminus (I(\sigma) \cap I(\sigma')) =$$

$$\{\{k_i, k_j\}\} \cup \{\{k_i, k_p\} : i < p < j\} \cup \{\{k_q, k_j\} : i < q < j\}$$

qui est un ensemble de cardinal $2(j-i)-1$ (*exo*) . Donc :

$$|I(\sigma)| + |I(\sigma')| = 2|I(\sigma) \cap I(\sigma')| + 2(j-i)-1$$

$$\Rightarrow |I(\sigma)| = |I(\sigma')| - 1 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow \epsilon(\sigma) = -\epsilon(\sigma') .$$

On a donc une bijection :

$$\{\sigma \text{ arrangement pair}\} \xrightarrow{1:1} \{\sigma \text{ arrangement impair}\}$$

$$\sigma \mapsto \sigma'$$

De plus, comme les colonnes C_i et C_j de la matrice A sont identiques, on a :

$$a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n}$$

pour tout arrangement σ .

Donc :

$$\det A = \sum_{\sigma \text{ arrangement pair}} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \text{ arrangement impair}} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \text{ arrangement pair}} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \text{ arrangement pair}} a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \text{ arrangement pair}} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} - a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Unicité : Soit D qui vérifie i), ii) de l'énoncé. Alors, si on note $E_1, \dots, E_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$C_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_i$$

pour toute colonne C_j de A et par linéarité :

$$D(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} D(E_{i_1} | \dots | E_{i_n}) .$$

Or, $D(E_{i_1} | \dots | E_{i_n}) = 0$ si les $i_1, \dots, i_n$ ne sont pas tous distincts. Donc :

$$D(A) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \text{ arrangement}} D(E_{i_1} | \dots | E_{i_n}) .$$

Il reste à montrer que pour un arrangement $(i_1, \dots, i_n)$, $D(E_{i_1} | \dots | E_{i_n}) = \epsilon(i_1, \dots, i_n) D(I_n)$. On le démontre par récurrence sur $k \geq 1$ tel que :

$$i_{k-1} > i_k < \dots < i_n .$$

Si $k = 1$, c'est évident car alors, $i_1 = 1, \dots, i_n = n$. Si $k > 1$, on échange i_{k-1} et i_k : on obtient un arrangement : $(i'_1, \dots, i'_n)$ où $i'_j := i_j$ si $j \neq k, k+1$, $i'_k := i_{k-1}$ et $i'_{k-1} := i_k$. Comme :

$$i'_{k-1} < \dots < i'_n$$

on a par hypothèse de récurrence :

$$D(E_{i'_1} | \dots | E_{i'_n}) = \epsilon(i'_1, \dots, i'_n) D(I_n) .$$

Or, d'après (*), on a :

$$\epsilon(i'_1, \dots, i'_n) = -\epsilon(i_1, \dots, i_n) .$$

De plus, on a :

$$D(E_{i_1} | \dots | E_{i_{k-1}} + E_{i_k} | E_{i_{k-1}} + E_{i_k} | \dots | E_{i_n}) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow D(E_{i_1}|\dots|E_{i_{k-1}}|E_{i_{k-1}}|\dots|E_{i_n}) + D(E_{i_1}|\dots|E_{i_{k-1}}|E_{i_k}|\dots|E_{i_n}) \\
&\quad + D(E_{i_1}|\dots|E_{i_k}|E_{i_{k-1}}|\dots|E_{i_n}) + D(E_{i_1}|\dots|E_{i_k}|E_{i_k}|\dots|E_{i_n}) = 0 \\
&\Leftrightarrow D(E_{i_1}|\dots|E_{i_{k-1}}|E_{i_k}|\dots|E_{i_n}) + D(E_{i_1}|\dots|E_{i_k}|E_{i_{k-1}}|\dots|E_{i_n}) = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow D(E_{i_1}|\dots|E_{i_n}) = -D(E_{i'_1}|\dots|E_{i'_n}) .
\end{aligned}$$

Conclusion : $D(E_{i_1}|\dots|E_{i_n}) = \epsilon(i_1, \dots, i_n)D(I_n)$. q.e.d.

On a en fait démontré le résultat suivant :

Théorème 3.2.3 *Soit $D : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une application n -linéaire et alternée en les colonnes (i.e. qui vérifie i) et ii) du théorème précédent), alors :*

$$D(A) = \det AD(I_n) .$$

Déterminant de la transposée

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la matrice de coefficients :

$$({}^tA)_{i,j} := A_{j,i}$$

pour tous $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Théorème 3.2.4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\det({}^tA) = \det A$.*

Corollaire 3.2.4.1 *Dans les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3, on peut remplacer « colonne » par « ligne » .*

Démonstration : Si σ est un arrangement d'ordre n , on note $\sigma^{-1} := (l_1, \dots, l_n)$ l'arrangement d'ordre n tel que $\sigma_{l_i} = i$ pour tout i . Si $1 \leq i \neq j \leq n$, alors $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ est une inversion de σ si et seulement si $\{i, j\}$ est une inversion de σ^{-1} (exo) . En particulier, $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$ pour tout arrangement σ .

Or, on a :

$$\begin{aligned}
a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} &= a_{\sigma(\sigma^{-1}(1)),\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma(\sigma^{-1}(n)),\sigma^{-1}(n)} \\
&= a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} .
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \det({}^t A) .
\end{aligned}$$

q.e.d.**Conséquences :****Théorème 3.2.5 (déterminant du produit)** Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(AB) = \det A \det B .$$

Démonstration : En effet, si A est fixée, l'application :

$$F : B \mapsto \det(AB)$$

est n —linéaire alternée en les colonnes de B . Donc :

$$\begin{aligned}
\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), F(B) &= \det BF(I_n) \\
&= \det A \det B .
\end{aligned}$$

q.e.d.**EXEMPLE** : Pour les matrices de Pascal de la page 29, on trouve :

$$\det P = \det T_- T^+ = 1 .$$

Proposition 3.2.6 (déterminant des matrices triangulaires par blocs)Si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right| = \det A \det D .$$

Démonstration : Fixons A . L'application :

$$D \mapsto \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right|$$

est n —linéaire alternée en les lignes de D donc :

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right| = \det D \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right|$$

Ensuite B étant fixé, l'application :

$$A \mapsto \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right|$$

est n -linéaire alternée en les colonnes de A donc :

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right| = \det A \left| \begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right|$$

enfin, on sait calculer le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (on fait le produit des termes diagonaux) :

$$\left| \begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right| = 1$$

q.e.d.

3.3 Règle de Cramer

Notation : Soit A une matrice $n \times n$. On note $A^{i,j}$ la matrice obtenue en biffant[†] la ligne i et la colonne j de A .

On peut calculer un déterminant $n \times n$ si on sait calculer un déterminant $(n-1) \times (n-1)$:

Proposition 3.3.1 (Développement par rapport à une ligne ou une colonne)

Soit A une matrice $n \times n$. Alors :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} |A^{i,j}|$$

[†]. BIFFER, verbe transitif :

Barrer, annuler d'un trait de plume ce qui est écrit. *Ses manuscrits étaient biffés, rebiffés, raturés, grattés, chargés* (CHAMPFLEURY, *Les Souffrances du professeur Delteil*, 1855, p. 176)

$$\forall 1 \leq i \leq n, \det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} |A^{i,j}|.$$

Démonstration : Par n -linéarité du déterminant selon les colonnes, comme on a :

$$A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \overset{j}{0} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

on a :

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \overset{j}{0} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Or en échangeant la colonne j avec la colonne $j-1$ puis la colonne $j-1$ avec la colonne $j-2$, etc, on trouve :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ensuite, en échangeant la ligne i avec la ligne $i-1$ puis la ligne $i-1$ avec la ligne $i-2$, etc, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & & 1 & & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} |A^{i,j}| .$$

Et on démontre de même la formule de développement par rapport à la ligne i . q.e.d.

EXEMPLE :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 .$$

Proposition 3.3.2 (formule de Cramer pour les solutions des systèmes linéaires)
Si :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{n,1}x_n = y_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases}$$

alors, $\det Ax_k = \det A_k$ où A_k est la matrice obtenue en remplaçant la k -ième colonne de A par la colonne $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Démonstration : On développe par rapport à la k -ième colonne :

$$\det A_k = \sum_{i=1}^n y_i (-1)^{i+k} |A^{i,k}|$$

(on remplace les y_i par leur expression en fonction des x_j) :

$$\begin{aligned} \det A_k &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j (-1)^{i+k} |A^{i,k}| \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A^{i,k}| \right) x_j . \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A^{i,k}|$$

est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la colonne k de la matrice A par la colonne j (*exo*) . Donc :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+k} |A^{i,k}| = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \det A & \text{sinon .} \end{cases}$$

q.e.d.

Remarque : Si $\det A \neq 0$, alors A inversible. En effet, dans ce cas, les formules de Cramer montrent que l'on peut inverser le système défini par A .

Plus précisément, on peut décrire la matrice inverse de A si $\det A \neq 0$.

Définition 32 (Comatrice) Soit A une matrice $n \times n$, sa comatrice, notée $\text{com}(A)$ ou $\tilde{A}$ est la matrice $n \times n$ dont le (i, j) -ième coefficient est :

$$\tilde{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} |A^{i,j}| .$$

Corollaire 3.3.2.1 Pour toute matrice A de taille $n \times n$:

$${}^t \tilde{A} A = A {}^t \tilde{A} = \det A I_n$$

Démonstration : En effet, le (i, j) -ème coefficient de ${}^t \tilde{A} A$ est donnée par la formule :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,j} |A^{k,i}|$$

qui est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant, dans la matrice A , la colonne i par la colonne j . Donc :

$$({}^t \tilde{A} A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,j} |A^{k,i}|$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \det A & \text{si } i = j . \end{cases}$$

q.e.d.

Remarque : Cette formule reste vraie si $\mathbb{K}$ est remplacé par un anneau commutatif (p. ex : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[T]$).

EXEMPLE :

— Si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— Si A est une matrice 3×3 et si $|A| \neq 0$, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A^{1,1}| & -|A^{2,1}| & |A^{3,1}| \\ -|A^{1,2}| & |A^{2,2}| & -|A^{3,2}| \\ |A^{1,3}| & -|A^{2,3}| & |A^{3,3}| \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.3.3 A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ et l'inverse est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \tilde{A} = \frac{1}{\det A} (\pm |A^{j,i}|)$$

Terminons ce chapitre par quelques déterminants remarquables :

Exercice 30 *Déterminant de Vandermonde. C'est le déterminant $(n+1) \times (n+1)$ suivant :*

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

On a : $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Indication : on peut raisonner par récurrence et remarquer que : $V(x_0, \dots, x_n)$ est un polynôme de degré $\leq n$ en x_n , de coefficient dominant $V(x_0, \dots, x_{n-1})$ qui s'annule lorsque $x_n = x_0, \dots, x_{n-1}$; donc : $V(x_0, \dots, x_n) = V(x_0, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})$.

Conséquence : Si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, alors :

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1^n + \dots + x_n^n = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

(ce système n'est pas linéaire).

Exercice 31 Montrer que le déterminant $n \times n$ suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

est le $n + 1$ -ième nombre de Fibonacci f_{n+1} (cf. p. 31).

Enfin voici une autre façon de calculer un déterminant 3×3 :

Exercice 32 Soit A une matrice 3×3 . Alors si $a_{2,2} \neq 0$:

$$|A| = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{a_{2,2}}$$

3.4 Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E . Le déterminant :

$$\det(\text{Mat}(u)_{(e)})$$

est indépendant de la base (e) de E choisie.

En effet, les matrices de u dans 2 bases différentes sont semblables et par *multiplicativité* du déterminant :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \det(PAP^{-1}) &= \det P \det A \det(P^{-1}) \\ &= \det A \det P \det P^{-1} \\ &= \det A \end{aligned}$$

(leurs déterminants sont égaux).

On peut donc définir le déterminant de u :

Définition 33 (déterminant d'un endomorphisme)

$$\det u := \det A$$

où A est la matrice de u dans une base quelconque de E .

Remarque : [(s) importantes]

— $\det \text{Id}_E = 1$ et pour tous u, v endomorphismes de E ,

$$\det (u \circ v) = \det u \det v$$

— u est un isomorphisme $\Leftrightarrow \det u \neq 0 \Leftrightarrow \text{Mat}(u)_{(e)}$ inversible (pour toute base (e) de E).

En effet, u est un isomorphisme $\Leftrightarrow \text{Mat}(u)_{(e)}$ est inversible (quelle que soit la base (e) de E choisie (*exo*) .

Chapitre 4

Valeurs propres, vecteurs propres

Dans ce chapitre E est un $\mathbb{K}$ —espace vectoriel.

4.1 Sous-espaces invariants

Définition 34 (sous-espace invariant) Soit u un endomorphisme de E . On dit qu'un sous- $\mathbb{K}$ —espace vectoriel F de E est invariant, ou stable, par u si :

$$\forall x \in F, u(x) \in F .$$

On note alors $u|_F : F \rightarrow F, x \in F \mapsto u(x) \in F$ la restriction de u à F . L'application $u|_F$ est un endomorphisme de F .

Effet sur les matrices :

Supposons que E est de dimension n , que u est un endomorphisme de E , que F est un sous-espace de E invariant par u . Alors si :

$$e_1, \dots, e_k$$

est une base de F , on peut la compléter en une base de E :

$$(e) = e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n .$$

La matrice de u dans la base (e) est *triangulaire* par blocs :

$$\text{Mat}(u)_{(e)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & b_{1,1} & \dots & b_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} & b_{k,1} & \dots & b_{k,n-k} \\ 0 & \dots & 0 & d_{1,1} & \dots & d_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{n-k,1} & \dots & d_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$$

où $A := (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est la matrice de $u|_F$ dans la base $e_1, \dots, e_k$ de F , $B := (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq n-k}} \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K})$, $D := (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-k} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$.

Remarque : si le sous-espace :

$$G := \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$$

est aussi stable par u , le bloc rectangulaire B est nul et :

$$\text{Mat}(u)_{(e)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{1,1} & \dots & d_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{n-k,1} & \dots & d_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$$

qui est une matrice *diagonale* par blocs.

EXEMPLE : Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit r_θ la rotation d'axe e_3 et d'angle θ . L'endomorphisme r_θ de $\mathbb{R}^3$ laisse invariants les sous-espaces :

$$\langle e_1, e_2 \rangle \text{ et } \langle e_3 \rangle$$

et sa matrice dans la base e_1, e_2, e_3 est la matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les droites invariantes sont appelées *droites propres*, ce sont les droites engendrées par les vecteurs propres.

4.2 Vecteurs propres

Définition 35 (vecteurs, valeurs propres, spectre) Soit u un endomorphisme de E . Un vecteur propre de u est un vecteur **non nul** $x \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est la valeur propre de u associée au vecteur propre x . On dit aussi que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Le spectre de u est l'ensemble des valeurs propres de u . Notation : $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ (ou $\text{Sp}(u)$).

Version matricielle :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un *vecteur propre* de A est un vecteur **non nul** $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$AX = \lambda X$$

pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est la *valeur propre* de A associée au vecteur propre X . On dit aussi que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A . Notation : $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ (ou $\text{Sp}(A)$ si le corps où l'on se place est évident).

EXEMPLE : [s]

— soient $E = \mathbb{R}^3$, $u = r_\theta$ la rotation d'axe e_3 et d'angle θ . Alors $r_\theta(e_3) = e_3$. Donc e_3 est un vecteur propre de r_θ ; la valeur propre associée est 1.

— Soit $E = \mathbb{C}[X]_{\leq n}$ l'espace des polynômes complexes de degré $\leq n$. Soit $u = \partial : E \rightarrow E$, $P(X) \mapsto P'(X)$. Pour des raisons de degré,

$$P' = \lambda P \Rightarrow \lambda = 0 \text{ et } P \text{ constant}$$

de plus, tout polynôme constant non nul est un vecteur propre de ∂ de valeur propre associée 0; donc $\text{Sp}(\partial) = \{0\}$.

— (Cet exemple est en dimension infinie) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u = \partial : E \rightarrow E$, $f \mapsto f'$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons

$$e_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{\lambda x}.$$

On a : $e'_\lambda = \lambda e_\lambda$ donc chaque fonction e_λ est un vecteur propre de ∂ de valeur propre associée λ .

— Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le réel $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une valeur propre de A . En effet :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(exo)

— Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Le complexe $j := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une valeur propre de A . En effet :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

(exo)

« Comment trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice parmi tous les éléments de $\mathbb{K}$? »

4.3 Polynôme caractéristique

Proposition 4.3.1 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 .$$

Démonstration : λ n'est pas une valeur propre de A

$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, AX \neq \lambda X \text{ i.e. } (A - \lambda I_n)X \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ injective}$$

$$\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ inversible}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) \neq 0 .$$

q.e.d.

Définition 36 (polynôme caractéristique) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est : $\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$.

Remarque : [s] — La matrice $XI_n - A$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ donc son déterminant $\chi_A(X) \in \mathbb{K}[X]$.

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$.

EXEMPLE : [s]

— Si $n = 2$:

$$\begin{aligned} \forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \chi_A(X) &= X^2 - (a + d)X + (ad - bc) \\ &= X^2 - (\text{tr}A)X + \det A \end{aligned}$$

où $\text{tr} A := a + d$.

— Si $n = 3$,

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \chi_A(X) = X^3 - (\text{tr} A)X^2 + s_2X - \det A$$

où $\text{tr} A := a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ et :

$$s_2 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

(c'est la trace de la comatrice de A).

— n quelconque :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A(X) = X^n - s_1X^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$$

où pour tout $1 \leq d \leq n$, le coefficient devant $(-1)^d X^{n-d}$ est :

$$s_d := \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=d}} |A_I|$$

avec pour tout $I = \{k_1, \dots, k_d\}$, tel que $k_1 < \dots < k_d$,

$$A_I := \begin{pmatrix} a_{k_1, k_1} & \dots & a_{k_1, k_d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k_d, k_1} & \dots & a_{k_d, k_d} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$$

(c'est la matrice obtenue en ne gardant de A que les lignes et les colonnes $k_1, \dots, k_d$).

$$\text{Démonstration : On pose } P(X_1, \dots, X_n) := \begin{vmatrix} X_1 - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & \\ -a_{2,1} & X_2 - a_{2,2} & \dots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & X_n - a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

C'est un polynôme en les variables $X_1, \dots, X_n$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On montre par récurrence sur k que pour $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, le coefficient devant le monôme $X_{i_1} \dots X_{i_k}$ est :

$$(-1)^{n-k} \det A^I$$

où $I := \{i_1, \dots, i_k\}$ et A^I est la matrice obtenue à partir de A en retirant les lignes et les colonnes $i_1, \dots, i_k$ (il suffit de développer par rapport à la ligne i_1 puis $i_2, \dots$).

En particulier,

$$\begin{aligned} P(X, \dots, X) &= \chi_A(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} |A^{\{i_1, \dots, i_k\}}| \right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} |A_{\{i_1, \dots, i_k\}}| \right) X^{n-k} . \end{aligned}$$

q.e.d.

À retenir : le polynôme $\chi_A(X)$ est unitaire[†] de degré n et :

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^n a_{i,i} =: \text{tr} A \\ s_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{vmatrix} \\ s_n &= \det A . \end{aligned}$$

Définition 37 (deux définitions équivalentes de la trace) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par :

$$\text{tr} A := - \text{le coefficient devant } X^{n-1} \text{ dans } \chi_A(X)$$

ou par :

$$\text{tr} A := \text{la somme des coefficients diagonaux de } A.$$

Théorème 4.3.2 (polynôme caractéristique d'un produit) Soient m, n des entiers ≥ 1 . Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors :

$$AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \text{ et } BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

et :

$$X^n \chi_{AB}(X) = X^m \chi_{BA}(X)$$

dans $\mathbb{K}[X]$.

En particulier, si $m = n$ alors :

$$\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X) .$$

[†]. c -à- d son coefficient de plus haut degré est 1.

Démonstration : On pose :

$$M := \left(\begin{array}{c|c} XI_m & -A \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right) \text{ et } N := \left(\begin{array}{c|c} I_m & A \\ \hline B & XI_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{K}) .$$

On a alors :

$$MN = \left(\begin{array}{c|c} XI_m - AB & 0 \\ \hline XB & XI_n \end{array} \right)$$

donc :

$$\begin{aligned} \det(MN) &= \det(XI_m - AB)\det(XI_n) \\ &= X^n \chi_{AB}(X) . \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$NM = \left(\begin{array}{c|c} XI_m & 0 \\ \hline XB & XI_n - BA \end{array} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \det(NM) &= \det(XI_m)\det(XI_n - BA) \\ &= X^m \chi_{BA}(X) . \end{aligned}$$

Or, $\det(MN) = \det(NM) = \det M \det N$. q.e.d.

