Table des matières

Chapitre 1: Calcul Matriciel

- 1.1. Définitions et généralités
- 1.2. Opérations sur les matrices
- 1.3. Matrices carrées inversibles. Définition et propriétés
- 1.3. Exemples

Chapitre 2: Calcul des déterminants des matrices carrées:

- 2.1. Développement par rapport à une ligne. Exemples
- 2.2. Développement par rapport à une colonne. Exemples
- 2.3. Propriétés fondamentales et règles de calcul
- 2.4. Inversion d'une matrice carrée.

Chapitre 3. Espaces vectoriels

- 3.1. Définition d'un espace vectoriel. Exemples simples
- 3.2. Règles de calcul dans un espace vectoriel
- 3.2. L'espace vectoriel des matrices sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$).
- 3.3. Sous-espaces vectoriels: définitions, exemples, union et intersection de sous espaces-vectoriels.
- 3.4. Somme et somme directe de sous espaces vectoriels.
- 3.5. Bases et dimensions de sous espaces vectoriels. Exemples et théorèmes fondamentaux.

Chapitre 4. Applications linéaires

- 4.1. Définition exemples et propriétés. .
- 4.2. Noyau et image d'une application. Théorème des dimensions.
- 4.3. Matrice d'une application linéaire. Définition, exemples et propriétés
- 4.4. Matrice d'une application linéaire et changement de base

Chapitre 5. Systèmes linéaires

- 5.1. Définition et écriture matricielle
- 5.2. Système de Cramer
- 5.3. Cas général (quelques cas particuliers).

CHAPITRE I: CALCUL MATRICIEL

1 DEFINITION ET GENERALITES

Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps commutatif. On désignera par $0 = 0_{\mathbb{K}}$ l'élément neutre de pour la loi $+$ et on l'appellera le zéro du corps $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. De même, $1 = 1_{\mathbb{K}}$ désignera l'élément neutre pour la loi $\cdot$. D'une manière générale, les éléments de $\mathbb{K}$, sont appelés scalaires.

Définition 1 Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps commutatif. Une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

Le chiffre n désigne le nombre de lignes, le chiffre m désigne le nombre de colonnes. Les éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sont appelés coefficients de la matrice A . Si $n = m$, on dit que A est une matrice carrée et on note $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 2 L'élément $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est situé sur l'intersection de la ligne i avec la colonne j . Si A est une matrice carrée, les a_{ii} $i = 1, 2, \dots, n$, sont appelés éléments de la diagonale de A . On dit aussi éléments diagonaux de A . Si tous les éléments non diagonaux de A sont égaux à 0, on dit que A est une matrice diagonale. Les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont des matrices diagonales.

Quelques notations:

1. L'ensemble des matrices à n lignes, m colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On utilise aussi l'écriture $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
2. Si $n = m$, on dit que A est une matrice carrée et on note $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0. On la note $O_{n,m}(\mathbb{K})$ (ou $O_n(\mathbb{K})$ si $n = m$):

$$O_{2,3}(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{3,2}(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$O_2(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_3(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 OPERATIONS SUR LES MATRICES

2.1 SOMME DE MATRICES

Définition 3 Soient $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ deux matrices. La somme $A + B$ est la matrice $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par la relation:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, m\}. \quad (1)$$

On écrira dans ce cas,

$$[a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} + [b_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} = [a_{ij} + b_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \quad (2)$$

Exemple 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Remarque 5 La somme de matrices n'a de sens que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

On a les propriétés suivantes:

1. La somme des matrices définit une opération interne dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$:

$$(A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \Rightarrow A + B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \in \quad (3)$$

2. La somme des matrices est commutative:

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) : A + B = B + A \quad (4)$$

3. La somme des matrices est associative:

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) : A + (B + C) = (A + B) + C \quad (5)$$

4. La matrice nulle $O_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) : A + O_{n,m}(\mathbb{K}) = O_{n,m}(\mathbb{K}) + A = A \quad (6)$$

Il découle de ce qui précède le résultat suivant:

Theorème 6 *L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.*

Preuve. Il reste seulement à démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, admet un élément symétrique dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On remarque que pour toute matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, la matrice $-A = [-a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et vérifie les conditions de l'élément symétrique. ■

3 PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE

Définition 7 *Soient $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et λ un scalaire de $\mathbb{K}$. Le produit A par λ est la matrice:*

$$\lambda \bullet A = [\lambda \cdot a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \quad (7)$$

Exemple 8

$$2 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

On a les propriétés suivantes

1. $0_{\mathbb{K}} \bullet A = O_{n,m}(\mathbb{K})$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,
2. $\alpha \bullet (A + B) = (\alpha \bullet A) + (\alpha \bullet B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}))^2$,
3. $(\alpha + \beta) \bullet A = (\alpha \bullet A) + (\beta \bullet A)$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,
4. $\alpha \bullet (\beta \bullet A) = (\alpha \cdot \beta) \bullet A$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

3.1 PRODUIT DE MATRICES

Définition 9 *Soient $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{p,m} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ deux matrices. Le produit AB est la matrice $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, définie par:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

1. Le produit AB n'a de sens que si le nombre de colonnes la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B .

2. L'élément c_{ij} s'obtient en multipliant les éléments de la ligne i de A par les éléments de la colonne j de B puis en sommant.

3. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a

1. Le produit AB n'existe pas car $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$,

2. Le produit BA existe et on a

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

3. Meme si les deux produits AB et BA existent, ils ne sont pas forcément égaux. En effet, soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Le produit de matrice est associatif (quand il existe):

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \quad C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K}) : (AB)C = A(BC) \quad (8)$$

4 MATRICES INVERSIBLES

Définition 10 On appelle matrice unité d'ordre n la matrice carrée (n lignes, n colonnes):

$$I_n(\mathbb{K}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

C'est à dire,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$$

Exemple 11

$$I_1(\mathbb{K}) = 1, \quad I_2(\mathbb{K}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3(\mathbb{K}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque 12

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AI_n(\mathbb{K}) = I_n(\mathbb{K})A = A \quad (9)$$

Définition 13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que A est inversible (ou bien admet un inverse), s'il existe une matrice carrée notée A^{-1} appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et telle que

Exemple 14 L'inverse $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Remarque 15 Il existe des matrices carrées qui ne sont pas inversibles. On donnera dans le chapitre prochain les conditions d'inversibilité d'une matrice ainsi qu'une méthode de calcul de l'inverse.