Remarque : — Si $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des matrices semblables *i.e.* si

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), A = PA'P^{-1}$$

alors :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \chi_{P(A'P^{-1})}(X) \\ &= \chi_{(A'P^{-1})P}(X) \\ &= \chi_{A'}(X) \end{aligned}$$

autrement dit deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

En conséquence, on peut définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme :

Définition 38 *Supposons que E est de dimension finie. Si u est un endomorphisme de E , alors toutes les matrices de u dans une base de E sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique. Ce polynôme caractéristique commun est le polynôme caractéristique de u , noté $\chi_u(X)$.*

Concrètement, si $(e) = e_1, \dots, e_n$ est une base de E , si u est un endomorphisme de E , alors :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X)$$

où $A := \text{Mat}(u)_{(e)}$.

Spectre et racines du polynôme caractéristique

On peut réécrire la proposition 4.3.1 :

Théorème 4.3.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\text{Sp}(A) = \{ \text{valeurs propres de } A \} = \{ \text{racines de } \chi_A(X) \}$$

Démonstration : On a λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$
 $\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. q.e.d.

En particulier :

Corollaire 4.3.3.1 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A possède au plus n valeurs propres.*

(En effet, nous savons qu'un polynôme de degré n a au plus n racines).

EXEMPLE : [s]

— Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\chi_A(X) = X^2 - X - 1 = (X - \frac{1 - \sqrt{5}}{2})(X - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$$

donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$ mais $\text{Sp}_{\mathbb{Q}}(A) = \emptyset$.

— Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, alors :

$$\chi_A(X) = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

où $j := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc dans ce cas :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{j, j^2\}$$

mais $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

— Si $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, alors :

$$\chi_A(X) = X^2 - 2 \cos \theta X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{e^{-i\theta}, e^{i\theta}\}$. (Si $\theta \neq 0 \bmod \pi$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$).

Cas des matrices triangulaires :

Soit

$$T := \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

une matrice triangulaire supérieure. Alors :

$$\begin{aligned} \chi_T(X) &= \begin{vmatrix} X - t_{1,1} & \cdots & -t_{1,n} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 & X - t_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^n (X - t_{i,i}) \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(T) = \{t_{i,i} : 1 \leq i \leq n\}$.

Matrices compagnons :

Soit $P(X) := X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0 \in \mathbb{K}[X]$. On pose :

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

c'est la *matrice compagnon* du polynôme P .

Proposition 4.3.4

$$\chi_{C_P}(X) = P(X) .$$

Démonstration : Par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$ c'est évident car $P(X) = X + c_0$ et $C_P = (-c_0)$ (matrice 1×1).

Si $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0$, on a :

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & \diagdown & & & \\ 0 & \diagdown & & & \\ \vdots & \diagdown & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + c_{n-1} \end{vmatrix}$$

(en développant par rapport à la première ligne)

$$= X \underbrace{\begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ -1 & \diagdown & & & \\ 0 & \diagdown & & & \\ \vdots & \diagdown & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + c_{n-1} \end{vmatrix}}_{= X^{n-1} + c_{n-1}X^{n-2} + \dots + c_1 \text{ par hypothèse de récurrence}} + (-1)^{n+1}c_0 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \diagdown & & & \\ \vdots & \diagdown & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{=(-1)^{n-1}}$$

$$= X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0$$

$$= P(X)$$

(ce qui achève la récurrence).

q.e.d.

EXEMPLE : Soit J la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \diagdown & & & \\ 1 & & & 0 \\ \diagdown & & & \\ 0 & \diagdown & & \\ \vdots & \diagdown & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

alors $\chi_J(X) = X^n - 1$ car $J = C_{X^n-1}$.

Exercice 33 (Polynômes de Tchébychev) On rappelle le résultat suivant :

Pour tout k entier ≥ 1 , il existe un polynôme en t , à coefficients rationnels, noté $T_k(t)$, tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(k\theta) = \sin \theta T_k(\cos \theta)$$

(en effet :

$$\begin{aligned} \sin(k\theta) &= \operatorname{Im}(e^{ik\theta}) \\ &= \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^k) \end{aligned}$$

et on développe ...)

Par exemple, $\sin(2\theta) = \sin \theta(2 \cos \theta)$ et $\sin(3\theta) = \sin \theta(4 \cos^2 \theta - 1)$ donc $T_2(t) = 2t$ et $T_3(t) = 4t^2 - 1$. Plus généralement, $T_k(t) = 2^{k-1}t^{k-1} + \dots$

Pour tout n soit :

$$V_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

alors, pour tout $n \geq 1$:

$$\chi_{V_n}(X) = T_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right)$$

en particulier,

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(V_n) = \left\{ 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) : 1 \leq k \leq n \right\}.$$

Indications : vérifier que $\chi_{V_n}(X) = T_{n+1}(\frac{X}{2})$ pour $n = 1, 2$ et trouver une relation de récurrence d'ordre 2 pour $\chi_{V_n}(X)$ (en développant par rapport à une ligne ou une colonne) et une autre pour $T_n(X)$.

Rappelons le

Théorème 4.3.5 (fondamental de l'algèbre (ou théorème de d'Alembert))

Tout polynôme complexe non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.

admettons ...

Corollaire 4.3.5.1 Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, tout endomorphisme u d'un espace vectoriel **complexe** de **dimension finie** admet au moins une valeur propre.

Démonstration : Le polynôme caractéristique de A (ou de u) est un polynôme complexe non constant donc admet (au moins) une racine $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, λ est une valeur propre de A (ou de u). q.e.d.

Corollaire 4.3.5.2 *Soit A une matrice réelle. Alors, A possède un sous-espace invariant de dimension 1 ou 2.*

Démonstration : Soit $n \geq 1$. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A possède une valeur propre $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, a, b réels, et un vecteur propre associé $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

Alors :

$$\begin{aligned} AZ = \lambda Z &\Leftrightarrow AX + iAY = (aX - bY) + i(bX + aY) \\ &\Leftrightarrow AX = aX - bY \text{ et } AY = bX + aY \end{aligned}$$

et en particulier le sous-espace (réel) $\langle X, Y \rangle$ est stable par A . Or X ou $Y \neq 0$ donc $\langle X, Y \rangle$ est de dimension 1 ou 2. q.e.d.

4.4 Espaces propres

Définition 39 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou soit u un endomorphisme de E). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A (ou de u). L'espace propre de A associé à la valeur propre λ est le sous-espace vectoriel :*

$$E_\lambda(A) := \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = \lambda X\}$$

(version pour l'endomorphisme u :

$$E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda I_n) = \{x \in E : u(x) = \lambda x\})$$

Remarque : [s] — Si λ est une valeur propre de A , l'espace propre associé $E_\lambda(A)$ est de dimension ≥ 1 ;

— L'espace propre $E_\lambda(A)$ est invariant par A . En effet :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A - \lambda I_n) &\Rightarrow A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) \\ &\Rightarrow AX \in \ker(A - \lambda I_n) . \end{aligned}$$

Théorème 4.4.1 Soit u un endomorphisme de E . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ r valeurs propres **distinctes** de u . Alors les espaces propres associés $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ sont en somme directe i.e. :

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} .$$

Remarque : On en déduit que le nombre de valeurs propres est $\leq \dim E$ car :

$$\dim E \geq \dim E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_r} \geq r .$$

Rappels sur les sommes directes

Définition 40 On dit que $E_1, \dots, E_r$ des sous-espaces de E sont en somme directe si :

$$\forall v_1 \in E_1, \dots, \forall v_r \in E_r, v_1 + \dots + v_r = 0 \Rightarrow v_1 = \dots = v_r = 0$$

notation :

$$E_1 + \dots + E_r = E_1 \oplus \dots \oplus E_r .$$

Remarque : Si $r = 2$, E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Exercice 34 $E_1, \dots, E_r$ sont en somme directe $\Leftrightarrow$:

$$\forall 1 \leq i \leq r, E_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r E_j \right) = \{0\} .$$

EXEMPLE : Si $e_1, \dots, e_n$ est une famille libre de E (par exemple une base), alors les droites $\mathbb{K}e_1, \dots, \mathbb{K}e_n$ sont en somme directe.

Il est facile de calculer la dimension d'une somme directe :

Proposition 4.4.2 Si $E_1, \dots, E_r$ sont des sous-espaces de E en somme directe, alors :

$$\dim(E_1 + \dots + E_r) = \dim E_1 + \dots + \dim E_r .$$

Démonstration : Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de $E_1, \dots, E_r$. Alors les $\mathcal{B}_i$ sont deux à deux disjointes et $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ est une base de $E_1 + \dots + E_r$ donc :

$$\begin{aligned} \dim E_1 \oplus \dots \oplus E_r &= \left| \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r \right| \\ &= \left| \mathcal{B}_1 \right| + \dots + \left| \mathcal{B}_r \right| \\ &= \dim E_1 + \dots + \dim E_r . \end{aligned}$$

q.e.d.

*

Démonstration du théorème : Par récurrence sur $r \geq 1$. Si $r = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Soient $v_1 \in E_{\lambda_1}, \dots, v_r \in E_{\lambda_r}$ tels que

$$(4.1) \quad v_1 + \dots + v_r = 0$$

alors si on applique u , on trouve :

$$(4.2) \quad u(v_1) + \dots + u(v_r) = 0$$

$$(4.3) \quad \Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

mais alors (4.1) - λ_1 x (4.3) donne :

$$(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + (\lambda_r - \lambda_1)v_r = 0$$

$\Rightarrow$ (hypothèse de récurrence de rang $r - 1$) $\Rightarrow$:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = \dots = (\lambda_r - \lambda_1)v_r = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \dots = v_r = 0$$

car $\lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_r - \lambda_1 \neq 0$.

On a donc aussi : $v_1 = -v_2 - \dots - v_r = 0$.

q.e.d.

Corollaire 4.4.2.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique de A possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$, alors il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A .

Démonstration : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ les n -racines distinctes de $\chi_A(X)$. Ce sont aussi n valeurs propres de A . Notons $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ les espaces propres associés. Alors : $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_n} \subseteq E$ et :

$$\begin{aligned} \dim(E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_n}) &= \dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}) \\ &= \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_n} \geq n = \dim \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

donc :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \dim E_{\lambda_i} = 1 \text{ et } E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n} = \mathbb{K}^n .$$

Pour tout i , soit e_i un vecteur non nul tel que :

$$E_{\lambda_i} = \mathbb{K}e_i$$

alors les vecteurs e_i sont des vecteurs propres de A (de valeurs propres λ_i) et

$$\mathbb{K}e_1 + \dots + \mathbb{K}e_n = \mathbb{K}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_n = \mathbb{K}^n$$

signifie que les e_i forment une base de $\mathbb{K}^n$.

q.e.d.

Remarque : Bien entendu la réciproque est fautive car par exemple si $n \geq 2$, il existe toujours une base formée de vecteurs propres de I_n mais son polynôme caractéristique, $\chi_{I_n}(X) = (X - 1)^n$ n'a qu'une seule racine : 1.

Définition 41 (diagonalisable) On dit qu'une matrice A (resp. un endomorphisme u de E) est diagonalisable s'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ (respectivement de E) formée de vecteurs propres de A (respectivement de u).

Remarque : Si u est diagonalisable et si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes, alors :

$$\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E) = E$$

(car tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs propres de u donc est une somme de vecteurs appartenant aux espaces propres $\ker(u - \lambda_i)$) et réciproquement, si :

$$\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E) = E$$

alors, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u (il suffit de mettre « bout à bout » des bases des espaces propres $\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$).

En bref :

$$u \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E) = E .$$

Si A est une matrice diagonalisable et si P est une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ dans une base de vecteurs propres, $v_1, \dots, v_n$ alors

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale : si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres correspondant respectivement aux vecteurs $v_1, \dots, v_n$, alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Diagonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ signifie trouver, si elles existent, $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1} .$$

EXEMPLE : — Toute matrice réelle 2×2 symétrique :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

est diagonalisable (*exo*)

— **projections** : On suppose que $E = F \oplus G$. On définit la projection sur F suivant G par :

$$p : E \rightarrow E, \underbrace{x}_{\in F} \oplus \underbrace{y}_{\in G} \mapsto x .$$

Il est facile de voir que :

$$F = \ker(p - \text{Id}_E) = E_1(p) \text{ et } G = \ker p = E_0(p)$$

donc p est diagonalisable. Remarquer aussi que $p^2 = p$. En fait, réciproquement, si p est un endomorphisme de E tel que $p^2 = p$ alors p est une projection sur un certain sous-espace suivant un autre certain sous-espace.

— **réflexions** : On suppose encore que $E = F \oplus G$. On définit la réflexion par rapport à F suivant G par :

$$r : E \rightarrow E, \underbrace{x}_{\in F} \oplus \underbrace{y}_{\in G} \mapsto x - y$$

c'est un endomorphisme de E tel que : $r^2 = \text{Id}_E$. Il est facile de voir :

$$F = \ker(r - \text{Id}_E) = E_1(r) \text{ et } G = \ker(r + \text{Id}_E) = E_{-1}(r) .$$

Vérifier que si r est un endomorphisme de E vérifiant $r^2 = \text{Id}_E$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors r est une réflexion par rapport à un certain sous-espace et suivant un certain autre sous-espace.

— La matrice de permutation circulaire

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{---} & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ de valeurs propres

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

les racines n -ièmes de l'unité. Trouver une base de vecteurs propres (*exo*) .

4.5 Un premier critère de diagonalisabilité

Rappels sur les polynômes

Définition 42 *Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite*

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang et qui est notée :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots$$

Le degré du polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots$$

est le plus grand entier n , noté $\deg P$, tel que $a_n \neq 0$. On prend pour convention $\deg 0 = -\infty$.

Si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + \dots$ sont des polynômes, on définit leur produit :

$$P(X)Q(X) := a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \dots + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0)X^k + \dots$$

On note $\mathbb{K}[X]$ la $\mathbb{K}$ -algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque : [importante] On peut attribuer une valeur à X : si $P(X) = a_0 + \dots + a_d X^d$, si $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$P(\lambda) := a_0 + \dots + a_d \lambda^d \in \mathbb{K} .$$

Remarque : Pour tous polynômes $P(X)$, $Q(X)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Proposition 4.5.1 (intégrité) Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$. Si $P(X)Q(X) = 0$, alors $P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$.

Démonstration : Si $P(X) \neq 0$ et $Q(X) \neq 0$, alors, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \geq 0$ donc $P(X)Q(X) \neq 0$. q.e.d.

Divisibilité, racines, multiplicité

Définition 43 Si $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$, on dit que Q divise P (dans $\mathbb{K}[X]$) si

$$P(X) = B(X)Q(X)$$

pour un certain polynôme $B(X) \in \mathbb{K}[X]$. Notation :

$$Q|P$$

remarque :

$$Q|P \Rightarrow \deg Q \leq \deg P .$$

Formule de Taylor :

Pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe (une unique) suite $a_0, \dots, a_d$ telle que :

$$P(X) = a_0 + a_1(X - \lambda) + \dots + a_d(X - \lambda)^d$$

Bien entendu, $a_0 = P(\lambda)$. On dit que λ est une racine de P si $P(\lambda) = 0$ i.e. si $(X - \lambda)|P(X)$.

Si $P(X) \neq 0$, on appelle *multiplicité* de λ dans P le plus petit entier i tel que $a_i \neq 0$.

Autrement dit la multiplicité de λ dans P est le plus grand entier i tel que $(X - \lambda)^i | P(X)$.

Notation : $\text{mult}_\lambda P :=$ la multiplicité de λ dans P . **Remarque :** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence :

$$\lambda \text{ racine de } P \Leftrightarrow \text{mult}_\lambda P \geq 1 .$$

Exercice 35 Multiplicité du produit :

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{mult}_\lambda(PQ) = \text{mult}_\lambda P + \text{mult}_\lambda Q$$

Remarque : [multiplicité] Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distincts et si :

$$P(X) := (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

alors m_i est la multiplicité de λ_i dans $P(X)$, pour tout i . En effet, par exemple pour $i = 1$, d'après l'exercice précédent,

$$\begin{aligned} \text{mult}_{\lambda_1} P &= m_1 \underbrace{\text{mult}_{\lambda_1}(X - \lambda_1)}_{=1} + \dots + m_r \underbrace{\text{mult}_{\lambda_1}(X - \lambda_r)}_{=0} \\ &= m_1 . \end{aligned}$$

Exercice 36 Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que :

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{mult}_\lambda P = \deg P$$

pour tout polynôme non nul P .

Définition 44 (scindé) Un polynôme $P(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$ si :

$$P(X) = a_d(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_d)$$

pour certains $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et un $a_d \in \mathbb{K}$. Souvent, on regroupe les racines égales et on écrit :

$$P(X) = a_d(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

avec les λ_i deux à deux distinctes et des entiers $m_i \geq 1$.

EXEMPLE : D'après le théorème de d'Alembert, tous les polynômes sont scindés sur $\mathbb{C}$.

*

Pour énoncer un premier critère de diagonalisation des endomorphismes on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.5.2 Soit u un endomorphisme de E . On suppose E de dimension finie et on suppose aussi qu'il existe un sous-espace F de E invariant par u . Notons $\chi_{u|_F}$ le polynôme caractéristique de la restriction à F . Alors :

$$\chi_{u|_F}(X) \mid \chi_u(X)$$

dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration : Soit $e_1, \dots, e_k$ une base de F que l'on complète en une base de E :

$$e_1, \dots, e_n$$

alors la matrice de u dans la base $e_1, \dots, e_n$ est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{\leftarrow k}{\overset{\rightarrow k} A} & \overset{\leftarrow n-k}{\overset{\rightarrow n-k} B} \\ \hline \underset{\leftarrow n-k}{\underset{\rightarrow n-k} 0} & D \end{array} \right)$$

(où A est la matrice de $u|_F$ dans la base $e_1, \dots, e_k$). Mais alors :

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \left| \begin{array}{c|c} XI_k - A & -B \\ \hline 0 & XI_{n-k} - D \end{array} \right| = \det(XI_k - A) \det(XI_{n-k} - D) \\ &= \chi_{u|_F} \det(XI_{n-k} - D) . \end{aligned}$$

q.e.d.

Définition 45 (multiplicités algébrique et géométrique) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On notera $m_a(\lambda)$ la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de A , $\chi_A(X)$:

$$m_a(\lambda) := \text{le plus grand entier } m \text{ tel que } (X - \lambda)^m | \chi_A(X)$$

c'est la multiplicité algébrique de λ . On notera :

$$m_g(\lambda) := \dim_{\mathbb{K}} \ker(A - \lambda I_n)$$

c'est la multiplicité géométrique de λ .

Corollaire 4.5.2.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou soit u un endomorphisme de E , si E est de dimension finie. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) .$$

EXEMPLE : Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

alors $\chi_A(X) = (X - 1)^n$ et $m_g(1) = 1 < m_a(1) = n$.

Si $A = I_n$, alors : $\chi_A(X) = (X - 1)^n$ et $m_g(1) = m_a(1) = n$.

Démonstration : Soit λ une valeur propre de u . Posons $F := \ker(u - \lambda)$ l'espace propre associé.

Alors F est stable par u :

en effet, si $x \in F$, alors :

$$u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

donc $u(x) \in F$.

Donc d'après le lemme 4.5.2,

$$\chi_{u|_F}(X) \mid \chi_u(X)$$

or :

$$\forall x \in F, u(x) = \lambda x$$

donc $u|_F = \lambda \text{Id}_F$ et

$$\begin{aligned} \chi_{u|_F}(X) &= (X - \lambda)^{\dim F} \\ &= (X - \lambda)^{m_g(\lambda)} \end{aligned}$$

et finalement,

$$(X - \lambda)^{m_g(\lambda)} \mid \chi_u(X) \Rightarrow m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) .$$

q.e.d.