On a les propriétés suivantes

1. Si l'inverse d'une matrice existe alors, il est unique
2. Si A est inversible alors A^{-1} est aussi inversible et de plus $(A^{-1})^{-1} = A$
3. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont inversibles alors, le produit AB est aussi inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

TD1 d'Algèbre II: APPRENDRE A MANIPULER LES MATRICES

Exercice 1 On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculer: $A + B$, $C + D$, AC , AD , CD , DC , EF , FE , EC , CF .

Exercice 2 Soient A , B deux matrices. Répondre par vrai ou faux en justifiant vos réponses:

1. Si le produit AB est défini alors le produit BA est aussi défini.
2. Si la somme $A + B$ est définie alors le produit AB est défini.
3. Si les produits AB et BA sont définis alors la somme $A + B$ est définie.

Exercice 3 Soit $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in M_{n,m}(K)$. On appelle transposée de A , la matrice tA dont les lignes sont les colonnes de A . Autrement dit:

$${}^tA = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in M_{m,n}(K) \quad \text{avec} \quad b_{ij} = a_{ji}$$

1. Calculer la transposée de chacune des matrices de l'exercice précédent.
2. Montrer que dans le cas général, on a: ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Exercice 4 Soient A , B deux matrices. Montrer que:

1. Si le produit AB est défini alors le produit ${}^tB {}^tA$ est aussi défini.
2. Si la somme $A + B$ est définie alors le produit $A {}^tB$ est défini.
3. Si les produits AB et BA sont définis alors la somme $A + {}^tB$ est définie.

Exercice 5 Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer A^2 puis $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et écrire son inverse A^{-1} .

Exercice 6 On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Déterminer les trois nombres a, b, c tels que : $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. En déduire A^{-1} .

CHAPITRE 2: CALCUL DES DETERMINANTS

1 DEVELOPPEMENT PAR RAPPORT A UNE LIGNE

Soit $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Pour calculer le déterminant de A (noté $|A|$), on procédera par étape suivant la croissance de n :

1. $A = [a] \Rightarrow |A| = a$,
2. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,
3. Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, on choisit une ligne quelconque i et on développe de la manière suivante:

$$|A| = \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|, \quad (1)$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j .

Exemple 1 Supposons que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

- Si on développe par rapport à la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) + 2(2) = -2 \end{aligned}$$

- Si on développe par rapport à la deuxième ligne, on obtient

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| = 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (-7) - 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (5) = -2 \end{aligned}$$

Si on développe par rapport à la troisième ligne, on obtient

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{3+j} a_{3j} |A_{ij}| = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (1) - 3 \cdot (1) + 1 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

D'une manière générale si $n \geq 3$ alors le déterminant se calcule par la formule

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|, \quad (2)$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j .

Remarque 2 (*Importante*)

Pour développer le déterminant, Il est préférable de développer par rapport à la ligne qui contient le plus grand nombre de zéros.

Exemple 3 *Calculons le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, on obtient

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \left\{ -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &\quad + 2 \cdot \left\{ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= 1 \cdot \{-2 \cdot (0) + 3 \cdot (2)\} + 2 \cdot \{1 \cdot (2) + 2 \cdot (2)\} = 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

Définition 4 *Une matrice carrée A est dite triangulaire si elle admet l'une des 2 formes suivantes:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Triangulaire supérieure,}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Triangulaire inférieure,}$$

a. Une matrice diagonale est une matrice triangulaire

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ sont des matrices triangulaires.

Proposition 5 Si $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire alors,

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \quad (3)$$

2 PROPRIETES DES DETERMINANTS

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$ une matrice carrée.

Posons

$$\begin{cases} L_1 = [a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}] \\ L_2 = [a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_i = [a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_n = [a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}] \end{cases}$$

On peut donc écrire

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad |A| = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix}$$

Theorème 6 Règles fondamentales de calcul des déterminants

1. (Linéarité par rapport à la ligne i): Si $L_i = L'_i + L''_i$ alors

$$|A| = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L'_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L''_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} \quad (4)$$

2. (Homogénéité par rapport à la ligne i): Si $L_i = \lambda.L'_i$ alors,

$$|A| = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ \lambda.L'_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} = \lambda. \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L'_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

3. Si deux lignes sont proportionnelles alors, le déterminant est égal à 0:

$$L_i = \lambda.L_j \Rightarrow \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_j \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

4. Si on permute deux lignes entre elles alors, le déterminant change de signe:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_j \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_j \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} \quad (7)$$

5. Le déterminant ne change pas si on ajoute à la ligne i une combinaison linéaire des autres lignes:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j \\ \cdot \\ L_n \end{vmatrix} \quad (8)$$

Cette dernière propriété est surtout utilisée pour faire apparaître des zéros dans une ligne donnée.

Exemple 7 *Considérons la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant L_2 par $L_2 + L_3$, on obtient

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En remplaçant L_2 par $L_2 + \frac{1}{2}L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$, on obtient

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2 \times \left(2 \times -\frac{1}{2} \times 3 \right) = 6$$

3 DEVELOPPEMENT PAR RAPPORT A UNE COLONNE

On peut développer un déterminant suivant une colonne conformément à la formule suivante:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|, \quad (9)$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j .