Voici un premier critère de diagonalisabilité :

Théorème 4.5.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (respectivement u un endomorphisme de E avec E de dimension finie). Alors :

$$A \text{ (respectivement } u \text{) est diagonalisable sur } \mathbb{K} \Leftrightarrow \begin{cases} i) \chi_A(X) \text{ est scindé sur } \mathbb{K} ; \\ \text{et} \\ ii) \forall \lambda, \text{ valeur propre de } A, m_a(\lambda) = m_g(\lambda) . \end{cases}$$

Démonstration : $\Rightarrow$: Supposons u diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u . Comme :

$$\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E) = E ,$$

si on choisit des bases $\mathcal{B}_1$ de $\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E)$, ..., $\mathcal{B}_r$ de $\ker(u - \lambda_r \text{Id}_E)$, on obtient une base $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\text{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \lambda_r I_{n_r} \end{array} \right)$$

où $n_i = m_g(\lambda_i) = \dim \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ pour tout i . Donc :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_r)^{n_r} .$$

Par conséquent le polynôme $\chi_u(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et :

$$\forall i, m_a(\lambda_i) = n_i = m_g(\lambda_i) .$$

$\Leftarrow$: Supposons que :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

pour certains $\lambda_i \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts et certains entiers $n_i \geq 1$. Comme :

$$\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) + \dots + \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E) = \ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E) \subseteq E ,$$

on a :

$$\begin{aligned} m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_r) &= \dim (\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) + \dots + \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E)) \\ &\leq \dim E . \end{aligned}$$

Or, pour tout i , $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) = n_i$ et

$$n_1 + \dots + n_r = \deg \chi_u = \dim E$$

en conséquence :

$$\dim (\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) + \dots + \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E)) = \dim E$$

et forcément,

$$\ker(u - \lambda_1 \text{Id}_E) + \dots + \ker(u - \lambda_r \text{Id}_E) = E .$$

q.e.d.

EXEMPLE : Si $n \geq 2$, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ | & \diagdown & & & | \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ | & \diagup & & & | \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est jamais diagonalisable car $m_g(0) = 1 < m_a(0) = n$.

Méthode pour diagonaliser

Soit A une matrice carrée complexe $n \times n$. Pour la diagonaliser :

- on calcule d'abord son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$;
- on cherche les racines de $\chi_A(X)$: ce sont les valeurs propres de A ;
- pour toute valeur propre λ de A , on cherche une base de $\ker A - \lambda I_n$
i.e. on cherche une base de l'espace des solutions du système :

$$AX = \lambda X$$

— si pour toute valeur propre λ de A , $\dim \ker(A - \lambda I_n) = m_a(\lambda)$, A est diagonalisable et une réunion des bases des espaces propres forme une base de vecteurs propres.

4.6 Trigonalisation

Définition 46 On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (respectivement un endomorphisme u de E , si E est de dimension finie) est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ (on devrait dire triangularisable mais ce terme signifie déjà autre chose) si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure c-à-d :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall n \geq i > j \geq 1, T_{i,j} = 0 \text{ et } A = PTP^{-1}$$

(respectivement il existe une base de E où la matrice de u est triangulaire supérieure).

Exercice 37 Toute matrice triangulaire inférieure est trigonalisable (si T est triangulaire inférieure, $w_0 T w_0^{-1}$ est triangulaire supérieure où :

$$w_0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ | & \diagdown & & | \\ 0 & & \ddots & 0 \\ | & \diagup & & | \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.6.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration : $\Rightarrow$: Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc il suffit de montrer que $\chi_T(X)$ est scindé pour toute matrice triangulaire supérieure T ; ce qui est facile.

$\Leftarrow$: On raisonne avec u un endomorphisme de E (et on suppose E de dimension finie). Par récurrence sur $\dim E$. Si $\dim E = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $\dim E > 1$, alors comme $\chi_u(X)$ est scindé,

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

où $n = \dim E$ et où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ne sont pas forcément distincts. Soit e_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 . On complète e_1 en une base : $e_1, \dots, e_n$. Dans cette base, la matrice de u est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & l \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

où $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $l \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$. En particulier,

$$\chi_u(X) = (X - \lambda_1) \chi_B(X)$$

$$\Rightarrow \chi_B(X) = (X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$$

est scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure et $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice inversible telles que :

$$B = QSQ^{-1}$$

alors, on peut vérifier que :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(u) &= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & l \\ \hline 0 & QSQ^{-1} \end{array} \right) \\ &= P \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & lQ \\ \hline 0 & S \end{array} \right) P^{-1} \end{aligned}$$

pour la matrice inversible :

$$P := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right) .$$

Donc la matrice de u dans la base $e_1, \dots, e_n$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & lQ \\ \hline 0 & S \end{array} \right)$$

donc u est trigonalisable.

q.e.d.

Corollaire 4.6.1.1 *Sur $\mathbb{C}$ toutes les matrices sont trigonalisables.*

Relations entre les valeurs propres et les invariants

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme :

$$(4.4) \quad \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{array} \right)$$

donc :

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

ainsi les coefficients diagonaux de (4.4) ne dépendent que de A :

ce sont les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité algébrique.

Exercice 38 *Vérifier que*

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$\forall k \geq 1, \operatorname{tr} A^k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k .$$

On peut en déduire la belle formule suivante :

$$\exists \epsilon > 0, \forall |t| < \epsilon,$$

la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tr}(A^k)}{k} t^k$ converge, la matrice $I_n - tA$ est inversible et :

$$e\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tr} A^k}{k} t^k\right) = \frac{1}{\det(I_n - tA)} .$$

Chapitre 5

Polynômes d'endomorphismes

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.1 Définition

On remplace X^k par u^k (ou A^k) et 1 par Id_E (ou I_n).

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On pose :

$$P(u) := a_0\text{Id}_E + a_1u + a_2u^2 + \dots \text{ et } P(A) := a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots$$

Proposition 5.1.1 *L'application :*

$$\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P(X) \mapsto P(A)$$

est un morphisme d'algèbres i.e. : c'est linéaire et :

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], (PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

de même l'application :

$$\mathbb{K}[X] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(E), P(X) \mapsto P(u)$$

est aussi un morphisme d'algèbres.

Démonstration : Si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + \dots$, alors $PQ(X) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \dots$. Donc :

$$\begin{aligned} (PQ)(A) &= a_0b_0I_n + (a_0b_1 + a_1b_0)A + \dots \\ &= (a_0I_n + a_1A + \dots)(b_0I_n + b_1A + \dots) \end{aligned}$$

$$= P(A)Q(A) .$$

q.e.d.

Remarque : [importante] En particulier, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

de même les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

EXEMPLE : — **Polynôme d'une diagonale :**

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

— **polynôme et conjugaison :** Si Q est inversible, si $A = QA'Q^{-1}$, alors pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = QP(A')Q^{-1}$.

Exercice 39 Montrer que plus généralement, pour une matrice triangulaire :

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ (les coefficients hors de la diagonale peuvent avoir une expression compliquée mais les coefficients diagonaux sont obtenus simplement en leur appliquant le polynôme P).

5.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 47 On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice A ou de l'endomorphisme u si $P(A) = 0$, ou si $P(u) = 0$.

EXEMPLE : — Si $p : E \rightarrow E$ est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p car $p^2 = p$.

— Si $r : E \rightarrow E$ est une réflexion, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de r car $r^2 = \text{Id}_E$.

Où chercher les valeurs propres, connaissant un polynôme annulateur mais ne connaissant pas le polynôme caractéristique ?

Proposition 5.2.1 Si P est un polynôme annulateur de u , respectivement de A , alors :

$$\text{Sp}(u) \subseteq \{ \text{racines de } P \}$$

respectivement

$$\text{Sp}(A) \subseteq \{ \text{racines de } P \} .$$

Démonstration : Si x est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ , alors :

$$u(x) = \lambda x \Rightarrow \forall k \geq 0, u^k(x) = \lambda^k x$$

et plus généralement :

$$Q(u)(x) = Q(\lambda)x$$

pour tout polynôme $Q(X)$. En particulier : $P(u)(x) = 0 \Rightarrow P(\lambda)x = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$ car $x \neq 0$. q.e.d.

Théorème 5.2.2 (de Cayley-Hamilton) Si E est de dimension finie,

$$\chi_u(u) = 0$$

de même $\chi_A(A) = 0$.

EXEMPLE : — Si :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ,$$

alors : $\chi_N(X) = X^n$ et $\chi_J(X) = X^n - 1$ et on a bien $N^n = 0$ et $J^n = I_n$.

Démonstration (s) du théorème :

1ère démonstration (algébrique) :

Notons $B(X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ la transposée de la comatrice de $XI_n - A$. Tous les coefficients de la matrice $B(X)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n - 1$. Il existe donc des matrices :

$$B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

telles que :

$$B(X) = B_0 + XB_1 + \dots + X^{n-1}B_{n-1} .$$

On a alors :

$$B(X)(XI_n - A) = \det(XI_n - A)I_n$$

$$\Leftrightarrow (B_0 + XB_1 + \dots + X^{n-1}B_{n-1})(XI_n - A) = \chi_A(X)I_n$$

(on développe la partie gauche)

$$\Leftrightarrow -B_0A + X(B_0 - B_1A) + X^2(B_1 - B_2A) + \dots + X^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + X^n B_{n-1}$$

$$(5.1) \quad = \chi_A(X)I_n$$

Notons $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ les coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = c_0 + \dots + c_n X^n$$

($c_0 = \pm \det A, c_n = 1$) On a donc d'après (5.1) :

$$-B_0A = c_0I_n$$

$$B_0 - B_1A = c_1I_n$$

$$\dots$$

$$B_{n-1} = c_nI_n$$

et donc :

$$\chi_A(A) = c_0I_n + c_1A + \dots + c_nA^n$$

$$\begin{aligned} &= -B_0A + (B_0 - B_1A)A + (B_1 - B_2A)A^2 + \dots + (B_{n-2}A^{n-1} - B_{n-1}A^n) + B_{n-1}A^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

car « tout se simplifie » .

2ème démonstration (avec les matrices compagnons) : On suppose E de dimension finie n . Soit u un endomorphisme de E . Soit v un vecteur non nul de E . Soit $1 \leq k \leq n$ le plus grand entier tel que la famille :

$$v, u(v), \dots, u^{k-1}(v)$$

soit libre. Alors forcément, la famille

$$v, u(v), \dots, u^{k-1}(v), u^k(v)$$

est liée et

$$u^k(v) + c_{k-1}u^{k-1}(v) + \dots + c_0v = 0$$

pour certains coefficients $c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{K}$.

Posons : $F := \langle v, u(v), \dots, u^{k-1}(v) \rangle$. C'est un sous-espace vectoriel de E (de dimension k) stable par u . De plus la matrice de la restriction $u|_F$ dans la base

$$v, u(v), \dots, u^{k-1}(v)$$

est la matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \text{---} & 0 & & -c_0 \\ & \diagdown & & & \\ 1 & & & & \\ & \diagdown & & & \\ 0 & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & & & 0 \\ & & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice compagon donc :

$$\chi_A(X) = X^k + c_{k-1}X^{k-1} + \dots + c_0 .$$

D'après le lemme 4.5.2, $\chi_A(X)$ divise $\chi_u(X)$ c-à-d :

$$\chi_u(X) = Q(X)\chi_A(X)$$

pour un certain polynôme $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \chi_u(u)(v) &= Q(u)\chi_A(u)(v) \\ &= Q(u)(u^k(v) + c_{k-1}u^{k-1}(v) + \dots + c_0v) \\ &= Q(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

finalement $\chi_u(u)(v) = 0$ pour tout vecteur v de E et $\chi_u(u) = 0$.

3ème démonstration (par les matrices triangulaires) :

Supposons que T est une matrice triangulaire :

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} .$$

Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On pose aussi :

$$V_k := \langle e_1, \dots, e_k \rangle$$

si $1 \leq k \leq n$ et $V_0 := 0$. On a alors :

$$\forall 1 \leq k \leq n, (T - t_k I_n)(V_k) \subseteq V_{k-1}$$

donc :

$$\begin{aligned} (T - t_1 I_n) \dots (T - t_n I_n)(\mathbb{K}^n) &= (T - t_1 I_n) \dots \underbrace{(T - t_n I_n)(V_n)}_{\subseteq V_{n-1}} \\ &\subseteq (T - t_1 I_n) \dots \underbrace{(T - t_{n-1} I_n)(V_{n-1})}_{\subseteq V_{n-2}} \\ &\subseteq (T - t_1 I_n) \dots \underbrace{(T - t_{n-2} I_n)(V_{n-2})}_{\subseteq V_{n-3}} \\ &\dots \subseteq (T - t_1 I_n)(V_1) \subseteq V_0 = 0 \end{aligned}$$

donc : $(T - t_1 I_n) \dots (T - t_n I_n) = 0$.

Or, $\chi_T(X) = (X - t_1) \dots (X - t_n)$. Donc :

$$\chi_T(T) = (T - t_1 I_n) \dots (T - t_n I_n) = 0 .$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que A est trigonalisable *c-à-d* :

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \exists T \text{ triangulaire supérieure, } A = PTP^{-1} .$$

Mais alors $\chi_T(X) = \chi_A(X)$ et :

$$\chi_A(A) = P\chi_A(T)P^{-1} = P\chi_T(T)P^{-1} = 0 .$$

q.e.d.

5.3 Polynômes annulateurs

Un *polynôme annulateur* d'un endomorphisme u de E est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Par exemple, en dimension finie : $\chi_u(X)$. Un *polynôme minimal* de u est un polynôme annulateur de u , non nul, de degré minimal.

EXEMPLE : Des polynômes minimaux des matrices :

$$O, I_n, N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

sont respectivement : $X, X - 1, X^n$.

Rappels sur la division euclidienne :

Soient P, Q deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$. Si $Q \neq 0$, alors il existe un unique couple (B, R) tels que :

$$B, R \in \mathbb{K}[X], P = BQ + R \text{ et } \deg R < \deg Q$$

(R peut éventuellement être nul).

Démonstration : Unicité : si $B_0Q + R_0 = B_1Q + R_1 = P$ et $\deg R_{0,1} < \deg Q$, alors $R_0 - R_1 = (B_0 - B_1)Q$ et $\deg(R_0 - R_1) < \deg Q$; donc forcément, $R_0 - R_1 = 0$ et $R_0 = R_1 \Rightarrow B_0 = B_1$.

Existence : On raisonne par récurrence sur le degré de P . Si $\deg P < \deg Q$, il suffit de choisir $B = 0$ et $R = P$. Sinon :

$$P = a_0 + \dots + a_p X^p, Q = b_0 + \dots + b_q X^q$$

avec $a_i, b_j \in \mathbb{K}$, $a_p, b_q \neq 0$, $p \geq q$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme

$$P - \frac{a_p}{b_q} X^{p-q} Q$$

dont le degré est $< \deg P$.

q.e.d.

*

Proposition 5.3.1 Soit $m_u(X)$ un polynôme minimal de u . Alors, m_u DIVISE TOUS LES POLYNÔMES ANNULATEURS DE u .

Démonstration : Si $P(u) = 0$, on fait la division euclidienne de P par m_u :

$$P = Bm_u + R$$

où $\deg R < \deg m_u$. On a :

$$0 = P(u) = \underbrace{B(u)m_u(u)}_{=0} + R(u) \Rightarrow R(u) = 0$$

et $R(X)$ est un polynôme annulateur de u de degré $< \deg m_u$. Forcément, $R = 0$ et $m_u(X)$ divise $P(X)$. q.e.d.

Il existe donc au plus un *unique* polynôme minimal *unitaire* (i.e. son coefficient de plus haut degré vaut 1) de u (*exo*) c'est LE polynôme minimal de u .

Remarque : Si E est de dimension finie, $\chi_u(X)$ est un polynôme annulateur de u (non nul) donc dans ce cas, le polynôme minimal existe toujours de plus :

$$m_u(X) \text{ divise } \chi_u(X)$$

dans $\mathbb{K}[X]$.

On définit de même les polynômes annulateurs et le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 40 Si E est de dimension finie, le polynôme minimal de u coïncide avec le polynôme minimal de sa matrice dans n'importe quelle base de E .

Proposition 5.3.2 Soit P un polynôme annulateur de u un endomorphisme de E . Alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $P(\lambda) = 0$. En particulier si le polynôme minimal m_u existe, $m_u(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de u .

Démonstration : Si $u(x) = \lambda x$, $0 \neq x \in E$. Alors, $0 = P(u)(x) = P(\lambda)x \Rightarrow P(\lambda) = 0$. q.e.d.

Proposition 5.3.3 Les racines de $m_u(X)$ sont exactement les valeurs propres de u c-à-d (si $m_u(X)$ existe) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad m_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(u) .$$

Démonstration : Il suffit de démontrer que si $m_u(\lambda) = 0$, alors λ est une valeur propre de u . Or dans ce cas, $m_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$ pour un certain polynôme $Q(X)$ de degré $< \deg m_u(X)$. Donc :

$$0 = m_u(u) = (u - \lambda \text{Id}_E)Q(u) .$$

Forcément $Q(u) \neq 0$ par minimalité de m_u . Donc $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injective et donc λ est une valeur propre de u . q.e.d.

Comment trouver le polynôme minimal d'une matrice ?

Théorème 5.3.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $m_1, \dots, m_r \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, sont deux à deux distincts. Alors :

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$$

pour certains entiers : $1 \leq k_i \leq m_i$, $i = 1, \dots, r$.

Démonstration : On note $k_1, \dots, k_r$ les multiplicités de $m_A(X)$ en les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. On a déjà vu que $1 \leq k_i$ car $m_A(\lambda_i) = 0$. On a aussi $k_i \leq m_i$, la multiplicité de λ_i dans $\chi_A(X)$. Il reste donc à démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.3.5 On suppose que le polynôme $P(X)$ divise le produit

$$(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

dans $\mathbb{K}[X]$ pour certains $\lambda_i \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et certains entiers $m_i \geq 1$. Alors si on note $k_1, \dots, k_r$ les multiplicités respectives des $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $P(X)$, on a :

$$P(X) = a_d (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$$

où a_d est le coefficient dominant de P .

Démonstration du lemme : On peut supposer P unitaire i.e. $a_d = 1$. On raisonne par récurrence sur $r \geq 0$. Si $r = 0$, il n'y a rien à montrer. Notons $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ le quotient par $P(X)$:

$$(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r} = P(X)Q(X) .$$

La multiplicité de λ_1 dans $Q(X)$ est : $m_1 - k_1$. Donc :

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \tilde{P}(X) \text{ et } Q(X) = (X - \lambda_1)^{m_1 - k_1} \tilde{Q}(X)$$

d'où :

$$(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r} = (X - \lambda_1)^{m_1} \tilde{P}(X) \tilde{Q}(X)$$

$$\Leftrightarrow (X - \lambda_1)^{m_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r} = \tilde{P}(X) \tilde{Q}(X)$$

et on applique l'hypothèse de récurrence.

q.e.d.

Remarque : Un cas particulier important à retenir : les diviseurs unitaires de $(X - \lambda)^n$ sont les $(X - \lambda)^d$ avec $0 \leq d \leq n$ (pour tous $n \geq 0, \lambda \in \mathbb{K}$).

q.e.d.

Exercice 41

A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi_A(X)$	X^4	X^4	X^4
$m_A(X)$	X^2	X^3	X^4

Exercice 42 (Polynôme minimal d'une diagonale) Soit

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors $m_D(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(D)} (X - \lambda)$ où $\text{Sp}(D) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et les valeurs propres sont comptées sans multiplicité.

Nouveau critère de diagonalisabilité

On dit qu'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est *scindé à racines simples* dans $\mathbb{K}$ s'il se factorise en :

$$P(X) = a_d (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$$

où $0 \neq a_d \in \mathbb{K}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts.

Théorème 5.3.6 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

Démonstration : $\Rightarrow$: Si A est diagonalisable, A est semblable à une diagonale. Or deux matrices semblables ont le même polynôme minimal (*exo*)

. Donc il suffit de calculer le polynôme minimal d'une matrice diagonale ce qui est l'objet d'un exercice précédent.

$\Leftarrow$: Si $m_A(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{m_A(X)}$ donne :

$$\frac{1}{m_A(X)} = \frac{a_1}{X - \lambda_1} + \dots + \frac{a_r}{X - \lambda_r}$$

où $a_i = \frac{1}{m'_A(\lambda_i)}$ pour tout i .

Donc

$$1 = a_1 Q_1(X) + \dots + a_r Q_r(X)$$

où pour tout i :

$$Q_i(X) = \frac{m_A(X)}{X - \lambda_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (X - \lambda_j)$$

est un polynôme. Si on applique cette égalité à la matrice A , on trouve :

$$I_n = a_1 Q_1(A) + \dots + a_r Q_r(A)$$

donc si $Z \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$Z = a_1 Q_1(A)(Z) + \dots + a_r Q_r(A)(Z)$$

or, pour tout $1 \leq i \leq r$, $Q_i(A)(Z) \in \ker(A - \lambda_i I_n)$ car :

$$(A - \lambda_i I_n)(Q_i(A)(Z)) = m_A(A)(Z) = 0 .$$

Par conséquent

$$\bigoplus_{i=1}^r \ker(A - \lambda_i I_n) = \mathbb{K}^n$$

et A est diagonalisable.

Remarque : on peut utiliser aussi le lemme des noyaux. Si $m_A(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, on a :

$$m_A(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{K}^n = \ker m_A(A) = \ker(A - \lambda_1 I_n) \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_r I_n)$$

car les polynômes $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux. En effet si $D(X)$ divise $X - \lambda_i$ et $X - \lambda_j$, $i \neq j$ dans $\mathbb{K}[X]$, alors $D(X)$ divise $X - \lambda_i - (X - \lambda_j) = \lambda_j - \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ donc $D(X)$ est constant. Donc A est diagonalisable.

q.e.d.

Lemme 5.3.7 (des noyaux) Soit u un endomorphisme de E .

Soient $P(X), Q(X)$ des polynômes premiers entre eux. Alors :

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)) .$$

Généralisation : soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors :

$$\ker(P_1 \dots P_r)(u) = \ker(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \ker(P_r(u))$$

(énoncés similaires avec des matrices)

Démonstration :

Rappels : On dit que $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux si :

$$D(X) \in \mathbb{K}[X] \text{ divise } P(X) \text{ et } Q(X) \text{ dans } \mathbb{K}[X] \Rightarrow D(X) \text{ constant !}$$

En particulier, sur $\mathbb{C}$, deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

Proposition 5.3.8 Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ alors :

$$P, Q \text{ sont premiers entre eux} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{K}[X], AP + BQ = 1 .$$

Démonstration : $\Leftarrow$: (exo) $\Rightarrow$: Soient $D \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré minimal parmi les polynômes de la forme

$$AP + BQ, A, B \in \mathbb{K}[X] .$$

Il suffit de montrer que D est constant. On a donc $D = AP + BQ$. On fait la division euclidienne de P par D :

$$P = CD + R$$

pour un certain $C \in \mathbb{K}[X]$ et un certain $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< \deg D$. Mais alors :

$$R = (1 - CA)P + (-CB)Q$$

donc par minimalité du degré de D , $R = 0$ et D divise P . De même D divise Q donc D est constant $= d \in K \setminus \{0\}$. D'où :

$$1 = \frac{A}{d}P + \frac{B}{d}Q .$$

q.e.d.

On écrit $1 = AP + BQ$ pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On a donc :

$$\text{Id}_E = P(u)A(u) + Q(u)B(u) .$$

Soit $x \in \ker((PQ)(u))$, alors :

$$x = P(u)A(u)(x) + Q(u)B(u)(x) .$$

Or,

$$P(u)Q(u)B(u)(x) = B(u)P(u)Q(u)(x) = 0 .$$

Donc $Q(u)B(u)(x) \in \ker(P(u))$. De même, $P(u)A(u)(x) \in \ker(Q(u))$.
Donc :

$$x \in \ker(P(u)) + \ker(Q(u)) .$$

Réciproquement, il est clair que

$$\ker(P(u)) \subseteq \ker((PQ)(u)) \text{ et } \ker(Q(u)) \subseteq \ker((PQ)(u)) .$$

Donc :

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) + \ker Q(u)$$

montrons que cette somme est directe : soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$. Alors :

$$x = A(u)P(u)(x) + B(u)Q(u)(x) = 0 .$$

Pour le cas général : on raisonne par récurrence sur r :
Montrons d'abord que :

$$\ker(P_1(u)) + \dots + \ker(P_r(u)) = \ker((P_1 \dots P_r)(u)) .$$

Soit $x \in \ker((P_1 \dots P_r)(u))$. Alors comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, on a :

$$1 = AP_1 + BP_2$$

pour certains polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Donc en appliquant cette égalité à u :

$$x = A(u)P_1(u)(x) + B(u)P_2(u)(x)$$

or : $A(u)P_1(u)(x) \in \ker(P_2 \dots P_r)(u)$ car :

$$(P_2 \dots P_r)(u)A(u)P_1(u)(x) = A(u)(P_1 \dots P_r)(u)(x) = 0 .$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$A(u)P_1(u)(x) \in \ker(P_2(u)) + \dots + \ker(P_r(u))$$

et de même :

$$B(u)P_2(u)(x) \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_3(u)) + \dots + \ker(P_r(u))$$

et donc :

$$x = A(u)P_1(u)(x) + B(u)P_2(u)(x) \in \ker(P_1(u)) + \dots + \ker(P_r(u)) .$$

Il reste à montrer que cette somme est directe :

Supposons que

$$x_1 + \dots + x_r = 0$$

pour certains $x_1 \in \ker(P_1(u)), \dots, x_r \in \ker(P_r(u))$. si on applique $P_1(u)$, on trouve :

$$P_1(u)(x_2) + \dots + P_1(u)(x_r) = 0$$

Or, $P_1(u)(x_2) \in \ker(P_2(u)), \dots, P_1(u)(x_r) \in \ker(P_r(u))$ donc par hypothèse de récurrence :

$$P_1(u)(x_2) = \dots = P_1(u)(x_r) = 0$$

Or : $\ker P_1(u) \cap \ker P_i(u) = 0$ si $i > 1$ car P_1 et P_i sont premiers entre eux!.
Donc :

$$x_2 = \dots = x_r = 0$$

et forcément, $x_1 = 0$.

q.e.d.

Corollaire 5.3.8.1 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 5.3.8.2 Soit u un endomorphisme de E diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Si F est un sous-espace de E stable par u , alors la restriction $u|_F$ est encore diagonalisable.

Démonstration : En effet,

$$m_u(u) = 0 \Rightarrow m_u(u|_F) = 0 \Rightarrow m_{u|_F} \text{ divise } m_u$$

mais si m_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, tous ses diviseurs le sont aussi (cf. le lemme 5.3.5).

q.e.d.

Chapitre 6

Décomposition spectrale

Soient $E = \mathbb{K}$ –espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Objectif : (si E est de dimension finie) construire une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\text{Mat}(u)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_p \end{pmatrix}$$

où les T_i sont des blocs triangulaires supérieures avec diagonale constante.

6.1 Sous-espaces caractéristiques

Définition 48 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Un vecteur propre généralisé de u de poids λ est un vecteur $v \in E$ tel que :

$$(u - \lambda \text{Id}_E)^m v = 0$$

pour un certain entier $m \geq 0$. Le plus petit entier m de la sorte est appelé la hauteur de v .

En particulier, les vecteurs propres sont des vecteurs propres généralisés de hauteur 1. Il est bien pratique de considérer le vecteur nul comme un vecteur propre généralisé de hauteur 0 pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

EXEMPLE : Soit $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ –espace vectoriel des fonctions réelles infiniment dérivables. Considérons l'endomorphisme de dérivation $u := D : E \rightarrow E, f \mapsto f'$. Les vecteurs propres associés à $\lambda \in \mathbb{R}$ sont les fonctions (non nulles) proportionnelles à $e^{\lambda x}$ et les vecteurs propres généralisés sont

les fonctions de la forme $p(x)e^{\lambda x}$ pour un certain polynôme $p(x)$ (en effet, si $f = e^{\lambda x}g$, alors :

$$(D - \lambda \text{Id}_E)^m(f) = e^{\lambda x} g^{(m)} = 0 \Leftrightarrow g^{(m)} = 0$$

$$\Leftrightarrow g \text{ est un polynôme de degré } \leq m - 1 .$$

La hauteur d'une telle fonction $e^{\lambda x}p(x)$ est $\deg p + 1$. En particulier, les polynômes sont les vecteurs propres généralisés associés à 0.

Remarque :

Si v est un vecteur propre généralisé de hauteur m associé à $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$(u - \lambda \text{Id}_E)^{m-1}v$$

est un vecteur propre de poids (*c-à-d* de valeur propre) λ . Donc λ est une racine du polynôme caractéristique (si E est de dimension finie).

Exercice 43 (important) *L'ensemble des vecteurs propres généralisés de poids λ et de hauteur $\leq m$ est un sous-espace de E , stable par u : c'est exactement $\ker(u - \lambda \text{Id}_E)^m$.*

On a une chaîne croissante de sous-espaces stables :

$$\ker(u - \lambda \text{Id}_E) \subseteq \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^2 \subseteq \dots$$

Définition 49 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Le sous-espace caractéristique de u de poids λ est la réunion :*

$$E^\lambda(u) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^n$$

c-à-d :

$$E^\lambda(u) = \{v \in E : \exists m \geq 0, (u - \lambda \text{Id}_E)^m(v) = 0\}$$

c'est un sous-espace de E stable par u .

Remarque :

La suite des dimensions est croissante :

$$\dim \ker(u - \lambda \text{Id}_E) \leq \dim \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^2 \leq \dots$$

En dimension finie, cette suite est stationnaire donc il existe un entier m tel que : $E^\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^m$.

Nous allons maintenant voir pourquoi cette notion de sous-espace caractéristique est importante.

Rappelons que pour tout λ , le sous-espace $E^\lambda(u)$ est stable par u et donc par tout polynôme en u .

Lemme 6.1.1 *i) Si $\dim E^\lambda(u) < \infty$, alors il existe une base de $E^\lambda(u)$ où la matrice de la restriction $u|_{E^\lambda(u)}$ est triangulaire supérieure avec λ sur la diagonale :*

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

ii) Pour tous $\mu \neq \lambda$, $(u - \mu \text{Id}_E)^m$ est injectif sur $E^\lambda(u)$.

Démonstration : i) Soit $k := \dim(E^\lambda)$.

Notons $V_i := \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^i$ pour tout $i \geq 0$. (Donc $V_0 = \{0\}$).

Soit $m \geq 0$ le plus petit entier tel que $V_m = V_{m+1}$; Alors :

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_m = V_{m+1}$$

de plus :

$$v \in V_{m+2} \Leftrightarrow (u - \lambda \text{Id}_E)^{m+2}v = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - \lambda \text{Id}_E)v \in V_{m+1}$$

$$\Leftrightarrow (u - \lambda \text{Id}_E)v \in V_m$$

$$\Leftrightarrow v \in V_{m+1}$$

donc $V_m = V_{m+1} = V_{m+2} = V_{m+3} = \dots = E^\lambda$.

Soit $e_1, \dots, e_{k_1}$ une base de $V_1 = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$ que l'on complète en une base $e_1, \dots, e_{k_2}$ de $V_2 = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^2$, que l'on complète enetc, que l'on complète en $e_1, \dots, e_{k_m}$ une base de E^λ .

On a alors : $k_1 < k_2 < \dots < k_m = k$ et pour tout $0 \leq i \leq m$:

$$V_i = \langle e_1, \dots, e_{k_i} \rangle.$$

Or pour tout $i \geq 1$:

$$(u - \lambda \text{Id}_E)(V_i) \subseteq V_{i-1}$$

en particulier,

$$\forall k_{i-1} < j \leq k_i, u(e_j) = \lambda e_j \text{ mod } \langle e_1, \dots, e_{k_{i-1}} \rangle$$

et la matrice de la restriction

$$u|_{E^\lambda}$$

dans la base $e_1, \dots, e_{k_m}$ est triangulaire de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

ii) Il suffit de montrer que $(u - \mu \text{Id}_E)$ est injectif sur $E^\lambda(u)$ c-à-d :

$$\ker(u - \mu \text{Id}_E) \cap E^\lambda(u) = 0$$

or, si $(u - \mu \text{Id}_E)(x) = 0$ et $x \in E^\lambda(u)$, alors :

$$(u - \lambda \text{Id}_E)(x) = (u - \mu \text{Id}_E)(x) + (\mu - \lambda)x$$

$$= (\mu - \lambda)x$$

$$\forall l \geq 0, (u - \lambda \text{Id}_E)^l(x) = (\mu - \lambda)^l x$$

$$\Rightarrow (\mu - \lambda)^l x = 0$$

pour l assez grand car $x \in E^\lambda(u)$. Donc $x = 0$, car $\mu \neq \lambda$.

q.e.d.

Proposition 6.1.2 *Si E est de dimension finie, alors le sous-espace caractéristique de u de poids λ est de dimension la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$:*

$$\dim E^\lambda(u) = m_a(\lambda) .$$

Démonstration : Soit $e_1, \dots, e_k$ une base de $E^\lambda(u) =: E^\lambda$ où la matrice de la restriction $u|_{E^\lambda(u)}$ est de la forme :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \dots \\ \hline & \ddots \\ & \lambda \end{array} \right) .$$

Donc $\chi_{u|_{E^\lambda}}(X) = (X - \lambda)^k$.

On complète la base $e_1, \dots, e_k$ en :

$$e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$$

une base de E .

Remarquons que E^λ est stable par u en effet :

$$(u - \lambda \text{Id}_E)^m(v) = 0 \Rightarrow (u - \lambda \text{Id}_E)^m.u(v) = u.(u - \lambda \text{Id}_E)^m(v) = 0 .$$

Dans cette base, la matrice de u est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} B & ? \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

où $D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$.

Donc :

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^k \chi_D(X)$$

il reste donc à montrer que $\chi_D(\lambda) \neq 0$. Sinon, il existerait $0 \neq w \in \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ tel que : $Dw = \lambda w$.

Mais alors :

$$u(w) = \lambda w + y$$

avec $y \in E^\lambda$. Donc :

$$\begin{aligned} (u - \lambda \text{Id}_E)w &\in E^\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)^m \\ &\Rightarrow (u - \lambda \text{Id}_E)^{m+1}w = 0 \\ &\Rightarrow w \in E^\lambda \cap \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle \\ &\Rightarrow w = 0 \end{aligned}$$

contradiction !

q.e.d.

Proposition 6.1.3 *Les sous-espaces caractéristiques de poids distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont en somme directe*

Démonstration : Soient $v_1, \dots, v_r$ tels que :

$$v_1 + \dots + v_r = 0$$

et $v_i \in E^{\lambda_i}$ pour tout i .

Pour tout i , il existe un entier k_i tel que :

$$v_i \in \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i}$$

il suffit donc de vérifier que les polynômes $(X - \lambda_i)^{k_i}$ sont deux à deux premiers entre eux car alors : les sous-espaces $\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i}$ sont en somme directe d'après le lemme des noyaux et $v_1 = \dots = v_r = 0$. Nous allons montrer que $P(X) = (X - \lambda)^m$, $Q(X) = (X - \mu)^n$, m, n entiers ≥ 1 , $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$ sont premiers entre eux. Soit $c := \frac{1}{\mu - \lambda}$. On a :

$$1 = c((X - \lambda) - (X - \mu))$$

en élevant à la puissance $m + n - 1$:

$$1 = c^{m+n-1}(r(X)(X - \lambda)^m + s(X)(X - \mu)^n)$$

pour certains polynômes $r(X), s(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs $\leq n - 1$ et $\leq m - 1$ (*exo*) (utiliser la formule du binôme). Donc, $P(X)$ et $Q(X)$ sont premiers entre eux. q.e.d.

Théorème 6.1.4 *Supposons E de dimension finie. Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors :*

$$E = \oplus_{i=1}^r E^{\lambda_i}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les racines distinctes de $\chi_u(X)$.

Démonstration : On a déjà vu que la somme est directe. Si $\chi_u(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$, alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ donc :

$$E = \oplus_i \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i} \subseteq \oplus_i E^{\lambda_i} .$$

q.e.d.

Interprétation géométrique des multiplicités du polynôme minimal

Supposons que E est de dimension finie et que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, comme le polynôme minimal $m_u(X)$ de u divise $\chi_u(X)$, $m_u(X)$ est aussi scindé sur $\mathbb{K}$. Factorisons-le :

$$m_u(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$$

pour certains $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et certains entiers $k_i \geq 1$.

Théorème 6.1.5 *Pour tout $1 \leq i \leq r$, k_i est aussi le plus petit entier m tel que*

$$\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^m = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m+1} (= E^{\lambda_i})$$

Démonstration : Notons m_i le plus petit entier m tel que

$$\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^m = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m+1} ,$$

pour tout i . Alors :

$$E = \oplus_i E^{\lambda_i} = \oplus_i (\ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i})$$

donc :

$$(u - \lambda_1 \text{Id}_E)^{m_1} \dots (u - \lambda_r \text{Id}_E)^{m_r} = 0$$

et le polynôme $(X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ annule u donc :

$$m_u(X) \text{ divise } (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

et $k_i \leq m_i$ pour tout i .

D'un autre côté, $m_u(u) = 0 \Rightarrow$

$$\bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i} = E .$$

Soit $x \in E^{\lambda_i}$. Il existe $x_1 \in \ker(u - \lambda_1)^{k_1}, \dots, x_r \in \ker(u - \lambda_r)^{k_r}$ tels que :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \dots + x_r \\ \Rightarrow x - x_i &\in E^{\lambda_i} \cap \left(\bigoplus_{j \neq i}^r \ker(u - \lambda_j \text{Id}_E)^{k_j} \right) \\ &\subseteq E^{\lambda_i} \cap \left(\bigoplus_{j \neq i}^r E^{\lambda_j} \right) = \{0\} \end{aligned}$$

Donc $x = x_i \in \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i}$. D'où :

$$E^{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i} \subseteq \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i}$$

et donc $k_i \geq m_i$.

q.e.d.

6.2 Projecteurs spectraux

Supposons E de dimension finie n et le polynôme $\chi_u(X)$ scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $1 \leq m_i$ et $m_1 + \dots + m_r = n$. Rappelons que

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E^{\lambda_i} .$$

Définition 50 Pour toute valeur propre λ_i , on note π_{λ_i} ou π_i la projection sur le sous-espace E^{λ_i} parallèlement au sous-espace :

$$\bigoplus_{j \neq i}^r E^{\lambda_j}$$

autrement dit si $x = x_1 + \dots + x_r$ où chaque $x_i \in E^{\lambda_i}$, $\pi_i(x) = x_i$, autrement dit (encore) :

$$\pi_i(x) = x \text{ si } x \in E^{\lambda_i} \text{ et } 0 \text{ si } x \in E^{\lambda_j}, i \neq j.$$

Les π_i sont les projecteurs spectraux de u .

Propriétés :

- les π_i sont linéaires ;
- $\pi_1 + \dots + \pi_r = \text{Id}_E$;
- $\forall i \neq j, \pi_i \pi_j = 0$;
- $\forall i, \pi_i^2 = \pi_i$;
- $\text{Im } \pi_i = E^{\lambda_i}$;
- $\ker \pi_i = \bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} E^{\lambda_j}$.

Remarque : Si $m_u(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$, alors

$$E^{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i}$$

pour tout i .

Proposition 6.2.1 *Les projecteurs spectraux sont des polynômes en u .*

Démonstration : En effet, soit $1 \leq i \leq r$. Posons :

$$Q_i(X) := \frac{m_u(X)}{(X - \lambda_i)^{k_i}} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (X - \lambda_j)^{k_j} \in \mathbb{K}[X] .$$

Comme $Q_i(\lambda_i) \neq 0$,

$$Q_i(X) = a_0 + a_1(X - \lambda_i) + a_2(X - \lambda_i)^2 + \dots$$

pour certains coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{K}$ tels que $a_0 \neq 0$. On peut alors trouver

$$U_i(X) = b_0 + b_1(X - \lambda_i) + \dots + b_{k_i-1}(X - \lambda_i)^{k_i-1} \in \mathbb{K}[X]$$

un polynôme de degré $< k_i$ tel que :

$$1 = (a_0 + a_1(X - \lambda_i) + a_2(X - \lambda_i)^2 + \dots)(b_0 + b_1(X - \lambda_i) + \dots + b_{k_i-1}(X - \lambda_i)^{k_i-1}) \bmod (X - \lambda_i)^{k_i}$$

$$c\text{-à-d} : 1 = Q_i(X)U_i(X) \bmod (X - \lambda_i)^{k_i} .$$

Il suffit alors de remarquer que :

$$\pi_i = (U_i Q_i)(u)$$

en effet :

$$\text{si } x \in E^{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i}, \text{ alors } (U_i Q_i)(u)(x) = \text{Id}_E(x) = x$$

$$\text{si } x \in E^{\lambda_j} = \ker(u - \lambda_j \text{Id}_E)^{k_j}, j \neq i, \text{ alors } (U_i Q_i)(u)(x) = 0 .$$

Remarque : Le polynôme $1 - U_1(X)Q_1(X) - \dots - U_r(X)Q_r(X)$ est de degré $< k_1 + \dots + k_r$. Or, pour tout i , la multiplicité de λ_i dans le polynôme :

$$1 - U_1(X)Q_1(X) - \dots - U_r(X)Q_r(X)$$

est $\geq k_i$ (car si $j \neq i$, $(X - \lambda_i)^{k_i}$ divise $Q_j(X)$), donc :

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - U_1(X)Q_1(X) - \dots - U_r(X)Q_r(X) \\ &\Leftrightarrow 1 = U_1(X)Q_1(X) + \dots + U_r(X)Q_r(X) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{m_u(X)} = \frac{U_1(X)}{(X - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{U_r(X)}{(X - \lambda_1)^{k_r}}. \end{aligned}$$

q.e.d.