Remarque 8 *Les formules 2 et 9 bien que semblables, sont très différentes sur le point de l'utilisation. En effet dans la première, on fixe une ligne et on fait varier les colonnes tandis que dans la seconde, on fixe une colonne et on fait varier les lignes.*

Exemple 9 *Reprenons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ utilisée lors des développements par rapport aux lignes.*

1. Si on développe par rapport à la première colonne, on obtient

$$|A| = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_{ij} |A_{ij}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 2 \cdot (1) = -2$$

Proposition 10 *Soit $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(K)$ une matrice carrée. Désignons par C_i la colonne i .*

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \quad C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

alors,

1. (Linéarité par rapport à la colonne i): Si $C_i = C'_i + C''_i$ alors

$$|A| = |C_1, C_2, \dots, C'_i, \dots, C_n| + |C_1, C_2, \dots, C''_i, \dots, C_n| \quad (10)$$

2. (Homogénéité par rapport à la colonne i): Si $C_i = \lambda.C'_i$ alors,
3. Si deux colonnes sont proportionnelles alors, le déterminant est égal à 0:

$$C_i = \lambda.C_j \Rightarrow |A| = 0 \quad (11)$$

4. Si on permute deux colonnes alors, le déterminant change de signe:

$$|C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n| = -|C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n| \quad (12)$$

5. Le déterminant ne change pas si on ajoute à la colonne i une combinaison linéaire des autres colonnes:

$$|C_1, \dots, C_i, \dots, C_n| = \left| C_1, \dots, C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j, \dots, C_n \right| \quad (13)$$

Exemple 11 *Considérons la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant C_2 par $C_2 - C_4$, on obtient:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En remplaçant C_3 par $C_3 - C_2$, on obtient:

$$|A| = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

4 INVERSION DES MATRICES

Définition 12 *Soit $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A , la matrice ${}^t A$ dont les lignes sont les colonnes de A . Autrement dit:*

$${}^t A = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in M_{m,n}(K) \quad \text{avec} \quad b_{ij} = a_{ji} \quad (14)$$

Exemple 13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Les deux théorèmes suivants sont fondamentaux la théorie des déterminants

Theorème 14 Le déterminant d'une matrice carrée et celui de sa transposée sont égaux.

Theorème 15 Si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices carrées alors,

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Définition 16 Soit $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle:

1. mineur d'ordre (i, j) le scalaire : $|A_{ij}|$, où A_{ij} est la matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j .
2. cofacteur d'ordre (i, j) le scalaire : $(-1)^{i+j} |A_{ij}|$.
3. la matrice des cofacteurs de A est appelée comatrice de A . On la note $com(A)$.

Exemple 17 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ alors $com(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Theorème 18 Soit $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors,

$$A \cdot {}^t(com(A)) = {}^t(com(A)) \cdot A = |A| \cdot I_n \quad (15)$$

Theorème 19 Soit $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors,

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

Dans ce cas, la matrice inverse est donnée par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t(com(A)) \quad (16)$$

Exemple 20 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. On a $|A| = -2$. Elle est donc inversible. On a:

$$\begin{aligned} |A_{11}| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, & |A_{12}| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, & |A_{13}| &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \\ |A_{21}| &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, & |A_{22}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & |A_{23}| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \\ |A_{31}| &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & |A_{32}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & |A_{33}| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

Donc

$$\text{com}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalement

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \bullet {}^t(\text{com}(A)) = -\frac{1}{2} \bullet \begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple 21 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. On a déjà vu que $|A| = 6$. Elle est donc inversible. Trouvons $\text{com}(A)$.

On a

$$\begin{aligned}
 |A_{11}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, & |A_{12}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, & |A_{13}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\
 |A_{14}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, & |A_{21}| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, & |A_{22}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \\
 |A_{23}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -9, & |A_{24}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, & |A_{31}| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \\
 |A_{32}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, & |A_{33}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3, & |A_{34}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
 |A_{41}| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, & |A_{42}| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, & |A_{43}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \\
 |A_{44}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2,
 \end{aligned}$$

D'où

$$\text{com}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Finalement

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

TD2 d'Algèbre II: LES DETERMINANTS

Exercice 1 Pour chacune des matrices suivantes, calculer le déterminant ainsi que la matrice inverse quand elle existe:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_5 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

Exercice 2 Trouver sans les calculer directement, les déterminants suivants:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

On considère le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

1. Ecrire D_1, D_2, D_3, D_4 .
2. En développant selon la première colonne, exprimer D_n en fonction D_{n-1} et D_{n-2} .
3. En déduire D_n .

Exercice 3 Calculer suivant le paramètre réel m l'inverse de la matrice

$$\begin{bmatrix} m & -1 & 0 & -1 \\ -1 & m & -1 & 0 \\ 0 & -1 & m & -1 \\ -1 & 0 & -1 & m \end{bmatrix}.$$

CHAPITRE 3: ESPACES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

1 ESPACE VECTORIEL

1.1 DEFINITIONS

Definition 1 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (on dit aussi $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) est un ensemble non vide E muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe $\bullet : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$, tels que:

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif;
2. La loi externe $\bullet$ vérifie les conditions:
 - (a) $\forall (x, y) \in E \times E, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y ;$
 - (b) $\forall x \in E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : (\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x ;$
 - (c) $\forall x \in E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : \alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \cdot \beta) \bullet x ;$
 - (d) $\forall x \in E : 1_{\mathbb{K}} \bullet x = x.$
1. Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires. L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est appelé vecteur nul de E et sera noté 0_E ou tout simplement 0 .
2. Dans la relation 2b, on utilise le même signe $+$ pour deux opérations différentes. En effet d'un côté une somme de scalaires et de l'autre, on a une somme de vecteurs. Il appartient au lecteur de pouvoir distinguer les deux situations.

1.2 Exemples

Exemple 2 Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et un entier naturel. On définit dans l'ensemble

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$$

l'opération interne $+$ et l'opération externe $\bullet$ comme suit :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad (1)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \bullet (x_1, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n) \quad (2)$$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de ces deux opérations est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dont le vecteur nul est le vecteur $(0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$.

Corollary 3 *Tout corps commutatif est un espace vectoriel sur lui même.*

Example 4 *Le corps $\mathbb{C}$ des complexes est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. L'inverse n'est pas vrai.*

Example 5 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f'' + f = 0$ muni de la somme usuelle des fonctions et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.*

Example 6 *L'ensemble $M_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de la somme usuelle des matrices et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.*

2 REGLES DE CALCUL DANS UN ESPACE VECTORIEL

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On a alors les assertions suivantes:

Proposition 7 *La multiplication du vecteur nul par un scalaire est égal au vecteur nul:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : \quad \alpha \bullet 0_E = 0_E$$

Proposition 8 *Le produit d'un vecteur par le scalaire nul est égal au vecteur nul:*

$$\forall x \in E : \quad 0_{\mathbb{K}} \bullet x = 0_E$$

Les deux propositions précédentes admettent la réciproque suivante:

Proposition 9 $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \quad \alpha \bullet x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E.$

Proposition 10 *Le produit d'un scalaire par le symétrique d'un vecteur est égal au produit du symétrique de ce scalaire par le vecteur et c'est aussi égal au symétrique du produit du scalaire par le vecteur:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E : \quad \alpha \bullet (-x) = (-\alpha) \bullet x = -(\alpha \bullet x)$$

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 DEFINITION, EXEMPLES ET CARACTERISATION

Definition 11 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E . On dira que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v) de E si:

1. $\forall (x, y) \in F \times F : x + y \in F$ (stabilité par rapport à la loi interne);
2. $\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \bullet x \in F$ (stabilité par rapport à la loi externe).