6.3 Décomposition de Dunford-Jordan

Un endomorphisme N de E est nilpotent si $N^k = 0$ pour un certain $k \geq 0$.

Théorème 6.3.1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) tels que :

- 0) $d, n \in \mathcal{L}(E)$;
 - i) d diagonalisable, n nilpotent ;
 - ii) $dn = nd$;
 - iii) $u = d + n$.
- De plus, d, n sont des polynômes en u .

Cette décomposition

$$u = d + n$$

est appelée décomposition de Dunford-Jordan.

Remarque : Même énoncé avec une matrice A à la place de u .

Démonstration :

soient π_i les projecteurs spectraux de u .

— **existence :** $d := \lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_r \pi_r$, $n := u - d$.

Pour tout $x \in E^{\lambda_i}$, $d(x) = \lambda_i x$. Donc

$$E^{\lambda_i} \subseteq \ker(d - \lambda_i \text{Id}_E)$$

et :

$$E = \oplus_i \ker(d - \lambda_i \text{Id}_E)$$

et d est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que u .

Pour tout $x \in E^{\lambda_i}$,

$$\begin{aligned} n(x) &= u(x) - d(x) \\ &= (u - \lambda_i \text{Id}_E)(x) \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$n^k(x) = (u - \lambda_i)^k(x) .$$

Donc si $k \geq \max_{1 \leq i \leq r} \{k_i\}$, $n^k(x) = 0$.

On a construit d et n comme des polynômes en u ce qui est important pour la suite.

Lemme 6.3.2 *Soit $(d_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables qui commutent deux à deux. Si E est de dimension finie alors il existe une base commune de diagonalisation.*

Démonstration : Si tous les d_α sont des homothéties, c'est évident. Sinon on raisonne par récurrence sur $\dim E$ et on choisit un d_{α_0} qui n'est pas une homothétie. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Alors pour tout i , $V_i := \ker(d_{\alpha_0} - \lambda_i)$ est un sous-espace de E de dimension $< \dim E$ (car d_{α_0} n'est pas une homothétie) et chaque V_i est stable par d_α pour tout α (car $d_\alpha d_{\alpha_0} = d_{\alpha_0} d_\alpha$). Par hypothèse de récurrence il existe une base $\mathcal{B}_i$ de V_i formée de vecteurs propres communs à tous les d_α . La réunion :

$$\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$$

est alors une base de $V_1 \oplus \dots \oplus V_r = E$, une base de diagonalisation pour tous les d_α . q.e.d.

— **unicité** : supposons que $u = d' + n'$ avec d' diagonalisable, n' nilpotent et $d'n' = n'd'$. Alors : $d' - d = n - n'$. Or n' commute avec d' et n' donc avec $u = d' + n'$ et avec n qui est un polynôme en u . On en déduit que $n' - n$ est nilpotent (*exo*) .

De même, d' commute avec u donc d' laisse stable chaque $E^{\lambda_i} = \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{k_i}$. Mais alors

$$d'|_{E^{\lambda_i}}$$

est diagonalisable et :

$$(d' - d)|_{E^{\lambda_i}} = (d' - \lambda_i \text{Id}_E)|_{E^{\lambda_i}}$$

est diagonalisable et nilpotent donc nul (nilpotent $\Rightarrow$ la seule valeur propre est 0 et diagonalisable avec pour seule valeur propre 0 $\Rightarrow$ nul). Donc $d' = d$ sur chaque E^{λ_i} , comme $E = \bigoplus_i E^{\lambda_i}$, par linéarité, $d' = d$. On a aussi : $n' = u - d' = u - d = n$.

q.e.d.**À retenir :**

— $d = \lambda_1 \pi_1 + \dots \lambda_r \pi_r$ et les valeurs propres de u sont les valeurs propres de d .

— diagonalisable et nilpotent $\Rightarrow$ nul.

Exercice 44 $\chi_u(X) = \chi_d(X)$.**Proposition 6.3.3** u diagonalisable $\Leftrightarrow u = d$ ssi $n = 0$; u nilpotent $\Leftrightarrow u = n$ ssi $d = 0$.

Démonstration : C'est une conséquence directe de la décomposition de Dunford-Jordan. q.e.d.

EXEMPLE :

$$\text{— si } A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, D = \lambda I_n \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{— ATTENTION! si } u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, d = u, n = 0.$$

6.4 Calcul pratique des projecteurs spectraux

6.4.1 Méthode

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que $Q \neq 0$ est un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$ (en particulier χ_u est scindé!) (Plus le degré de Q est bas moins compliqués sont les calculs).

1ère étape : Factoriser Q :

$$Q = (X - \lambda_1)^{l_1} \dots (X - \lambda_r)^{l_r}$$

 λ_i deux à deux $\neq$ et $l_i \geq 1$.**2ème étape** : Décomposer $\frac{1}{Q}$ en éléments simples :

$$(*) \quad \frac{1}{Q} = \frac{R_1(X)}{(X - \lambda_1)^{l_1}} + \dots$$

où $R_i(X)$: polynômes de degré $< l_i$ (une telle décomposition est unique).**3ème étape** : $\pi_{\lambda_i} = R_i(u)Q_i(u)$ où $Q_i(X) := \frac{Q(X)}{(X - \lambda_i)^{l_i}} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)^{l_j}$.

justification : la décomposition $(*)$ multipliée par Q donne une relation de Bézout :

$$1 = R_i(X)Q_i(X) + (X - \lambda_i)^{l_i}S(X)$$

pour un certain polynôme $S(X)$.

6.4.2 Exemples

a) cas où u diagonalisable avec seulement 2 valeurs propres :
si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on sait que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 0, 3. Les projecteurs spectraux associés π_0, π_1 vérifient :

$$\pi_0 + \pi_3 = I_3 \text{ et } 3\pi_3 = D = A$$

donc :

$$\pi_3 = \frac{1}{3}A \text{ et } \pi_0 = I_3 - \frac{1}{3}A$$

b)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = m_A(X) = (X - 1)(X - 2)^2$$

$$\frac{1}{m_A(X)} = \frac{1}{X - 1} + \frac{3 - X}{(X - 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{m_A(X)}{X - 1} + \frac{m_A(X)(3 - X)}{(X - 2)^2}$$

donc :

$$\pi_1 = \left(\frac{m_A(X)}{X - 1} \right) (A) = (A - 2I_3)^2 \text{ et } \pi_2 = \left(\frac{m_A(X)(3 - X)}{(X - 2)^2} \right) (A) = -A^2 + 4A - 3I_3.$$

6.5 Réduction de Jordan

Nous allons montrer que toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs « presque » diagonaux.

6.5.1 Blocs de Jordan

Définition 51 *Un bloc de Jordan est une matrice de la forme :*

$$J_{\lambda,n} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \lambda & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

où $\lambda \in \mathbb{K}, n \geq 0$.

On a :

$$(J_{\lambda,n} - \lambda I_n)^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ si } 0 \leq k \leq n-1$$

et $(J_{\lambda,n} - \lambda I_n)^k = 0$ si $n < k$.

On a aussi $J_{\lambda,n} - \mu I_n$ inversible si $\mu \neq \lambda$.

Exercice 45 *Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un bloc de Jordan sont égaux à $(X - \lambda)^n$.*

Définition 52 *Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Exercice 46 *Une matrice de Jordan est diagonalisable si et seulement si ses blocs sont tous de taille 1.*

6.5.2 Matrices nilpotentes

Supposons que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit u un endomorphisme de E .

Définition 53 Soit $e \in E$. On appelle hauteur de e , notée $h(e)$, le plus petit entier $m \geq 0$ tel que $u^m(e) = 0$.

Lemme 6.5.1 Si $e \in E$ un vecteur de hauteur m . Alors

$$e, u(e), \dots, u^{m-1}(e)$$

sont linéairement indépendants.

Démonstration : Supposons que

$$\lambda_0 e + \dots + \lambda_{m-1} u^{m-1}(e) = 0$$

et que λ_k est le premier coefficient $\neq 0$, $0 \leq k \leq m-1$. Alors si on allieue u^{m-k-1} , on trouve :

$$\lambda_k u^{m-1}(e) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k = 0$$

car $u^{m-1}(e) \neq 0$ absurdo.

q.e.d.

Corollaire 6.5.1.1 On a forcément, $u^{\dim E} = 0$ pour tout endomorphisme nilpotent de E .

Définition 54 On dit que le sous-espace $\langle e, u(e), \dots, u^{m-1}(e) \rangle$ est le sous-espace cyclique de u engendré par e .

Un sous-espace cyclique est invariant par u (exo) et la restriction de u au sous-espace cyclique :

$$\langle e, u(e), \dots, u^{m-1}(e) \rangle$$

a pour matrice

$$J_{0,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & 1 \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

dans la base

$$u^{m-1}(e), \dots, u(e), e \text{ .}$$

Remarque : [importante] Soit e un vecteur de hauteur m . Un vecteur x du sous-espace cyclique

$$\langle e, u(e), \dots, u^{m-1}(e) \rangle$$

qui n'est pas dans l'image de u est de hauteur m .

En effet, si

$$x = \lambda_0 e + \dots + \lambda_{m-1} u^{m-1}(e)$$

avec $\lambda_0 \neq 0$, $u^m(x) = 0$ et $u^{m-1}(x) = \lambda_0 u^{m-1}(e) \neq 0$.

Théorème 6.5.2 *L'espace E est une somme directe de sous-espaces cycliques de l'opérateur u :*

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r \text{ .}$$

En particulier, il existe une base de E où la matrice de u est une matrice de Jordan de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{0,n_r} \end{array} \right) \text{ .}$$

Et le nombre r de composantes est $r = \dim \ker u$

Démonstration : Supposons que E est une somme directe de sous-espaces cycliques

$$E_i = \langle e_i, \dots, u^{n_i-1}(e_i) \rangle$$

alors, la matrice de u dans la base :

$$u^{n_1-1}(e_1), \dots, e_1, u^{n_2-1}(e_2), \dots, e_2, \dots, u^{n_r-1}(e_r), \dots, e_r$$

est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{0,n_r} \end{array} \right)$$

donc :

$$\begin{aligned} \text{rang } u &= \text{rang } J_{0,n_1} + \dots + \text{rang } J_{0,n_r} \\ (n_1 - 1) + \dots + (n_r - 1) &= \dim E - r \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow r = \dim E - \text{rang} u = \dim \ker u .$$

Démontrons par récurrence sur $n = \dim E \geq 0$ que E est une somme directe de sous-espaces cycliques. Si $n = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons que $n > 0$.

Comme u n'est pas surjective (*exo*) , il existe un sous-espace de E , disons H , de dimension $n - 1$ tel que :

$$\text{Im } u \subseteq H .$$

Ce H est stable par u . Par hypothèse de récurrence,

$$H = H_1 \oplus \dots \oplus H_r$$

où les H_i sont des sous-espaces cycliques de $u|_H$ (donc de u). On choisit un vecteur $e \in E \setminus H$.

On a :

$$u(e) = u_1 + \dots + u_r, \forall i, u_i \in H_i .$$

Si pour un certain i , $u_i = u(v_i)$, avec $v_i \in H_i$, alors on remplace e par $e - v_i \in E \setminus H$. On peut donc supposer que pour tout $i = 1$ à r , $u_i = 0$ ou $u_i \in H_i \setminus u(H_i)$. C'est-à-dire : $u_i = 0$ ou H_i est cyclique engendré par u_i .

Si $u(e) = 0$, alors :

$$E = \mathbb{K}e \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_r$$

est une décomposition de E en sous-espaces cycliques.

Si $u(e) \neq 0$, alors :

$$0 < h(u(e)) = \max_i h(u_i)(\text{exo}) .$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer que

$$h(u(e)) = h(u_1) =: m .$$

Mais alors : $h(e) = m + 1$. Vérifions que

$$E = \langle e, u(e), \dots, u^m(e) \rangle \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_r .$$

Comme $h(u_1) = \dim H_1 = m$, on a :

$$\dim E = \dim H + 1 = (m + 1) + \dim H_2 + \dots + \dim H_r$$

et il suffit de démontrer que

$$\langle e, \dots, u^m(e) \rangle \cap (H_2 \oplus \dots \oplus H_r) = 0 .$$

Si $\lambda_0 e + \dots + \lambda_m u^m(e) \in H_2 \oplus \dots \oplus H_r$, alors, comme $e \notin \text{Im } u$, $\lambda_0 = 0$.
Or, $u(e) = u_1 + \dots + u_r$ donc :

$$\begin{aligned}\lambda_1 u(e) + \dots + \lambda_m u^m(e) &= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u^{m-1}(u_1) \bmod H_2 \oplus \dots \oplus H_r \\ \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u^{m-1}(u_1) &\in H_1 \cap (H_2 \oplus \dots \oplus H_r) = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \dots = \lambda_m = 0\end{aligned}$$

car $h(u_1) = m$.

q.e.d.

6.5.3 Réduction de Jordan

Théorème 6.5.3 Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique, $\chi_u(X)$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$.

Existence : il existe une base de E où la matrice de u est de Jordan i.e. :

$$\text{Mat}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_r \end{array} \right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Version matricielle : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors, A est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice de Jordan.

Unicité : le nombre de blocs de Jordan de la forme $J_{\lambda,m}$ noté :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall m \geq 1, N_{\lambda,m} := \{1 \leq i \leq r : J_i = J_{\lambda,m}\}$$

ne dépend que de u (ou de A) :

les λ qui apparaissent sont les valeurs propres de u (ou de A) et plus précisément, on a :

$$N_{\lambda,m} = \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m+1} - 2\text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)^m + \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m-1}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $m \geq 1$.

Remarque : En particulier, ce théorème s'applique à TOUTES les matrices complexes.

Démonstration : Existence : notons $E^{\lambda_1}, \dots, E^{\lambda_r}$ les sous-espaces propres généralisés de u . Alors chaque E^{λ_i} est stable par u et E se décompose en :

$$E = E^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E^{\lambda_r} .$$

De plus , pour tout i ,

$$u|_{E^{\lambda_i}} - \lambda_i \text{Id}_{E^{\lambda_i}}$$

est nilpotent. On peut donc appliquer le théorème 6.5.2 à $u|_{E^{\lambda_i}} - \lambda_i \text{Id}_{E^{\lambda_i}}$ pour tout i . Et on remarque que :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{0,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{0,n_r} \end{array} \right) + \lambda I_{n_1+\dots+n_r} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{\lambda,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{\lambda,n_r} \end{array} \right).$$

Unicité : remarquons que :

$$\text{rg}(J_{\lambda,n} - \mu I_n)^k = \begin{cases} n & \text{si } \mu \neq \lambda \\ n - k & \text{si } \mu = \lambda \text{ et } 0 \leq k \leq n - 1 \\ 0 & \text{si } \mu = \lambda \text{ et } n \leq k \end{cases}$$

donc si la matrice de u dans une certaine base est une matrice de Jordan :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{\lambda_1,n_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & J_{\lambda_r,n_r} \end{array} \right)$$

alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)^k &= \sum_{q=1}^r \text{rg}(J_{\lambda_q,n_q} - \lambda I_{n_q})^k \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q=\lambda, n_q > k}}^r (n_q - k) + \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q \neq \lambda}}^r n_q \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)^{k-1} - \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)^k &= \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q=\lambda, n_q > k-1}}^r ((n_q - (k-1)) - (n_q - k)) \\ &= \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda_q=\lambda, n_q \geq k}}^r 1 \end{aligned}$$

et finalement :

$$(\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{k-1} - \operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^k) - (\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^k - \operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{k+1}) = \sum_{\substack{q=1 \\ \lambda q = \lambda, n_q = k}}^r 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{k+1} - 2\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^k + \operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{k-1} = N_{\lambda, k} .$$

q.e.d.

Applications

— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A est semblable à ${}^t A$. En effet, il suffit de le vérifier lorsque A est un bloc de Jordan (*exo*) .

— Si $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors N est semblable à une et une seule des 5 matrices suivantes :

$$0, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il y a une infinité de matrices nilpotentes 4×4 mais il n'y en a que 5 à similitude près.

— Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ a pour polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = (X - 1)(X - 2)^2$ alors A est semblable

$$\text{à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Chapitre 7

Puissances

7.1 Motivation

— Problème : résoudre

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1} \\ v_n = cv_{n-1} + du_{n-1} \end{cases}$$

où a, b, c, d sont fixés ou bien :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$$

où a, b sont fixés.

Ces deux problèmes se réduisent au calcul de A^k où :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} .$$

7.2 Cas diagonalisable

— cas diagonal : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors :

$$\forall k \geq 0, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} .$$

— cas diagonalisable : si $A = PDP^{-1}$ avec $A, P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, D diagonale, P inversible, alors :

$$A^k = PD^kP^{-1} .$$

C'est encore plus simple avec les projecteurs spectraux :

$$\text{si } A = \lambda_1\pi_1 + \dots + \lambda_r\pi_r$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les π_i les projecteurs spectraux associés, alors :

$$\forall k \geq 0, A^k = \lambda_1^k\pi_1 + \dots + \lambda_r^k\pi_r$$

c'est vrai aussi pour k entier négatif lorsque tous les λ_i sont non nuls.

EXEMPLE : Si

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \text{---} & 1 \\ & \diagdown & \\ 1 & \text{---} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$$

alors les valeurs propres de A sont 0 et n , et :

$$A = n\pi_n \Rightarrow \forall k, A^k = n^k\pi_n = n^{k-1}A .$$

Exercice 47 — Si $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, alors :

$$A = e^{-it}\pi_- + e^{it}\pi_+$$

où :

$$\pi_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pi_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} .$$

Vérifier alors que :

$$A^k = e^{-ikt}\pi_- + e^{ikt}\pi_+ = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix} .$$

— Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{k-1} - \alpha'^{k-1} & \alpha^k - \alpha'^k \\ \alpha^k - \alpha'^k & \alpha^{k+1} - \alpha'^{k+1} \end{pmatrix}$$

où $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha' := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 48 Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit ρ l'unique valeur propre réelle de A et π_ρ le projecteur spectral associé.

a) Vérifier que $\pi_\rho = \frac{1}{3\rho^2-1} \begin{pmatrix} \rho^2 & \rho & \rho^3 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho \\ \rho & 1 & \rho^2 \end{pmatrix}$.

b) Vérifier que les deux valeurs propres complexes conjuguées de A sont de module < 1 et en déduire que :

$$\rho^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{1,3}^n}{A_{1,2}^n}$$

(cf. page 33)

Exercice 49 Si $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, alors :

$$\chi_A(X) = m_A(X) = (X-1)(X-2)^2.$$

Vérifier que :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \pi_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et en déduire que pour tout $n \geq 0$:

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3n-6 & -6n+12 & -9n+12 \\ 3n-4 & -6n+8 & -9n+6 \\ -n & 2n & 3n+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.3 Cas général

Définition 55 Pour tous entiers n, k , on définit le coefficient binomial par :

$$\binom{n}{k} := C_n^k := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

si $k \geq n$ et $\binom{n}{k} := C_n^k := 0$ si $k > n$.

Les $\binom{n}{k}$ sont des entiers.

Proposition 7.3.1 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent. Alors :

$$\forall k \geq 0, (A + B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

En particulier, si $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent :

$$A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^{k-j} N^j.$$

Proposition 7.3.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme minimal de A est scindé :

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$$

les λ_i étant deux à deux distincts. Notons $\pi_1, \dots, \pi_r$ les projecteurs spectraux associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Alors :

$$\forall k \geq 0, A^k = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=0}^{\min\{k, k_i-1\}} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} (A - \lambda_i I_n)^j \right) \pi_i.$$

Démonstration : Il suffit de vérifier cette formule sur chaque sous-espace caractéristique E^{λ_i} . Or si $x \in E^{\lambda_i}$, $Ax = \lambda_i x + (A - \lambda_i I_n)x$ et $(A - \lambda_i I_n)^{k_i} x = 0$.
q.e.d.

7.4 Suites récurrentes

Théorème 7.4.1 Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$. On suppose $a_p \neq 0$.

On note $P(X) := X^p - a_1 X^{p-1} - \dots - a_p$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses racines (s.e. distinctes) et $k_1, \dots, k_r$ leurs multiplicités respectives.

Alors les suites vérifiant :

$$\forall n \geq p, u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_p u_{n-p}$$

sont les suites de la forme :

$$u_n = P_1(n)\lambda_1^n + \dots + P_r(n)\lambda_r^n$$

où P_i sont des polynômes de degré $< k_i$.

— rem : P_i peuvent être déterminés par $u_0, \dots, u_{p-1}$.

EXEMPLE : Si $p = 1$,

$$\forall n \geq 1, u_n = a_1 u_{n-1} \Leftrightarrow \forall n \geq 1, u_n = u_0 a_1^n .$$

Si $p = 2$,

$$\forall n \geq 2, u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} \Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

pour certains α_1, α_2 si $X^2 - a_1 X - a_2 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et :

$$\forall n \geq 2, u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} \Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = (\alpha n + \beta) \lambda^n$$

pour certains α, β si $X^2 - a_1 X - a_2 = (X - \lambda)^2$.

Exercice 50 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

alors :

$$\forall n \geq 0, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) .$$

Démonstration : Si $u_n = n^k \lambda_i^n$, avec $0 \leq k < k_i$, alors pour tout $n \geq p$:

$$\begin{aligned} u_n - a_1 u_{n-1} - \dots - a_p u_{n-p} &= n^k \lambda_i^n - a_1 (n-1)^k \lambda_i^{n-1} - \dots - a_p (n-p)^k \lambda_i^{n-p} \\ &= \lambda_i^{n-p} \left((n-p)^k P(\lambda_i) + (n-p)^{k-1} \lambda_i P'(\lambda_i) + \dots + \lambda_i^k P^{(k)}(\lambda_i) \right) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Réciproquement, si :

$$\forall n \geq p, u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_p u_{n-p}$$

alors on pose :

$$X_n := \begin{pmatrix} u_{n-p+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p .$$

On a alors :

$$\forall n \geq p, X_n = AX_{n-1}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la transposée de la matrice compagnon du polynôme $P(X)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ a_p & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \cdots (X - \lambda_r)^{k_r} .$$

Notons $\pi_1, \dots, \pi_r$ les projecteurs spectraux correspondants. D'après la proposition 7.3.2,

$$\begin{aligned} \forall n \geq p, A^n &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=0}^{\min\{n, k_i-1\}} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} (A - \lambda_i I_n)^j \right) \pi_i \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i^n \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{\binom{n}{j}}{\lambda_i^j} (A - \lambda_i I_n)^j \right) \pi_i . \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \forall n \geq p, X_n &= A^{n-p+1} X_{p-1} \\ &= A^n X_0 \end{aligned}$$

si on pose $X_0 := A^{1-p} X_{p-1}$.

Donc, u_n est la dernière composante du vecteur :

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^n \sum_{j=0}^{k_i-1} \binom{n}{j} \frac{(A - \lambda_i I_n)^j \pi_i(X_0)}{\lambda_i^j}$$

et il suffit de remarquer que si $0 \leq j \leq k_i - 1$,

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$$

est un polynôme en n de degré $< k_i$.

q.e.d.

Chapitre 8

Exponentielle

Dans ce chapitre, les matrices sont complexes !

Motivation : système différentiel linéaire + formule de Taylor

8.1 Exponentielle complexe

Rappelons que :

— toute série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ à termes réels positifs (ou nuls) converge (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si la suite de ses sommes partielles $\sum_{k=0}^N a_k$ est bornée.

— toute série de nombres complexes $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ absolument convergente converge

$$c\text{-à-d} : \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ converge dans } \mathbb{C}.$$

— Pour tout nombre complexe :

$$\exp z := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

et :

$$e^0 = 1, e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad (\forall z, z' \in \mathbb{C}) .$$

8.2 Suites de matrices

Définition 56 On dit qu'une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices complexes converge vers une matrice A si pour tous i, j la suite des coefficients $A_{k,i,j}$ converge vers le coefficient $A_{i,j}$ dans $\mathbb{C}$.

On pose :

$$|||A||| := \max_i \sum_j |a_{i,j}|$$

pour toute matrice A .

— propriétés : c'est une norme multiplicative! *c-à-d* : pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

- i) $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- ii) $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$;
- iii) $|||\lambda A||| = |\lambda| |||A|||$;
- iv) $|||AB||| \leq |||A||| |||B|||$.

Remarque : Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors pour tous i, j , $|a_{i,j}| \leq |||A|||$. On en déduit qu'une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice A si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |||A_k - A||| = 0 .$$

Exercice 51 En déduire que si (A_k) et (B_k) sont des suites de matrices qui convergent vers A et B , alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k B_k = AB .$$

Exercice 52 On pose pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n : ||X|| := \max_{i=1}^n |x_i|$.

Alors :

$$|||A||| = \max_{\substack{X \in \mathbb{K}^n \\ X \neq 0}} \frac{||AX||}{||X||}$$

pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

8.3 Définition de $\exp(A)$

Théorème 8.3.1 Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note :

$$\exp A := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

sa limite. C'est la matrice exponentielle de A .

Démonstration : Il suffit de démontrer que les séries de coefficients convergent. Or pour tous i, j , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{A_{i,j}^k}{k!} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{|||A^k|||}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|||A|||^k}{k!} \\ &= e^{|||A|||} < \infty . \end{aligned}$$

Donc pour tous i, j , la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{i,j}^k}{k!}$ converge dans $\mathbb{C}$. q.e.d.

Exercice 53 Pour une matrice diagonale $D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} .$$

Théorème 8.3.2 (propriétés de l'exponentielle) On a :

$$\exp 0 = I_n \text{ et } \exp(A + B) = \exp A \exp B$$

pour toutes matrices A et B qui commutent. En particulier, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\exp A$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$. On a aussi :

$$\exp(kA) = (\exp A)^k$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Attention ! si A, B ne commutent pas, en général $\exp(A + B) \neq \exp A \exp B$.

Remarque : En fait l'application : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Démonstration : Montrons que $\exp(A + B) = \exp A \exp B$:

$$\forall m \geq 0 : \left(\sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{B^j}{j!} \right) - \sum_{k=0}^m \frac{(A+B)^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{0 \leq i, j \leq m} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} - \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j=k}} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \\
&= \sum_{0 \leq i, j \leq m} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} - \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq m \\ i+j \leq m}} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \\
&= \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq m \\ i+j > m}} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\forall m \geq 0, \quad & \left| \left(\sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{B^j}{j!} \right) - \sum_{k=0}^m \frac{(A+B)^k}{k!} \right| \\
& \leq \left| \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq m \\ i+j > m}} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \right| \\
& \leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq m \\ i+j > m}} \left| \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \right| \\
& \leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq m \\ i+j > m}} \frac{|A|^i}{i!} \frac{|B|^j}{j!} \\
& \leq \left(\sum_{i=0}^m \frac{|A|^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^m \frac{|B|^j}{j!} \right) - \sum_{k=0}^m \frac{(|A| + |B|)^k}{k!}
\end{aligned}$$

et si « on fait tendre m vers $+\infty$ » on trouve :

$$\left| \exp A \exp B - \exp(A+B) \right| \leq e^{|A|} e^{|B|} - e^{|A|+|B|} = 0$$

donc : $\exp A \exp B = \exp(A+B)$.

q.e.d.

Exercice 54 Vérifier que :

$$\exp \left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

pour tout t réel.

8.4 Méthode de calcul

Exercice 55 Si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (par exemple D diagonale), alors :

$$\exp(PDP^{-1}) = P \exp DP^{-1} .$$

En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det \exp A = e^{\text{tr} A} .$$

Proposition 8.4.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$$

le polynôme minimal de A , les λ_i étant les valeurs propres deux à deux distinctes de A . Notons $\pi_1, \dots, \pi_r$ les projecteurs spectraux associés aux λ_i .

Alors :

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^r e^{t\lambda_i} \left(\sum_{j=0}^{k_i-1} t^j \frac{(A - \lambda_i I_n)^j}{j!} \right) \pi_i .$$

En particulier, $\exp A$ est un polynôme en A .

Remarque : Si A est diagonalisable, alors, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\exp(tA) = e^{t\lambda_1} \pi_1 + \dots + e^{t\lambda_r} \pi_r$.

Démonstration : On décompose A en :

$$A = D + N$$

avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent. Alors :

$$\exp A = \exp D \exp N .$$

Or,

$$D = \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_i \Rightarrow \forall k \geq 0, \frac{D^k}{k!} = \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i^k}{k!} \pi_i$$

et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \exp D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} \right) \pi_i \\ &= \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i} \pi_i . \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^r N \pi_i \\ &= \sum_{i=1}^r (A - \lambda_i I_n) \pi_i \\ \Rightarrow \forall k \geq 0 \quad N^k &= \sum_{i=1}^r (A - \lambda_i I_n)^k \pi_i \end{aligned}$$

or : $\forall k \geq k_i, (A - \lambda_i I_n)^k \pi_i = 0$ (exo) .

Donc :

$$\begin{aligned} \exp N &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{k_i-1} \frac{(A - \lambda_i I_n)^k}{k!} \pi_i . \end{aligned}$$

q.e.d.

EXEMPLE : Si

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= e^{2t}(I_3 + t(A - 2I_3))\pi_2 + e^t\pi_1 \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 3t-3 & -6t+6 & -9t+6 \\ 3t-2 & -6t+4 & -9t+3 \\ -t & 2t & 3t+1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

8.5 Équations différentielles

8.5.1 Dérivation des matrices

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si la limite :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existe dans $\mathbb{C}$. On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en tout $t_0 \in I$.

Définition 57 Soient $a_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{C}$, i, j , des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la matrice $A(t) := (a_{i,j}(t))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ est dérivable et on note $A'(t) := (a'_{i,j}(t))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$.

Exercice 56 Vérifier que si pour tout $t \in I$, $A(t) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B(t) \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$ et si les matrices A et B sont dérivables sur I , alors le produit aussi et on a :

$$\forall t \in I, (AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) .$$

Proposition 8.5.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice :

$$t \mapsto \exp(tA)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\exp(tA))' = A \exp(tA) = \exp(tA)A .$$

Démonstration : Soient $\pi_1, \dots, \pi_r$ les projecteurs spectraux de A . Alors d'après la proposition 8.4.1, on a :

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k \pi_i$$

(la somme sur k est en fait finie car $(A - \lambda_i I_n)^k \pi_i = 0$ pour k assez grand).
Donc :

$$t \mapsto \exp(tA)$$

est dérivable de dérivée :

$$\begin{aligned} (\exp(tA))' &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i} \left(\lambda_i \frac{t^k}{k!} + k \frac{t^{k-1}}{k!} \right) (A - \lambda_i I_n)^k \pi_i \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i} \lambda_i \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k \pi_i + \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^{k+1} \pi_i \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\lambda_i} \frac{t^k}{k!} (\lambda_i I_n + (A - \lambda_i I_n)) (A - \lambda_i I_n)^k \pi_i \\ &= A \exp(tA) . \end{aligned}$$

q.e.d.

8.5.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Ce sont les équations de la forme :

$$Y'(t) = AY(t)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice **constante** et $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur inconnu dont les coordonnées sont des fonctions dérivables.

— cas homogène :

Théorème 8.5.2

$$Y' = AY \Leftrightarrow Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

en particulier les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration : D'un côté, le membre de droite est bien solution de l'équation $Y' = AY$ (exo). Réciproquement, si on pose $Z(t) := \exp(-tA)Y(t)$, alors :

$$Z'(t) = \exp(-tA)(Y' - AY) = 0$$

Donc sur $\mathbb{R}$, Z est constante et $Z(t) = Z(0) = Y(0)$ pour tout t . q.e.d.

EXEMPLE : Le système :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - 3x_3(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

avec pour « conditions initiales » $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0$ a pour solution :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. On trouve alors :

$$x_1(t) = (-3t + 3)e^{2t} - 2e^t,$$

$$x_2(t) = (-3t + 2)e^{2t} - e^t,$$

$$x_3(t) = te^{2t}.$$

— solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre p à coefficients constants.

Corollaire 8.5.2.1 Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ tels que $a_p \neq 0$. On suppose que :

$$\chi(X) := X^p + a_1 X^{p-1} + \dots + a_p = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

pour certains $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et certains entiers $m_i \geq 1$.

Alors :

$$(E) \ y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \dots + a_p y = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

pour certains polynômes P_i de degré $< m_i$ (pour tout i).

Remarque : On peut déterminer les P_i en fonction des valeurs $y(0), \dots, y^{(p-1)}(0)$.

Démonstration : $\Rightarrow$: On pose $Y(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^p$ pour tout t .

Alors :

$$(E) \Leftrightarrow Y'(t) = AY(t)$$

où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_p & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\chi(X) = \chi_A(X) = m_A(X)$.

On a donc

$$Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

avec :

$$\exp(tA) := \sum_{i=1}^r e^{t\lambda_i} \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_p)^k \right) \pi_i$$

où les π_i sont les projecteurs spectraux associés aux λ_i .

Or $y(t)$ est le premier coefficient de $Y(t)$ donc :

$$y(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} \underbrace{\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \left((A - \lambda_i I_n)^k \pi_i(Y(0)) \right)_1}_{=: P_i(t)} .$$

$\Leftarrow$: Il suffit de vérifier que $y : t \mapsto e^{\lambda_i t} P_i(t)$ est solution de (E) pour tout polynôme de degré $< m_i$. Or pour une telle fonction y , on a (en posant $a_0 := 1$) :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, y^{(p)}(t) + a_1 y^{(p-1)}(t) + \dots + a_p y(t) &= \sum_{k=0}^p a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} e^{\lambda_i t} P_i^{(j)}(t) \\ &= \sum_{\substack{j=0 \\ j < m_i}}^p e^{\lambda_i t} P_i^{(j)}(t) \underbrace{\sum_{k=j}^p a_k \frac{k!}{(k-j)!} \lambda_i^{k-j}}_{=\chi^{(j)}(\lambda_i)=0} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

q.e.d.

Chapitre 9

Groupe orthogonal

9.1 Matrices orthogonales

Définition 58 Une matrice A est orthogonale si ${}^tAA = I_n$.

EXEMPLE :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

sont orthogonales.

Remarque : A orthogonale $\Leftrightarrow A$ inversible et $A^{-1} = {}^tA \Leftrightarrow A^tA = I_n$.

Remarque : Si A est orthogonale, alors $(\det A)^2 = \det({}^tAA) = 1$ donc $\det A = \pm 1$.

Définition 59 On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles orthogonales et $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles orthogonales de déterminant 1. Les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont les rotations de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : $I_n \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall A, B \in O_n(\mathbb{R})$, $AB \in O_n(\mathbb{R})$ donc $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. De même $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

9.2 Produit scalaire

Définition 60 Le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ est l'application :

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (X, Y) \mapsto {}^tXY$$

$$(si\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ alors } \langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n).$$

Propriétés :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}, \langle x, ty \rangle = \langle tx, y \rangle = t \langle x, y \rangle$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Définition 61 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Nouvelle caractérisation de la transposée

Proposition 9.2.1 Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, pour toute matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on :

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^tAY \rangle .$$

Démonstration : Évident !

q.e.d.

Proposition 9.2.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors sont équivalentes :

- i) A est orthogonale ;
- ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| = \|X\|$;
- iii) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

Démonstration : **i) $\Rightarrow$ ii)** : Si A est orthogonale et si $X \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$\|AX\|^2 = \langle AX, AX \rangle = \langle X, {}^tAAX \rangle = \langle X, X \rangle .$$

ii) $\Rightarrow$ iii) : si $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| = \|X\|$, alors pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|A(X + Y)\|^2 = \|X + Y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle AX + AY, AX + AY \rangle = \langle X + Y, X + Y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle AX, AX \rangle + 2\langle AX, AY \rangle + \langle AY, AY \rangle = \langle X, X \rangle + 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle .$$

iii) $\Rightarrow$ i) :

On a :

$$\begin{aligned} & \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle \\ \Leftrightarrow & \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle {}^tAAX, Y \rangle = \langle X, Y \rangle \\ \Leftrightarrow & \forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle {}^tAAX - X, Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

en particulier si $Y = {}^tAAX - X$, on trouve :

$$\|{}^tAAX - X\|^2$$

donc ${}^tAAX = X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ d'où ${}^tAA = I_n$.

q.e.d.

9.3 Réflexions orthogonales

Définition 62 Une réflexion orthogonale est une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$i) R = {}^tR, ii) R^2 = I_n, iii) \dim \ker(R - I_n) = n - 1 .$$

En particulier, les réflexions orthogonales sont des matrices orthogonales.

EXEMPLE : $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Définition 63 Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$. On définit :

$$G(v_1, \dots, v_n) := \left(v_i v_j \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et :

$$R_v := I_n - 2G(v_1, \dots, v_n) .$$

Proposition 9.3.1 La matrice R_v est une réflexion orthogonale et :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, R_v(X) = X - 2\langle v, X \rangle v .$$

Démonstration : Si $G = [G(v_1, \dots, v_n)]$ avec $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ tels que $v_1^+ \dots + v_n^2 = 1$, alors : $G^2 = G$ et ${}^tG = G$. Donc R_v est orthogonale car ${}^tR_v = R_v$, $R_v^2 = I_n - 4G + 4G^2 = I_n$ et $R_v - I_n = -2G$ qui est une matrice de rang 1 donc de noyau de dimension $n - 1$.

De plus, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et si $R_v(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors :

$$y_i = x_i - 2 \sum_{j=1}^n v_i v_j x_j = x_i - 2 \langle v, X \rangle v_i$$

pour tout $1 \leq i \leq n$ d'où : $R_v(X) = X - 2 \langle v, X \rangle v$.

q.e.d.

Lemme 9.3.2 Soient $x, x' \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| = \|x'\| = 1$. Alors il existe $R \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Rx = x'$.

Démonstration : Si $x \neq x'$, il suffit de prendre $R = R_v$ où $v := \frac{x-x'}{\|x-x'\|}$.
q.e.d.

9.4 Réduction des matrices orthogonales

9.4.1 $O_2(\mathbb{R})$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On notera $\Delta_\theta := \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ la droite du plan $\mathbb{R}^2$ passant par 0 et qui fait un angle θ avec « l'axe des abscisses ».

Exercice 57 Vérifier que les matrices

$$\rho_t := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \text{ et } R_t := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

sont orthogonales. Ce sont respectivement la matrice de la rotation (de centre 0) et d'angle t et la matrice de la réflexion orthogonale par rapport à l'axe $\Delta_{\frac{t}{2}}$. Remarquer que $\det \rho_t = -\det R_t = 1$.

Nous allons voir que ce sont les seules matrices orthogonales 2×2 .

Proposition 9.4.1

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Démonstration :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos \theta$, $c = \sin \theta$. De plus $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc :$
 $\epsilon = \pm 1$.

On a donc :

$$\begin{cases} \cos \theta d - \sin \theta b = \epsilon \\ \sin \theta d + \cos \theta b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = \epsilon \cos \theta \\ b = -\epsilon \sin \theta \end{cases} .$$

q.e.d.

Exercice 58

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \rho_t \rho_{t'} = \rho_{t+t'} , R_{t'} R_t = \rho_{2(t'-t)}$$

Exercice 59 En déduire que $O_2(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales.

Exercice 60 On a un isomorphisme de groupes :

$$S^1 \rightarrow SO_2(\mathbb{R})$$

$$e^{it} \mapsto \rho_t$$

en particulier, $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif!

Remarque : Pour une rotation $r \in SO_2(\mathbb{R})$, $r = \rho_t \Rightarrow \text{tr} r = 2 \cos t$.

Exercice 61 Pour tout t , $R_t = \rho_{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rho_{-\frac{t}{2}}$.

9.4.2 $O_3(\mathbb{R})$

Théorème 9.4.2 Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$. Il existe $\epsilon = \pm 1$, $t \in \mathbb{R}$ et $P \in O_3(\mathbb{R})$ tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} P^{-1}$$

(remarque : alors $\epsilon = \det A$ et $\cos \theta = \frac{\text{tr} A - 1}{2}$).

Démonstration : Supposons que $\det A = 1$. Comme le polynôme caractéristique de A est réel de degré 3, il admet 3 racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ou une racine réelle λ et deux racines complexes conjuguées $\mu, \bar{\mu}$. Dans le premier cas $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ et dans le second : $\lambda |\mu|^2 = 1$. Dans les deux cas, A admet au moins une valeur propre réelle $\lambda > 0$. Il existe alors $v \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 tel que : $Av = \lambda v$. Comme $\|Av\| = \|v\|$, on a :

$$\|\lambda v\| = \lambda = 1$$

donc 1 est valeur propre de A .