Proposition 12

1. Si F est un s.e.v de E alors, $0_E \in F$. L'inverse n'est pas vrai.
2. Si F est un s.e.v de E alors, $\forall x \in F, -x \in F$. L'inverse n'est pas vrai.

Preuve. 1. Supposons que F est un s.e.v de E . D'après la stabilité par rapport à la loi externe, on a

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \bullet x \in F$$

Donc pour $\alpha = 0_{\mathbb{K}}, \alpha \bullet x = 0_{\mathbb{K}} \bullet x = 0_E \in F$.

Pour montrer que l'inverse n'est pas vrai, on considère le contre-exemple suivant. L'ensemble $F = [-1, 1]$ est un sous-ensemble non vide du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$. Or,

$$1 \in F, \quad 2 \in \mathbb{R} \quad \text{mais } 2 \cdot 1 = 2 \notin F.$$

2. De même d'après la stabilité par rapport à la loi externe, on a

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \bullet x \in F$$

Donc pour $\alpha = -1_{\mathbb{K}}, \alpha \bullet x = (-1_{\mathbb{K}}) \bullet x = -x \in F$.

Pour Pour montrer que l'inverse n'est pas vrai, on considère le même contre-exemple. On a $x \in F \Rightarrow -x \in F$. Mais comme on l'a déjà vu F n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}$. ■

Remarque 13 Si E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel alors, $\{0_E\}$ et E sont deux s.e.v. de E . De plus, pour tout autre s.e.v F de E , on a:

$$\{0_E\} \subseteq F \subseteq E$$

Exemple 14 L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ est un s.e.v du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. En effet,

- a. $(x, y) \in F \Rightarrow F \neq \Phi$;

b. $(x, y) \in F, (x', y') \in F \Rightarrow (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$. D'autre part,

$$(x + x') + (y + y') = (x + y) + (x' + y') = 0 + 0 = 0.$$

Donc, $(x, y) + (x', y') \in F$.

c. $(x, y) \in F, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \bullet (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$. Par ailleurs,

$$\alpha x + \alpha y = \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Donc, $\alpha \bullet (x, y) \in F$.

Exemple 15 L'ensemble $F = \{(x + y, x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ est un s.e.v du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. En effet,

a. $(0, 0) = (0 + 0, 0 + 2 \cdot 0) \in F \Rightarrow F \neq \Phi$;

b. Si $(x + y, x + 2y) \in F, (x' + y', x' + 2y') \in F$, alors,

$$\begin{aligned} (x + y, x + 2y) + (x' + y', x' + 2y') &= ((x + y) + (x' + y'), (x + 2y) + (x' + 2y')) \\ &= ((x + x') + (y + y'), (x + x') + 2(y + y')) \in F. \end{aligned}$$

c. Si $(x + y, x + 2y) \in F, \alpha \in \mathbb{R}$, alors,

$$\alpha \bullet (x + y, x + 2y) = (\alpha(x + y), \alpha(x + 2y)) = (\alpha x + (\alpha y), \alpha x + 2(\alpha y)) \in F.$$

Exemple 16 Dans l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2, on considère l'ensemble

$$F = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

est un s.e.v de $M_2(\mathbb{R})$.

Theorem 17 (de caractérisation) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E . Alors,

F est un s.e.v de $E \Leftrightarrow \forall (x, y) \in F \times F, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : \alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F$

Exercice 18 Montrer en utilisant le théorème précédent que l'ensemble

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \wedge x + 2z = 0\}$$

est un s.e.v du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

3.2 INTERSECTION ET UNION DE SOUS ESPACES VECTORELS

Proposition 19 Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Alors, l'ensemble

$$\bigcap_{k=1}^n F_k = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$$

est aussi un s.e.v de E .

Preuve. On a $0_E \in \bigcap_{k=1}^n F_k$ car $0_E \in F_k \ \forall k = 1, \dots, n$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \left(\bigcap_{k=1}^n F_k \right)^2 &\Rightarrow (x, y) \in F_k^2 \quad \forall k = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow x + y \in F_k \quad \forall k = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow x + y \in \bigcap_{k=1}^n F_k. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k=1}^n F_k \text{ et } \alpha \in \mathbb{K} &\Rightarrow x \in F_k \quad \forall k = 1, \dots, n \text{ et } \alpha \in \mathbb{K} \\ &\Rightarrow \alpha \bullet x \in F_k \quad \forall k = 1, \dots, n \Rightarrow \alpha \bullet x \in \bigcap_{k=1}^n F_k. \end{aligned}$$

■

Proposition 20 La réunion de deux s.e.v n'est pas forcément un s.e.v.

Preuve. Les sous-ensembles

$$F_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

sont deux s.e.v de $\mathbb{R}^2$. D'autre part,

$$\begin{cases} (1, 0) \in F_1 \\ (0, 1) \in F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1, 0) \in F_1 \cup F_2 \\ (0, 1) \in F_1 \cup F_2 \end{cases}$$

mais

$$\begin{cases} (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin F_1 \\ (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin F_2 \end{cases} \Rightarrow (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin F_1 \cup F_2$$

On n'a pas donc stabilité de l'union par rapport à la loi interne. Donc l'union $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$. ■

La proposition suivante donne les conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles l'union de s.e.v est un s.e.v.