Il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que $P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v$. Mais alors :

$$Av = v$$

$$\Leftrightarrow AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Posons $B := P^{-1}AP$. La matrice B est orthogonale car P et A le sont et comme

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

B est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} .$$

Donc : ${}^tBB = I_3 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ (car $\det B = 1$).

Or, on a déjà vu que :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Si $\det A = -1$, on est ramené au cas précédent avec $-A$ à la place de A .
q.e.d.

Définition 64 Soit $I_3 \neq A \in SO_3(\mathbb{R})$. On appelle *axe de la rotation* A la droite : $\ker(A - I_3)$ (c'est bien une droite (exo)).

Exercice 62 Soient $t, t' \in \mathbb{R}$. S'il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t' & -\sin t' \\ 0 & \sin t' & \cos t' \end{pmatrix} P^{-1}$$

alors $t = \pm t' \bmod 2\pi$ (indication : calculer la trace).

« Réciproquement » :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-t) & -\sin(-t) \\ 0 & \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9.4.3 Cas général

Théorème 9.4.3 Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que :

$$A = PRP^{-1}$$

où R est de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & \rho_{\theta_1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \rho_{\theta_r} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \rho_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

Remarque : Si le nombre de -1 dans la matrice réduite est impair, $\det A = -1$, $\det A = 1$ sinon.

Cas où $n = 2, 3$: Si $n = 2$, $A = \rho_\theta$ ou $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ pour une certaine matrice orthogonale P .

Si $n = 3$, alors :

$$A = P \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^{-1}$$

pour une certaine matrice orthogonale P et $\epsilon = \pm 1$.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur n . Notons $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = \pm 1$. Soit v un vecteur propre de norme 1 associé. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Pe_1 = v$. Alors :

$$P^{-1}APe_1 = e_1$$

donc $P^{-1}AP$ est orthogonale de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{1,1} & \dots & \\ \vdots & \dots & & \\ 0 & \dots & & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

où la matrice $(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in O_{n-1}(\mathbb{R})$. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à cette matrice.

Supposons maintenant que A n'a pas de valeur propre réelle. Soit $\lambda := a + ib \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe (non réelle). Soit $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé. Il existe $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $Z = X + iY$. Alors :

$$AX = aX - bY \text{ et } AY = bX + aY$$

Comme A est orthogonale, on a aussi :

$$\langle AX, AX \rangle = \langle X, X \rangle \Rightarrow (a^2 - 1)\|X\|^2 + b^2\|Y\|^2 - 2ab\langle X, Y \rangle = 0$$

$$\langle AY, AY \rangle = \langle Y, Y \rangle \Rightarrow (a^2 - 1)\|Y\|^2 + b^2\|X\|^2 + 2ab\langle X, Y \rangle = 0$$

$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle \Rightarrow (a^2 - b^2 - 1)\langle X, Y \rangle + ab\|X\|^2 - ab\|Y\|^2 = 0 .$$

On en déduit : $a^2 + b^2 = 1$ et :

$$\langle X, Y \rangle = \frac{b}{2a}(\|Y\|^2 - \|X\|^2) = -\frac{a}{2b}(\|Y\|^2 - \|X\|^2)$$

D'où : si $\|Y\|^2 \neq \|X\|^2 : 2b^2 = -2a^2$ et $a = b = 0$ absurde donc $\|Y\|^2 = \|X\|^2$ et $\langle X, Y \rangle = 0$.

On peut supposer que $\|X\| = \|Y\| = 1$. Soit $R_1 \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $R_1X = e_1$. On pose :

$$R_2 := \begin{cases} I_n & \text{si } R_1Y = e_2 \\ R_{\frac{e_2 - R_1Y}{\|e_2 - R_1Y\|}} & \text{si } R_1Y \neq e_2 . \end{cases}$$

Comme $\langle R_1Y, e_1 \rangle = \langle R_1Y, R_1X \rangle = \langle Y, X \rangle = 0$, on a $R_2R_1X = e_1$. On a aussi, $R_2R_1Y = e_2$.

Donc $(R_2R_1)^{-1}AR_2R_1$ est une matrice orthogonale de la forme :

$$\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

où $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{R})$.

Comme $(R_2R_1)^{-1}AR_2R_1$ est orthogonale, on a :

$$U \in O_2(\mathbb{R}), Z \in O_{n-2}(\mathbb{R}), \forall U = 0 \Rightarrow V = 0 .$$

Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à Z .

q.e.d.

9.5 Les quaternions

Rappelons que :

$$\mathbb{C} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\} \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Sur le même modèle, on peut construire l'algèbre des quaternions à partir de $\mathbb{C}$.

9.5.1 Définitions

Définition 65 *Soit*

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \right\} .$$

EXEMPLE : Par exemple :

$$1 := I_2, I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H} .$$

Proposition 9.5.1 $\mathbb{H}$ est une sous- $\mathbb{R}$ -algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ i.e. : $I_2 \in \mathbb{H}$ et $\mathbb{H}$ est stable par addition, par multiplication par un scalaire réel et par multiplication.

Démonstration : Pour la stabilité par multiplication, on vérifie que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -\bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - b\bar{b}' & ab' + \bar{a}'b \\ -\overline{ab' + \bar{a}'b} & \overline{aa' - b\bar{b}'} \end{pmatrix} .$$

q.e.d.

Exercice 63 Vérifier que

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K .$$

Table de multiplications :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1$$

$$IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, KI = -IK = J$$

$$IJK = -1$$

(exo)

Remarque : Si $s \in \mathbb{R}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors on pose :

$$[s, \vec{v}] := s + v_1 I + v_2 J + v_3 K \in \mathbb{H} .$$

On a alors pour $s, t \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$[s, \vec{v}][t, \vec{w}] = [st - \vec{v} \cdot \vec{w}, t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}] .$$

Définition 66 On appelle quaternions purs les quaternions de la forme :

$$xI + yJ + zK, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

et on note $\mathbb{H}'$ les sous-espace des quaternions purs.

On identifiera $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}I_2 \subseteq \mathbb{H}$.

Exercice 64 Pour tout $q \in \mathbb{H}$:

$$q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$q \in \mathbb{H}' \Leftrightarrow q^2 \in \mathbb{R}_-$$

Remarque : Pour tout $q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, $\det q = |a|^2 + |b|^2$. Donc,

$q \neq 0 \Rightarrow q$ inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Proposition 9.5.2 L'algèbre $\mathbb{H}$ est une algèbre à division i.e. tout $q \in \mathbb{H}$ non nul est inversible dans $\mathbb{H}$. De plus, le centre de $\mathbb{H}$, c-à-d l'ensemble des $x \in \mathbb{H}$ tels que $xq = qx$ pour tout $q \in \mathbb{H}$, est $\mathbb{R}$.

Démonstration : Soit $0 \neq q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$. Alors,

$$q^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \in \mathbb{H} .$$

Soit $x = a + bI + cJ + dK \in \mathbb{H}$, alors si x est dans le centre de $\mathbb{H}$, on a en particulier :

$$\begin{aligned} xI &= Ix \text{ et } xJ = Jx \\ \Rightarrow b &= c = d = 0 . \end{aligned}$$

La réciproque est clair : si $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall q \in \mathbb{H}$, $xq = qx$. q.e.d.

Remarque : Dans $\mathbb{H}$, l'équation $X^2 + 1$ a une infinité de solutions, parmi lesquelles : I, J, K .

Exercice 65 Vérifier que $Q_8 := \{\pm I_1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H} \setminus \{0\}$.

9.5.2 Norme

Pour tout $q \in \mathbb{H}$, on pose :

$$q^* := \overline{q}^t .$$

Propriétés :

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}, (q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$$

$$\forall q \in \mathbb{H}, qq^* = q^* q = \det(q) I_2 \in \mathbb{R}_+ I_2$$

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a + bI + cJ + dK)^* = a - bI - cJ - dK .$$

Définition 67 On pose pour tout $q \in \mathbb{H}$, $\|q\| := \sqrt{qq^*}$.

Proposition 9.5.3 *L'application :*

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+ (q, q') \mapsto \langle q, q' \rangle := \frac{1}{2}(qq'^* + q'q^*)$$

est un produit scalaire.

Démonstration : Si $q = a + bI + cJ + dK$, $q' = a' + b'I + c'J + d'K$ avec $a, a', b, b', c, c', d, d'$, alors : $\langle q, q' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$; c'est la formule du produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^4$. q.e.d.

On remarque :

$$\forall q, q' \in \mathbb{H}, \|qq'\| = \|q\| \|q'\|$$

donc :

$$G := S^3 := SU_2 := \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Ce groupe joue vis-à-vis des rotations de $SO_3(\mathbb{R})$ le même rôle que le groupe S^1 vis-à-vis de $SO_2(\mathbb{R})$.

9.5.3 Lien avec les rotations

Pour tout $0 \neq q \in \mathbb{H}$, on pose :

$$s_q : \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}' y \mapsto s_q(y) := qyq^{-1}$$

(vérifier que si $y \in \mathbb{H}'$, $s_q(y) \in \mathbb{H}'$).

Pour tout $0 \neq q \in \mathbb{H}$, on notera S_q la matrice de s_q dans la base I, J, K de $\mathbb{H}'$.

Remarque : La base I, J, K de $\mathbb{H}'$ est orthonormale.

Lemme 9.5.4 Si $s = s_1I + s_2J + s_3K \in \mathbb{H}'$, avec $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ et $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$, alors il existe $g \in S^3$ tel que :

$$s_g(I) = s \text{ .}$$

Démonstration : Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$s_1 = \cos \alpha, s_2 = \sin \alpha \cos \beta, s_3 = \sin \alpha \sin \beta \text{ .}$$

On pose alors :

$$g = \cos \xi I + \sin \xi \cos \eta J + \sin \xi \sin \eta K$$

où $\xi := -\frac{\alpha}{2}$, $\eta = \beta$. On a bien : $s_g(I) = s$. q.e.d.

Théorème 9.5.5 Pour tout $q \in S^3$, $S_q \in SO_3(\mathbb{R})$. De plus l'application :

$$S^3 \rightarrow SO_3(\mathbb{R}) \quad q \mapsto S_q$$

est un morphisme surjectif de groupes de noyau : ± 1 i.e. :

$$\forall q, q' \in S^3, S_{qq'} = S_q S_{q'}$$

$$S_q = S_{q'} \Leftrightarrow q' = \pm q$$

et toute rotation $R \in SO_3(\mathbb{R})$ est de la forme $R = S_q$ pour un certain $q \in S^3$.

Démonstration : On a bien un morphisme de groupes :

Soient $q, q' \in S^3$. Alors :

$$\forall y \in \mathbb{H}', s_q s_{q'}(y) = qq' y q'^{-1} q^{-1} = (qq') y (qq')^{-1} = s_{qq'}(y) \text{ .}$$

Donc $s_q s_{q'} = s_{qq'}$ d'où : $S_q S_{q'} = S_{qq'}$.

On arrive bien dans $O_3(\mathbb{R})$...

De plus :

$$\forall y \in \mathbb{H}', \|s_q(y)\| = \|qq' y q'^{-1} q^{-1}\| = \|q\| \|y\| \|q'^{-1}\| \|q^{-1}\| = \|y\|$$

donc $S_q \in O_3(\mathbb{R})$ pour tout $q \in S^3$.

... plus précisément dans $SO_3(\mathbb{R})$:

Nous allons voir que les S_q sont en fait des rotations.

On commence par un cas particulier :

Si $q = a + bI \in S^3$, avec $b \geq 0$, alors on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } b = \sin \frac{\theta}{2} \text{ .}$$

On vérifie alors que :

$$S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R}) .$$

Si q est quelconque ...

Alors : $q = a + p$ où $p \in \mathbb{H}'$. On a alors : $1 = a^2 + ||p||^2$. Si $p = 0$, alors $S_q = I_3 \in SO_3$. Sinon, $\frac{p}{||p||} \in \mathbb{H}'$ et d'après le lemme, il existe $g \in S^3$ tel que :

$$s_g(I) = gIg^{-1} = \frac{p}{||p||} .$$

On a alors :

$$s_g(a + ||p||I) = q$$

(exo) .

Soit $r := a + ||p||I$. On a donc : $grg^{-1} = q$ d'où :

$$S_q = S_g S_r S_g^{-1}$$

or $S_r \in SO_3(\mathbb{R})$ d'après la première partie de la démonstration donc $S_q \in SO_3(\mathbb{R})$ (car de déterminant 1).

Il reste à montrer la surjectivité :

Soit $R \in SO_3(\mathbb{R})$. Il existe un vecteur propre $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ de poids

1 de R . D'après le lemme, il existe $g \in S^3$ tel que : $s_g(I) = v_1 I + v_2 J + v_3 K$. Mais alors :

$$S_g^{-1} R S_g \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Donc, comme $S_g^{-1} R S_g \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$S_g^{-1} R S_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Donc si on pose :

$$r := \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} I$$

on a :

$$\begin{aligned} S_g^{-1} R S_g = S_r &\Leftrightarrow R = S_g S_r S_g^{-1} \\ &\Leftrightarrow R = S_{grg^{-1}} \end{aligned}$$

d'où la surjectivité.

Pour finir le noyau est $\{\pm 1\}$:

Si $S_q = I_3$ alors :

$$\begin{aligned} &\forall y \in \mathbb{H}', s_q(y) = y \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{H}', qyq^{-1} = y \Leftrightarrow qy = yq \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{H}, qy = yq \\ &\Leftrightarrow q \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Si $q \in S^3$, alors $\|q\| = |q| = 1 \Rightarrow q = \pm 1$.

q.e.d.

Exercice 66 Soit $q \in S^3$. Si $q = \pm 1$, alors $S_q = I_3$. Sinon, $q = a + p$ avec $a \in \mathbb{R}$, $0 \neq p \in \mathbb{H}'$ et $a^2 + \|p\|^2 = 1$. Mais alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a = \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \|p\| = \sin \frac{\theta}{2} .$$

Posons aussi $\vec{p} := \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ si $p = p_1 I + p_2 J + p_3 K$. Avec ces notations, S_q est la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{p}$ et d'angle θ .

Chapitre 10

Invariants de similitude

10.1 Matrices à coefficients polynomiaux

Lemme 10.1.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. La matrice A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ si et seulement si $\det A$ est une constante non nulle. Autrement dit :*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}[X]) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) : \det A \in \mathbb{K}^*\} .$$

Démonstration : Si $AB = I_n$ pour une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$, alors :

$$\det A \det B = 1$$

donc $\det A$ est un polynôme inversible. Donc $\det A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Réciproquement, si $\det A \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{t}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) .$$

q.e.d.

Définition 68 *On notera pour toute matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$*

$$d_1(A) := \text{le pgcd unitaire des coefficients de } A$$

c'est le polynôme unitaire de degré maximal qui divise tous les coefficients de A .

Proposition 10.1.2 *Si $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ sont des matrices inversibles (c-à-d dont le déterminant est une constante non nulle), alors $d_1(PAQ) = d_1(A)$.*

Démonstration : Notons $c_{i,j}$ les coefficients de PAQ . Alors :

$$\forall i, j, c_{i,j} = \sum_{k,l=1}^n P_{i,k} A_{k,l} Q_{l,j}$$

donc $d_1(A)$ divise $c_{i,j}$ pour tous i, j . Donc $d_1(A)$ divise $d_1(PAQ)$. De même $d_1(PAQ)$ divise $d_1(A) = d_1(P^{-1}(PAQ)Q^{-1})$. Ainsi, $d_1(A) = d_1(PAQ)$. q.e.d.

10.1.1 Matrices élémentaires

Ce sont les matrices de l'une des formes suivantes :

$T_{i,j}(\lambda)$ « la matrice I_n à laquelle on a ajouté un polynôme $\lambda \in \mathbb{K}[X]$ en position i, j »

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda(X) & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

— Σ_i « la matrice obtenue à partir de I_n en permutant les colonnes i et $i+1$ » :

$$\Sigma_i := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \swarrow^{i-1 \text{ fois}} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & & \swarrow^{i-1 \text{ fois}} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

— $D_i(\alpha)$ « la matrice obtenue à partir de I_n en remplaçant le i ème coefficient diagonal par $\alpha \in \mathbb{K}^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Ces matrices sont toutes inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$.

10.2 Réduction des matrices à coefficients polynomiaux

Définition 69 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. On dira que A est équivalente à B , notation : $A \sim B$ s'il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que : $A = PBQ$.

Exercice 67 C'est une relation d'équivalence i.e. :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]), A \sim A ;$$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A ;$$

$$A \sim B \sim C \Rightarrow A \sim C .$$

Lemme 10.2.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ une matrice non nulle. Alors, A est équivalente à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} d_1(A) & 0 & \text{-----} & 0 \\ & 0 & & \\ & | & & \\ & | & \boxed{A'} & \\ & | & & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}[X])$.

Démonstration : On utilise la multiplication à gauche et à droite par des matrices élémentaires. Dans le tableau suivant, on rappelle l'effet de la multiplication d'une matrice A par les matrices élémentaires :

Matrices élémentaires E	effet de la multiplication à gauche EA	effet de la multiplication à droite AE
$T_{i,j}(\lambda)$	« ajoute $\lambda \times$ la ligne i à la ligne j »	« ajoute $\lambda \times$ la colonne i à la colonne j »
$D_i(\alpha)$	« multiplie la ligne i par α »	« multiplie la colonne i par α »
Σ_i	« échange les lignes i et $i + 1$ »	« échange les colonnes i et $i + 1$ »

Soit d le degré minimal d'un coefficient non nul $b_{i,j}$ d'une matrice B équivalente à A . Quitte à permuter des lignes ou des colonnes de B , on peut

supposer que $b_{1,1}$ est de degré d . Soit $2 \leq j \leq n$, la division euclidienne de $b_{1,j}$ par $b_{1,1}$ donne :

$$b_{1,j} = qb_{1,1} + r_{1,j}$$

où $\deg r_{1,j} < \deg b_{1,1}$. Donc en retranchant $q \times$ la colonne 1 à la colonne j de B on obtient une matrice équivalente à B donc à A dont la première ligne est de la forme :

$$b_{1,1} \dots r_{1,j} \dots$$

Si $r_{1,j} \neq 0$, on a contredit la minimalité de d . Donc $r_{1,j} = 0$ et $b_{1,1}$ divise $b_{1,j}$. En raisonnant comme cela avec tous les colonnes $2 \leq j \leq n$ et de même avec toutes les lignes $2 \leq i \leq n$, on s'aperçoit que l'on peut supposer que les coefficients $b_{1,j}$ et $b_{i,1}$ sont nuls si $2 \leq i, j \leq n$. Soit $b_{i,j}$ un coefficient de B avec $i, j \geq 2$. En ajoutant la ligne i à la ligne 1, on trouve une matrice équivalente à A dont la première ligne comprend les termes :

$$b_{1,1} \dots b_{i,j} \dots$$

On a alors vu que $b_{1,1}$ divise $b_{i,j}$.

On a donc montré que A est équivalente à une matrice B de la forme :

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \text{---} & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $b_{1,1}$ divise tous les coefficients de la matrice A' et où l'on peut supposer que $b_{1,1}$ est unitaire (quitte à multiplier la ligne 1 par un coefficient constant non nul). Mais alors $d_1(B) = b_{1,1}$. Et comme A est équivalente à B , $d_1(A) = b_{1,1}$.
q.e.d.

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} -1 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-C_1} \begin{pmatrix} 1 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + XL_1} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - XC_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} .$$

Théorème 10.2.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. Alors, il existe $r \geq 0$ et une suite $P_1, \dots, P_r$ de polynômes unitaires dans $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$i) \quad P_1 | P_2 | \dots | P_r$$

$$ii) \quad A \sim \begin{pmatrix} P_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(« $|$ » signifie divise). De plus, si $s \geq 0$ et une suite $Q_1, \dots, Q_s$ de polynômes unitaires vérifient aussi i) et ii), alors : $s = r$ et $Q_i = P_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Démonstration : Pour l'existence des $P_1, \dots, P_r$, il suffit de raisonner par récurrence sur n , la taille de la matrice A , et d'utiliser le lemme 10.2.1.

Pour l'unicité, on peut aussi raisonner par récurrence sur n .