Proposition 21 Soient F_1, F_2 deux s.e.v du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Alors,

$$F_1 \cup F_2 \text{ s.e.v de } E \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \quad \text{ou} \quad F_2 \subseteq F_1$$

Preuve. ($\Rightarrow$) Soient F_1, F_2 deux s.e.v du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tels que $F_1 \cup F_2$ est aussi un s.e.v de E . Supposons que $F_1 \not\subseteq F_2$ et montrons que nécessairement, $F_2 \subseteq F_1$. On a

$$F_1 \not\subseteq F_2 \Rightarrow \exists a \in F_1 \text{ et } a \notin F_2.$$

Soit maintenant $x \in F_2$. On a

$$\begin{cases} a \in F_1 \subseteq F_1 \cup F_2 \\ x \in F_2 \subseteq F_1 \cup F_2 \end{cases} \Rightarrow a + x \in F_1 \cup F_2 \quad (F_1 \cup F_2 \text{ est un s.e.v de } E)$$

Par ailleurs $a + x \in F_1 \cup F_2 \Rightarrow a + x \in F_1$ ou $a + x \in F_2$. Or

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + x \in F_1 \\ \text{ou} \\ a + x \in F_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a + x \in F_1 \\ \text{ou} \\ a + x \in F_2 \text{ et } -x \in F_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + x \in F_1 \\ \text{ou} \\ (a + x) + (-x) \in F_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + x \in F_1 \\ \text{ou} \\ a \in F_2 \quad (\text{impossible car } a \notin F_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a finalement $a + x \in F_1$. Par conséquent,

$$x = x + 0_E = x + (a + (-a)) = (x + a) + (-a) \in F_1 \Rightarrow F_2 \subseteq F_1.$$

■

4 SOMME ET SOMME DIRECTE DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Proposition 22 Soient F_1 et F_2 deux s.e.v d'un espace vectoriel E . Posons

$$F = \{u = u_1 + u_2 : u_1 \in F_1, u_2 \in F_2\}$$

L'ensemble F est un s.e.v de E .

Definition 23 Le s.e.v F , défini dans la proposition précédente est appelé somme des s.e.v F_1 et F_2 . On le note $F_1 + F_2$. Si de plus, $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ on dit alors que cette somme est directe et on écrit $F_1 \oplus F_2$.

Exemple 24 Montrer que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$ où

$$F_1 = \{u = (x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad , \quad F_2 = \{u = (x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Preuve. Il faut montrer que :

1. $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
2. $\forall u \in \mathbb{R}^2, \exists (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 : u = u_1 + u_2$

On a

$$u = (x_1, x_2) \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow u = (x_1, 0) = (x_1, x_1) = (0, 0) \Rightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

Par ailleurs, soit $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 : (u_1, u_2) \in F_1 \times F_2 \Rightarrow (a, b) = (x_1, 0) + (x_2, x_2) = (x_1 + x_2, x_2) \\ \Rightarrow \begin{cases} x_2 = b \\ x_1 + x_2 = a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_2 = b \\ x_1 = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = (a - b, 0) \in F_1 \\ u_2 = (b, b) \in F_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = F_1 + F_2. \end{aligned}$$

Donc, on a finalement $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$. ■

Exercice 25 Soient

$$F_1 = \{u = (x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad , \quad F_2 = \{u = (0, y, z) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$ mais que cette somme n'est pas directe.

Theorem 26 Soient F_1, F_2 deux s.e.v du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Alors,

$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall x \in E; \exists! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 / x = x_1 + x_2.$$

TD3 d'Algèbre II:

ESPACES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

<http://www.sites.google.com/site/bendoukha27>

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles. On définit sur E les deux opérations

$$\begin{aligned} + & : E \times E \rightarrow E; & (x_n)_{n \geq 0} + (y_n)_{n \geq 0} &= (x_n + y_n)_{n \geq 0} \\ \bullet & : \mathbb{R} \times E \rightarrow E; & \lambda \bullet (x_n)_{n \geq 0} &= (\lambda \cdot x_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

Montrer que $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2 Soient $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un ensemble non vide quelconque. On suppose que f est une application bijective de E dans F . On définit sur F les deux opérations $+$ et $\bullet$ comme suit:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in F; & \quad x + y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F; & \quad \lambda \bullet x = f(\lambda \bullet f^{-1}(x)) \end{aligned}$$

1. Montrer que $(F, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. Soient a, b, c, d des nombres réels vérifiant $ad - bc \neq 0$. Montrer la bijectivité de l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ par:

$$f(x, y) = (ax + by) + i(cx + dy)$$

3. Quelle est d'après 1, la structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ainsi obtenue sur $\mathbb{C}$?

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants dire en justifiant votre réponse si F est un s.e.v de E .

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$, $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3xy = 0\}$
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$, $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}$, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$, $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 4z = 0\}$
5. $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $F =$ l'ensemble des suites bornées
6. $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $F =$ l'ensemble des suites convergentes
7. $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $F =$ l'ensemble des suites croissantes
8. $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $F =$ l'ensemble des suites convergentes vers a ($a \in \mathbb{R}$).

CHAPITRE 4: BASES ET DIMENSIONS

1 PARTIES LIBRES

Definition 1 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs dans E . On dira que la famille A est libre si:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}} \quad (1)$$

Dans le cas contraire, la famille A est dite liée.

Definition 2 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs dans E . On dira que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$, sont:

1. linéairement indépendants si A est libre,
2. linéairement dépendants si A est liée.

Exemple 3 Les vecteurs $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$. Par contre, les vecteurs $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$, $v_3 = (4, 2)$ sont linéairement dépendants dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. Alors,

- a. Toute partie de E constituée d'un seul vecteur non nul est libre,
- b. Toute partie de E contenant le vecteur nul est liée,
- c. Si A est libre et $B \subseteq A$ alors B est aussi libre,
- d. Si A est liée et $A \subseteq B$ alors B est aussi liée.

1.1 PARTIES GENERATRICES

Definition 5 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs dans E . On dira qu'un vecteur $v \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ si:

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad : \quad v = \alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n \quad (2)$$

Exemple 6 Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $v_3 = (4, 2)$ est une combinaison des vecteurs $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. En effet, $v_3 = 3v_1 + v_2$.

Definition 7 Soient F un s.e.v de E et $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs dans F . On dira que A engendre F (on dit aussi que A est génératrice de F) si, tout vecteur de F est une combinaison linéaire d'éléments de A . Si A engendre F , on note alors : $F = \text{vect}(A)$.

Exemple 8 La famille $A = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$. En effet, si $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors,

$$\begin{aligned} v &= (x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right) + \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2} \right) \\ &= \frac{x+y}{2} \bullet (1, 1) + \frac{x-y}{2} \bullet (1, -1) \\ &= \frac{x+y}{2} \bullet v_1 + \frac{x-y}{2} \bullet v_2 \end{aligned}$$

Exemple 9 Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{vect}(A)$ avec $A = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$.

Proposition 10 Soient F un s.e.v de E , A et B deux familles non vides de vecteurs dans F . Alors,

1.

$$A \subseteq B \Rightarrow \text{vect}(A) \subseteq \text{vect}(B).$$

2.

$$A \subseteq B \text{ et } F = \text{vect}(A) \Rightarrow F = \text{vect}(B)$$

Theorem 11 Soient F un s.e.v de E , A et B deux familles non vides de vecteurs dans F . Alors,

$$A \text{ libre et } F = \text{vect}(B) \Rightarrow \text{Card}(A) \leq \text{Card}(B).$$

1.2 BASES

Definition 12 Soient F un s.e.v de E et $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs dans F . On dira que A est une base de F , si A libre et engendre F .

Exemple 13 $A = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On a déjà vu que A engendre F . Montrons que A libre. On a,

$$\begin{aligned} \alpha \bullet v_1 + \beta \bullet v_2 &= 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Exemple 14 Montrer que $A = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 15 Soient F un s.e.v de E et $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs dans F . Alors,

B est une base de $F \Leftrightarrow \forall v \in F, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : v = \alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n$

Proposition 16 Soient F un s.e.v de E . Si A et B sont deux bases de F . Alors,

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ deux bases de } F &\Rightarrow \begin{cases} A \text{ libre et } F = \text{vect}(B) \\ B \text{ libre et } F = \text{vect}(A) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \\ \text{card}(B) \leq \text{card}(A) \end{cases} \\ &\Rightarrow \text{card}(A) = \text{card}(B). \end{aligned}$$

■

Definition 17 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v., F un s.e.v. de E et B une base de F . Le nombre naturel $\text{Card}(B)$ est appelé dimension de F . On le note $\dim F$.

Exemple 18 On a $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Remarque 19 On a toujours par convention $\dim \{0_E\} = 0$.

Remarque 20 En réalité, la dimension dépend du corps de base $\mathbb{K}$. Par exemple, le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -e.v.-e.v. et c'est aussi un $\mathbb{R}$ -e.v. dans le premier cas sa dimension est égale à 1. Dans le second cas, sa dimension est égale à 2.

Theorem 21 Soient F un s.e.v de E et $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs dans F . Alors,

B est une de $F \Leftrightarrow \forall v \in F, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : v = \alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n$.

Dans ce cas, on écrit

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B \tag{3}$$

Remarque 22 les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont appelés coordonnées du vecteur $v \in F$ dans la base B .

Exemple 23 La famille $B_c = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ est une base du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$. De plus, les coordonnées du vecteur $v = (x_1, \dots, x_n)$ sont les scalaires $x_1, \dots, x_n$. C'est à dire:

$$v = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow v = (x_1, \dots, x_n)_{B_c}.$$

Exemple 24 La famille $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)\}$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right)_B.$$

Exemple 25 La famille $B = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ est une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$\begin{aligned} v &= (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = (x-y) \bullet v_1 + (y-z) \bullet v_2 + z \bullet v_3 \\ &\Rightarrow v = (x-y, y-z, z)_B. \end{aligned}$$

Exemple 26 On considère dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ le sous espace vectoriel $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$. Trouver une base de F et donner les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

Solution 27 On a

$$v \in F \Rightarrow v = (x, -x) = x \bullet (1, -1) = x \bullet v_1 \quad \text{avec} \quad v_1 = (1, -1)$$

Donc, $F = \text{vect}(B)$. Comme $B = \{v_1 = (1, -1)\}$ est libre, on a en réalité une base de F . De plus $v = (x, y) \in F \Rightarrow v = (x, -x)_B$ et $\dim F = 1$.

Exemple 28 On considère dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le sous espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+2z=0\}$. Trouver une base de F et donner les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

Solution 29 Soit $v = (x, y, z) \in F$. Alors,

$$\begin{aligned} v &= (x, y, z) = (y-2z, y, 2z) \\ &= (y, y, 0) + (-2z, 0, 2z) \\ &= y \bullet (1, 1, 0) + 2z \bullet (-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Posons $B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1)\}$. Il est clair que $F = \text{vect}(B)$. Montrons que B est libre. On a

$$\begin{aligned} \alpha \bullet v_1 + \beta \bullet v_2 &= 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (\alpha - \beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Donc, $B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1)\}$ est une base de F , $\dim F = 2$. D'autre part,

$$v = (x, y, z) \in F \Rightarrow v = (y, 2z)_B.$$

Proposition 30 Soit F un s.e.v de E . Alors,

- Si B est une partie libre de F alors $\text{Card}(B) \leq \dim F$,
- Si B engendre F alors $\text{card}(B) \geq \dim F$.

Corollary 31 Soit B une partie non vide du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Alors,

- a. B libre $\Rightarrow \text{Card}(B) \leq n$,
- b. B engendre $\mathbb{K}^n \Rightarrow \text{Card}(B) \geq n$.

Preuve. Découle du fait que $\dim \mathbb{K}^n = n$. ■

Corollary 32 Soient F_1 and F_2 deux s.e.v de E . Alors

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \text{ et } \dim F_1 = \dim F_2.$$

Preuve. L'implication directe est évidente. Montrons l'implication inverse. Pour cela, il suffit de montrer que $F_2 \subseteq F_1$. Supposons que cela n'est pas vrai. Il existe donc un vecteur non nul v tel que $v \in F_2$ et $v \notin F_1$. On peut donc assurer que $B' = B \cup \{v\}$ est une partie libre de F_2 . Par conséquent,

$$n + 1 = \text{card}(B') \leq \dim F_2 = \dim F_1 = n.$$

D'où contradiction. Donc $F_2 \subseteq F_1$. ■

Theorem 33 (de la base incomplète) Soit F un s.e.v de E . On suppose que $\dim F = n$. Si B est une partie libre de vecteurs de F et si $p = \text{card}(B) \leq n$, alors on peut toujours rajouter $(n - p)$ vecteurs à B pour obtenir une base de F .