Si on a :

$$\begin{pmatrix} P_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \sim A \sim \begin{pmatrix} Q_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & Q_s & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_1 | \dots | P_r$, $Q_1 | \dots | Q_s$ alors on peut supposer $A \neq 0$ et on a forcément $P_1 = Q_1 = d_1(A)$. Mais alors :

$$\begin{pmatrix} P_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} P_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & Q_s & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

entraîne

$$\begin{pmatrix} P_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & P_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} Q_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & Q_s & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(exo)

q.e.d.

Remarque : Si $\det A \neq 0$, alors $r = n$ et $\det A = P_1 \dots P_n$.

Définition 70 Les P_i différents de 1 sont appelés les *diviseurs élémentaires* de A . Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les diviseurs élémentaires de $XI_n - A$ sont appelés les *invariants de similitude* de A .

Exercice 68 Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors A et B ont les mêmes invariants de similitude. Pour la réciproque, cf. la section suivante.

10.3 Invariants de similitude

Quels sont les invariants de similitude d'une matrice compagnon ?

Lemme 10.3.1 Soient $P(X) := X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{K}[X]$ et

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & \text{---} & 0 & -c_n \\ & \diagdown & & \\ 1 & & & \\ & \diagdown & & \\ 0 & & & 0 \\ & \diagdown & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \text{---} & 0 & 1 & -c_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

la matrice compagnon associée. Alors la matrice C_P a un seul invariant de similitude : le polynôme $P(X)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 XI_n - C_P &:= \begin{pmatrix} X & 0 & \text{---} & 0 & a_n \\ -1 & & \diagdown & & \\ 0 & & \diagdown & 0 & \\ \vdots & & \diagdown & X & \\ 0 & \text{---} & 0 & -1 & X + a_1 \end{pmatrix} \\
 L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \dots + X^{n-1}L_n &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{---} & 0 & P(X) \\ -1 & X & & & \\ 0 & & \diagdown & 0 & \\ \vdots & & \diagdown & X & \\ 0 & \text{---} & 0 & -1 & X + a_1 \end{pmatrix} \\
 L_1 \leftrightarrow L_n &\sim \begin{pmatrix} -1 & X & 0 & \text{---} & 0 & a_{n-1} \\ 0 & & \diagdown & & & \\ \vdots & & \diagdown & & X & a_2 \\ & & & -1 & X + a_1 & \\ 0 & \text{---} & 0 & & P(X) & \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & P(X) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemme 10.3.2 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. alors :

$$XI_n - A \sim XI_n - B \Leftrightarrow A \text{ est semblable à } B.$$

Démonstration : Démontrons le sens difficile : $\Rightarrow$: on suppose qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que :

$$XI_n - A = P(XI_n - B)Q .$$

Il existe deux matrices $P_0, P_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $P = (XI_n - A)P_1 + P_0$.
En effet, comme $XI_n - A$ et A commutent, on a pour tout $k \geq 1$:

$$X^k I_n = ((XI_n - A) + A)^k = (XI_n - A)R_k + A^k$$

pour une certaine matrice $R_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])^\dagger$. Or, $P = X^m C_m + \dots + C_0$ pour certaines matrices $C_0, \dots, C_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (on a simplement décomposé les coefficients en somme de monômes et regroupé les monômes par degrés).
Donc :

$$P = (XI_n - A) \underbrace{(R_m + \dots + R_1)}_{=: P_1} + \underbrace{(A^m C_m + \dots + C_0)}_{=: P_0} .$$

De même, il existe $Q_0, Q_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ telles que $Q = Q_1(XI_n - A) + Q_0$.
Mais alors :

$$\begin{aligned} XI_n - A &= ((XI_n - A)P_1 + P_0)(Q_1(XI_n - A) + Q_0) \\ &= P_0(XI_n - B)Q_0 + (XI_n - A)P_1(XI_n - B)Q_1(XI_n - A) \\ &\quad + P_0(XI_n - B)Q_1(XI_n - A) + (XI_n - A)P_1(XI_n - B)Q_0 . \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} P_0(XI_n - B)Q_1(XI_n - A) &= (P - (XI_n - A)P_1)(XI_n - B)Q_1(XI_n - A) \\ &= (XI_n - A) \left(Q^{-1}Q_1 - P_1(XI_n - B)Q_1 \right) (XI_n - A) \end{aligned}$$

car $P(XI_n - B) = (XI_n - A)Q^{-1}$.

De même :

$$(XI_n - A)P_1(XI_n - B)Q_0 = (XI_n - A) \left(P_1P^{-1} - P_1(XI_n - B)Q_1 \right) (XI_n - A) .$$

On a donc montré que :

$$XI_n - A = P_0(XI_n - B)Q_0 + (XI_n - A)S(XI_n - A)$$

où :

$$S := Q^{-1}Q_1 - P_1(XI_n - B)Q_1 + P_1P^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) .$$

Finalement, on a obtenu :

$$XI_n - A - P_0(XI_n - B)Q_0 = (XI_n - A)S(XI_n - A) .$$

$\dagger$. il suffit de prendre $R_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (XI_n - A)^{k-j-1} A^j$.

Si $S \neq 0$, le terme de droite est de degré au moins 2 alors que le terme de gauche est toujours de degré ≤ 1 : *contradiction* !

Donc $S = 0$ et :

$$XI_n - A = P_0(XI_n - B)Q_0$$

avec $P_0, Q_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, on conclut :

$$XI_n - A = P_0(XI_n - B)Q_0 \Leftrightarrow XI_n - A = XP_0Q_0 - P_0BQ_0$$

$$\Leftrightarrow P_0Q_0 = I_n \text{ et } A = P_0BQ_0$$

$$\Rightarrow P_0 \text{ inversible et } A = P_0BP_0^{-1} .$$

q.e.d.

Voici le théorème principal du chapitre (et même du cours) :

Théorème 10.3.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe $1 \leq r \leq n$ et $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes unitaires tels que :*

$$i) \ P_1 | \dots | P_r ;$$

$$ii) \ XI_n - A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & P_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & P_r \end{pmatrix} .$$

De plus, A est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$

où les C_{P_i} sont les matrices compagnons associées aux polynômes P_i . En particulier :

$$\chi_A(X) = P_1 \dots P_r \text{ et } P_r \text{ est le polynôme minimal de } A.$$

Corollaire 10.3.3.1 *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont les mêmes invariants de similitude alors A et B sont semblables.*

Démonstration : A et B sont semblables à la même matrice diagonale par blocs « compagnons » d'après le théorème. q.e.d.

Démonstration du théorème principal : Soient $P_1, \dots, P_r$ les invariants de similitude de A . Alors *i*) et *ii*) sont vérifiées. En particulier :

$$XI_n - A = P \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & P_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & P_r \end{pmatrix} Q$$

pour certaines matrices $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K}[X])$. En prenant le déterminant, on trouve :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det P(P_1 \dots P_r) \det Q \\ &\Rightarrow \chi_A(X) = c P_1 \dots P_r \end{aligned}$$

où $c := \det P \det Q \in \mathbb{K}^*$. Comme $\chi_A(X)$ et $P_1 \dots P_r$ sont unitaires, $c = 1$.

En particulier, $\deg \chi_A(X) = n = \deg P_1 + \dots + \deg P_r$. Donc dans la

matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & P_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & P_r \end{pmatrix}$, le nombre de « 1 » sur la diagonal est :

$$n - r = (\deg P_1 - 1) + \dots + (\deg P_r - 1) .$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

et que :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c|c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c} 1 \\ \ddots \\ 1 \\ P_1 \\ \ddots \\ P_r \end{array} \right) \sim XI_n - A .$$

On applique alors le lemme 10.3.2 aux matrices A et $\left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array} \right)$.

Il reste à montrer que P_r est le polynôme minimal de A . Il suffit de vérifier que P_r est le polynôme minimal de $\mathcal{C} := \left(\begin{array}{c|c|c} C_{P_1} & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & C_{P_r} \end{array} \right)$. Or, un polynôme $p(X)$ annule $\mathcal{C}$ si et seulement si $p(C_{P_1}) = \dots = p(C_{P_r}) = 0$ i.e. $P_i | p(X)$ pour tout i (car C_{P_i} a pour polynôme minimal P_i). Donc :

$$p(\mathcal{C}) = 0 \Leftrightarrow P_r | p(X) .$$

Ainsi, $\mathcal{C}$, et donc A , ont pour polynôme minimal P_r .

q.e.d.

10.4 Endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E .

Les facteurs invariants $P_1, \dots, P_r$ de la matrice de u dans une base de E ne dépendent pas de la base choisie ; on les appellera les facteurs invariants de u .

Pour tout x de E , on note :

$$E_x := \langle x, u(x), \dots, u^k(x), \dots \rangle .$$

Remarque : $E_x = \{P(u)(x) : P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$.

Le sous-espace E_x est stable par u . De plus si $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u (par exemple le polynôme minimal de u), alors E_x est engendré par les vecteurs $x, \dots, u^{d-1}(x)$ où d est le degré de $P(X)$ (*exo*) .

Définition 71 *On dit que u est un endomorphisme cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.*

Proposition 10.4.1 *Soit u un endomorphisme de E de polynôme minimal $m_u(X)$.*

L'endomorphisme u est cyclique si et seulement si $\deg m_u = \dim E$ (i.e. $m_u(X) = \chi_u(X)$ le polynôme caractéristique de u).

Démonstration : Soit $d := \deg m_u(X)$. Soit $n := \dim E$. Si $E_x = E$, alors il existe $k \leq d$ tel que $x, \dots, u^{k-1}(x)$ forment une base de E_x . On a donc :

$$k = \dim E_x = \dim E = n \leq d$$

Donc $\deg \chi_u(X) \leq \deg m_u(X)$. Or, $m_u(X)$ divise $\chi_u(X)$ et les deux sont unitaires donc : $\chi_u = m_u$.

Pour la réciproque on utilise les facteurs invariants $P_1, \dots, P_r$ de u . On a $P_1 | \dots | P_r$, $P_1 \dots P_r = \chi_u(X)$ et $P_r = m_u(X)$. Si $m_u(X) = \chi_u(X)$, alors $r = 1$ et il existe une base $e_1, \dots, e_n$ de E où la matrice de u est une matrice compagnon : C_{P_1} .

On a alors :

$$u(e_i) = e_{i+1}$$

si $1 \leq i \leq n$. Donc :

$$\begin{aligned} E &= \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \langle e_1, \dots, u^{n-1}(e_1) \rangle \\ &= E_{e_1} \end{aligned}$$

et u est cyclique.

q.e.d.

Remarque : si u est cyclique et si $E = E_x$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(u)(x) = 0 \Leftrightarrow P(u) = 0 \Leftrightarrow m_u(X) | P(X) .$$

En effet, si $P(u)(x) = 0$, alors $P(u)(u^k(x)) = u^k(P(u)(x)) = 0$ pour tout k , donc $P(u)$ est nul sur $E_x = E$.

En particulier, si $E_x = E$, alors : $x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)$ est une base de E .

Voici une version du théorème 10.3.3 pour les endomorphismes :

Théorème 10.4.2 *Si u est un endomorphisme de E , alors il existe une suite de sous-espaces stables de E : $E_1, \dots, E_r$ tels que :*

- i) $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;
 - ii) pour tout $1 \leq i \leq r$, la restriction $u_i := u|_{E_i}$ est un endomorphisme cyclique ;
 - iii) si pour tout i , P_i est le polynôme minimal de u_i , alors $P_1 | \dots | P_r$.
- De plus la suite $P_1, \dots, P_r$ ne dépend pas de la décomposition choisie. Ce sont les facteurs invariants de u .*

Remarque : il existe une base $e_1, \dots, e_n$ de E où la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$

c'est la réduction de Frobenius.

Théorème 10.4.3 (Frobenius) *Soit u un endomorphisme de E . Notons $P_1, \dots, P_r$ ses facteurs invariants. On note :*

$$\mathcal{C}(u) := \{v \in \mathcal{L}(E) : uv = vu\}$$

l'espace des endomorphismes qui commutent à u . Alors :

$$\dim \mathcal{C}(u) = (2r-1)d_1 + (2r-3)d_2 + \dots + d_r$$

où $d_i := \deg P_i$ pour tout i .

Démonstration : Soit $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ une décomposition comme dans le théorème 10.4.2. On note $u_i := u|_{E_i}$. Pour tout $x \in E$ on pose $f_j(x)$ la composante de $f(x)$ dans E_j :

$$f(x) = f_1(x) + \dots + f_r(x)$$

avec $f_1 j(x) \in E_j$ pour tout j . Alors $f_j : E \rightarrow E_j$, $x \mapsto f_j(x)$ est linéaire. Pour tous $1 \leq i, j \leq r$, on pose :

$$f_{i,j} := f_j|_{E_i} : E_i \rightarrow E_j .$$

L'application :

$$\mathcal{L}(E) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i, j \leq r} \mathcal{L}(E_i, E_j)$$

est un isomorphisme (*exo*) .

Pour tous $1 \leq i, j \leq r$, on pose

$$\mathcal{C}_{i,j} := \{F \in \mathcal{L}(E_i, E_j) : u_j F = F u_i\} .$$

On a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}(u) &\Leftrightarrow fu = uf \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, \forall x \in E_i, fu(x)uf(x) \\ &\forall 1 \leq i \leq r, \forall x \in E_i, f_1 u(x) + \dots + f_r u(x) = u f_1(x) + \dots + u f_r(x) \\ &\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, \forall x \in E_i, \forall 1 \leq j \leq r, f_j u(x) = u f_j(x) \\ &\forall 1 \leq i, j \leq r, f_j u_i = u_j f_j|_{E_i} \\ &\forall 1 \leq i, j \leq r, f_{i,j} u_i = u_j f_{i,j} . \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{C}(u) \simeq \bigoplus_{1 \leq i, j \leq r} \mathcal{C}_{i,j}$ et :

$$\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{1 \leq i, j \leq r} \dim \mathcal{C}_{i,j} .$$

Calculons $\dim \mathcal{C}_{i,j}$: soit $x \in E_i$ tel que :

$$E_i = \langle x, \dots, u_i^{d_i-1}(x) \rangle = \langle x, \dots, u^{d_i-1}(x) \rangle$$

(en particulier, $x, \dots, u^{d_i-1}(x)$ est une base de E_i).

Soit $\Phi : \mathcal{C}_{i,j} \rightarrow E_j$, $F \mapsto F(x)$.

Alors Φ est injective :

en effet, si $F \in \mathcal{C}_{i,j}$ et si $\Phi(F) = 0$, alors $F(x) = 0$ et pour tout $k \geq 0$,

on a :

$$F u_i^k(x) = u_j^k F(x) = 0$$

donc F est nul sur E_i i.e. $F = 0$.

On a $\text{Im } \Phi = \ker P_i(u_j) \subseteq E_j$.

En effet, si $F \in \mathcal{C}_{i,j}$, alors :

$$P_i(u_j)(F(x)) = (P_i(u_j)F)(x)$$

$$\begin{aligned}
&= (FP_i(u_i))(x) \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Donc $F(x) \in \ker P_i(u_j)$ pour tout $F \in \mathcal{C}_{i,j}$. ainsi : $\text{Im } \Phi \subseteq \ker P_i(u_j)$.
 Pour l'inclusion réciproque, soit $y \in \ker P_i(u_j)$. On pose alors :

$$F(Q(u_i)(x)) := Q(u_j)(y)$$

pour tout polynôme Q . L'application $F : E_i \rightarrow E_j$ est bien définie en effet :
 si $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ sont des polynômes tels que $Q_1(u_i)(x) = Q_2(u_i)(x)$, alors

$$(Q_1 - Q_2)(u_i)(x) = 0 \Rightarrow P_i | Q_1 - Q_2$$

(car P_i est le polynôme minimal de u_i)

$$\Rightarrow (Q_1 - Q_2)(u_j)(y) = 0$$

(car $y \in \ker(P_i(u_j))$)

$$\Rightarrow Q_1(u_j)(y) = Q_2(u_j)(y) .$$

L'application est linéaire et on a : $Fu_i(x) = u_j(y)$ et $F(x) = y$ donc :

$$\begin{aligned}
Fu_i(x) &= u_jF(x) \\
&\Rightarrow Fu_i = u_jF
\end{aligned}$$

sur E_i .

Ainsi, $F \in \mathcal{C}_{i,j}$ et $\Phi(F) = F(x) = y$.

On a donc $\dim \mathcal{C}_{i,j} = \dim \ker P_i(u_j)$.

Nous allons montrer que :

$$\dim \ker P_i(u_j) = \begin{cases} d_i & \text{si } i \leq j \\ d_j & \text{si } i \geq j \end{cases} .$$

Si $i \geq j$, alors $P_j | P_i$ donc $P_i(u_j) = 0$ et $\ker P_i(u_j) = \ker 0 = E_j$. Donc $\dim \ker P_i(u_j) = \dim E_j = d_j$.

Si $i \leq j$, alors $P_i | P_j$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_iQ = P_j$.

Soit $S \in \mathbb{K}[X]$. On a : $S(u_j)(x) \in E_j$ et :

$$\begin{aligned}
S(u_j)(x) \in \ker P_i(u_j) &\Leftrightarrow P_i(u_j)S(u_j)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow P_j | P_iS \\
&\Leftrightarrow P_iQ | P_iS
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Q|S \text{ .}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker P_i(u_j) &= \{S(u_j)(x) : Q|S\} \\ &= \{(QS_1)(u_j)(x) : S_1 \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \langle Q(u_j)(u_j^k(x)) : k \geq 0 \rangle \\ &= \langle Q(u_j)(u_j^k(x)) : 0 \leq k \leq d_i - 1 \rangle \end{aligned}$$

(exo) .

Or les vecteurs $Q(u_j)(u_j^k(x)) : 0 \leq k \leq d_i - 1$ sont indépendants donc $\dim \ker P_i(u_j) = d_i$.

En conclusion, on a :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}(u) &= \sum_{1 \leq i, j \leq r} \dim \mathcal{C}_{i,j} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i + \sum_{1 \leq j < i \leq r} d_j + \sum_{1 \leq i \leq r} d_i \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} d_i + \sum_{1 \leq i \leq r} d_i \\ &= 2 \sum_{1 \leq i \leq r} (r - i) d_i + \sum_{1 \leq i \leq r} d_i \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} (2r - 2i + 1) d_i \text{ .} \end{aligned}$$

q.e.d.

Remarques :

— si $u = \lambda \text{Id}_E$, alors $r = n$ et les facteurs invariants de u sont $P_1 = \dots = P_r = (X - \lambda)$ et on retrouve que :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{C}(u) &= \sum_{1 \leq i \leq r} (2n - 2i - 1) \\ &= 2n - 1 + 2n - 3 + \dots + 1 \\ &= n^2 = \dim \mathcal{L}(E) \text{ .} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{C}(u) = \mathcal{L}(E)$.

— si u est cyclique, alors : $r = 1$ et $P_1 = \chi_u(X)$ donc :

$$\dim \mathcal{C}(u) = n \text{ .}$$

On en déduit dans ce cas que :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(u) &= \mathbb{K}[u] \\ &= \{P(u) : P \in \mathbb{K}[X]\} \\ &= \langle \text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1} \rangle .\end{aligned}$$

Index

- $I(k)$, ensemble des inversions, 34
- $GL_n(\mathbb{K})$, groupe des matrices inversibles, 11
- $\text{mult}_\lambda P$, multiplicité, 64
- $m_a(\lambda)$, 66
- $m_g(\lambda)$, 66
- diagonaliser, 62
- polynôme minimal, 79
- arrangement, 34
- arrangement pair, impair, 34
- axe d'une rotation, 129
- bloc de Jordan, 99
- Cayley-Hamilton, 75
- coefficient binomial, $\binom{n}{k}$, C_n^k , 110
- cyclique, 100
- diagonalisable, 61
- diviseurs élémentaires, 144
- endomorphisme cyclique, 150
- espace propre, 58
- exponentielle d'une matrice, 114
- groupe général linéaire, 11
- hauteur, 87
- invariants de similitude, 144
- inversible à gauche, 29
- inversion, 34
- matrice compagnon, 55
- matrice de Jordan, 99
- multiplicité algébrique, 66
- multiplicité géométrique, 66
- Pascal, 7
- poids, 87
- polynôme annulateur, 75
- polynôme caractéristique, 50
- polynôme annulateur, 79
- premiers entre eux, 84
- projection, 62
- quaternions, 132
- quaternions purs, 134
- réflexion, 62
- scindé, 65
- somme directe, 59
- sous-espace caractéristique, 88
- spectre, 48
- trace, 52
- trigonalisable, 69
- valeur propre, 48
- vecteur propre, 48
- vecteur propre généralisé, 87