Corollary 34 Soit F un s.e.v de E . On suppose que $\dim F = n$. Si B est une partie libre de vecteurs de F telle que $\text{Card}(B) = n$, alors B est une base de F .

Theorem 35 Soit F un s.e.v de E . On suppose que $\dim F = n$. Si B engendre F et si $\text{card}(B) \geq n$, alors on peut toujours retrancher $(n - p)$ vecteurs de B pour obtenir une base de F .

Corollary 36 Soit F un s.e.v de E . On suppose que $\dim F = n$. Si B engendre F et si $\text{card}(B) = n$, alors B est une base de F .

Theorem 37 Soient F_1 et F_2 deux s.e.v d'un espace vectoriel E . Alors,

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) \quad (4)$$

Corollary 38 Soient F_1 et F_2 deux s.e.v d'un espace vectoriel E . Alors,

$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F_1 + \dim F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

Preuve. L'implication directe est évidente. Montrons donc l'implication inverse. Supposons pour cela que

$$\dim E = \dim F_1 + \dim F_2 \quad \text{et} \quad F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

Dans ce cas,

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$$

Comme, $F_1 + F_2 \subseteq E$, on obtient finalement que

$$\begin{cases} E = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

Donc, $E = F_1 \oplus F_2$. ■

TD4 d'Algèbre II: BASES ET DIMENSIONS

<http://www.sites.google.com/site/bendoukha27>

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants dire si la famille B est libre, engendre E , est une base de E . Quand ce n'est pas une base de E , trouver $\dim(\text{vect}(B))$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 2, 2), v_3 = (3, 7, 1)\}$;
2. $E = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1 = (1, 2, 1, 2), v_2 = (2, 1, 2, 1), v_3 = (1, 0, 1, 1), v_4 = (0, 1, 0, 0)\}$;
3. $E = \mathbb{R}^5$, $B = \{v_1 = (1, 2, 1, 2, 1), v_2 = (2, 1, 2, 1, 2), v_3 = (1, 0, 1, 1, 0), v_4 = (0, 1, 0, 0, 1)\}$;

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, montrer que F est un s.e.v. de E et en donner une base ainsi que la dimension.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x - y + z = 0\}$;
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$;
3. $E = \mathbb{R}^4$, $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0\}$;
4. $E = \mathbb{R}^4$, $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0, x + z + t = 0\}$;

Exercice 3 On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les sous espaces vectoriels F_1 et F_2 de l'exercice 2.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$;
2. Cette somme est-elle directe?

Exercice 4 On considère dans l'espace $\mathbb{R}^4$, les sous espaces vectoriels F_1 et F_2 de l'exercice 2.

1. Calculer $F_1 \cap F_2$;
2. En déduire en utilisant le théorème des dimensions que $\mathbb{R}^4 = F_1 + F_2$.

Exercice 5 On considère dans $\mathbb{R}^4$, le sous espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que $F = \text{vect}\{v_1 = (1, 1, 2, 1), v_2 = (1, 0, 1, 2), v_3 = (0, 1, 1, 1)\}$;
2. En déduire une base de F .

Exercice 6 Soient B et B' deux parties non vides d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que

$$B \subseteq \text{vect}(B') \Leftrightarrow \text{vect}(B) \subseteq \text{vect}(B')$$

2. En déduire que dans $\mathbb{R}^4$, les familles

$$B = \{v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0, 0), v_3 = (1, 1, 1, 0)\}$$

$$B' = \{v'_1 = (2, 1, 0, 0), v'_2 = (2, 2, 1, 0), v'_3 = (2, 1, 1, 0)\}$$

engendrent le même sous espace vectoriel

Exercice 7 (*Examen de rattrapage 2006*). On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 2, 1)$$

1. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \text{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$;
2. Montrer que $F = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$;
3. Trouver une base du sous-espace vectoriel $G = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$;
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?
5. Donner une base de $F \cap G$;
6. Compléter la base de G en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Pour tout naturel non nul n , on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments $P \in \mathbb{R}[X]$ et vérifiant la condition $d^o P \leq n$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$ et que sa dimension est $(n + 1)$.
2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P'' = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}_3[X]$ et trouver sa dimension.
3. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$. Montrer que G est un s.e.v de $\mathbb{R}_3[X]$ et trouver sa dimension.
4. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$.

CHAPITRE 5: CHANGEMENT DE BASES ET MATRICE DE PASSAGE

1 MATRICE DE PASSAGE

Problème 1 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ deux bases de E . Si v est un vecteur de E alors,

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B \quad \text{et} \quad v = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)_{B'} .$$

La question qui se pose est: Quelle est la relation entre les coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et les coordonnées $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$?

Comme B' est une base de E , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})_B \\ v'_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})_B \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ v'_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})_B \end{array} \right.$$

Posons

$$P_{(B', B)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Definition 2 La matrice $P_{(B', B)}$ est appelée matrice de passage de la base B vers la base B' . (Attention à l'ordre)!!!

Remarque 3 Les éléments de la colonne j sont les coordonnées du vecteur du vecteur v'_j dans la base B .

Exemple 4 Si $E = \mathbb{R}^2$, $B = B_c = \{e_1 = (1, 0) , e_2 = (0, 1)\}$, $B' = \{v_1 = (1, 1) , v_2 = (1, -1)\}$ alors,

$$P_{(B', B)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_{(B, B')} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exemple 5 Si $E = \mathbb{R}^3$, $B = B_c = \{e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)\}$, $B' = \{v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)\}$ alors,

$$P_{(B', B)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_{(B, B')} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition 6 Soient $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ deux bases du $\mathbb{K}$ -e.v E . Alors $P_{(B', B)}$ et $P_{(B, B')}$ sont toutes les deux inversibles. De plus,

$$(P_{(B', B)})^{-1} = P_{(B, B')} \quad (2)$$

2 FORMULE DE CHANGEMENT DE BASE

Proposition 7 Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ deux bases de E . Soit v est un vecteur de E . Si,

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B \quad \text{et} \quad v = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)_{B'}$$

alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P_{(B', B)} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Exemple 8 Soit $E = \mathbb{R}^2$, $B = B_c = \{e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)\}$, $B' = \{v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)\}$. On a dans ce cas,

$$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} v = x \bullet e_1 + y \bullet e_2 \\ v = \frac{x+y}{2} \bullet v_1 + \frac{x-y}{2} \bullet v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = (x, y)_{B_c} \\ v = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)_{B'} \end{cases}$$

D'autre part,

$$P_{(B', B)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_{(B, B')} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Un calcul direct montre que

$$P_{(B', B)} \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et

$$P_{(B, B')} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple 9 Soit $E = \mathbb{R}^3$, $B = B_c = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$,
 $B' = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$. On a dans ce cas,

$$v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = x \bullet e_1 + y \bullet e_2 + z \bullet e_3 \Rightarrow v = (x, y, z)_{B_c}$$

Posons

$$v = x' \bullet v_1 + y' \bullet v_2 + z' \bullet v_3 \Rightarrow v = (x', y', z')_{B'}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P_{(B, B')} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 On considère dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, les deux familles de vecteurs:

$$\begin{aligned} B &= \{v_1 = (-1, 1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1, 1), v_3 = (1, 1, -1, 1), v_4 = (1, 1, 1, -1)\}, \\ B' &= \{v_1 = (0, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0, 1), v_4 = (1, 1, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que B et B' sont deux bases de $\mathbb{R}^4$,
 2. Trouver les coordonnées d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^4$ dans la base B ,
 3. Trouver en utilisant la formule de changement de base, les coordonnées d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^4$ dans la base B' .
1. On a $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Or $\text{Card}(B) = \text{Card}(B') = 4$. Donc, pour Montrer que B et B' sont deux bases de $\mathbb{R}^4$, il suffit de montrer qu'elles sont libres. On a,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bullet v_1 + \alpha_2 \bullet v_2 + \alpha_3 \bullet v_3 + \alpha_4 \bullet v_4 &= 0_{\mathbb{R}^4} \\ \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

Donc B est libre. Par conséquent, c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Par un même raisonnement, on obtient que B' est aussi une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
v &= \alpha_1 \bullet v_1 + \alpha_2 \bullet v_2 + \alpha_3 \bullet v_3 + \alpha_4 \bullet v_4 \\
\Rightarrow &\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = z \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = t \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = x \\ \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{x+y}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = z \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{z+t}{2} \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{z+t}{2} \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = x - \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{2} \\ \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{x+y}{2} \\ -\alpha_3 + \alpha_4 = z - \frac{z+t}{2} = \frac{z-t}{2} \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} 2\alpha_1 = \frac{z+t}{2} - \frac{x-y}{2} = \frac{-x+y+z+t}{2} \\ 2\alpha_2 = \frac{z+t}{2} + \frac{x-y}{2} = \frac{x-y+z+t}{2} \\ 2\alpha_3 = \frac{x+y}{2} - \frac{z-t}{2} = \frac{x+y-z+t}{2} \\ 2\alpha_4 = \frac{x+y}{2} + \frac{z-t}{2} = \frac{x+y+z-t}{2} \end{cases} \\
\Rightarrow &v = \left(\frac{-x+y+z+t}{4}, \frac{x-y+z+t}{4}, \frac{x+y-z+t}{4}, \frac{x+y+z-t}{4} \right)_B
\end{aligned}$$

3. Posons $v = (x', y', z', t')_{B'}$. On a d'après la formule de changement de base:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = P_{(B, B')} \begin{pmatrix} \frac{-x+y+z+t}{4} \\ \frac{x-y+z+t}{4} \\ \frac{x+y-z+t}{4} \\ \frac{x+y+z-t}{4} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Il nous reste à trouver $P_{(B, B')}$. Il faut donc exprimer les éléments de B en fonction des éléments de B' . On a

$$\begin{cases} v_1 = \frac{5}{3}v'_1 - \frac{1}{3}v'_2 - \frac{1}{3}v'_3 - \frac{1}{3}v'_4 \\ v_2 = -\frac{1}{3}v'_1 + \frac{5}{3}v'_2 - \frac{1}{3}v'_3 - \frac{1}{3}v'_4 \\ v_3 = -\frac{1}{3}v'_1 - \frac{1}{3}v'_2 + \frac{5}{3}v'_3 - \frac{1}{3}v'_4 \\ v_4 = -\frac{1}{3}v'_1 - \frac{1}{3}v'_2 - \frac{1}{3}v'_3 + \frac{5}{3}v'_4 \end{cases}$$

D'où

$$P_{(B, B')} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} &= P_{(B, B')} \begin{pmatrix} \frac{-x+y+z+t}{4} \\ \frac{x-y+z+t}{4} \\ \frac{x+y-z+t}{4} \\ \frac{x+y+z-t}{4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-x+y+z+t}{4} \\ \frac{x-y+z+t}{4} \\ \frac{x+y-z+t}{4} \\ \frac{x+y+z-t}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2x+y+z+t}{3} \\ \frac{x-2y+z+t}{3} \\ \frac{x+y-2z+t}{3} \\ \frac{x+y+z-2t}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C'est à dire:

$$v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow v = \left(\frac{-2x+y+z+t}{3}, \frac{x-2y+z+t}{3}, \frac{x+y-2z+t}{3}, \frac{x+y+z-2t}{3} \right)_{B'}$$

CHAPITRE 6: APPLICATIONS LINEAIRES

1 DEFINITION ET EXEMPLES

Definition 1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite linéaire si:

1. $\forall (x, y) \in E^2 : f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x \in E : f(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet f(x)$.

Exemple 2 $Id_E : E \rightarrow E ; \quad Id_E(x) = x$. On l'appelle l'identité dans E .

Exemple 3 $\mathcal{O} : E \rightarrow F ; \quad \mathcal{O}(x) = 0_F$. On l'appelle l'application nulle.

Exemple 4 $H_\lambda : E \rightarrow E ; \quad H_\lambda(x) = \lambda \bullet x$. On l'appelle l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 5 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; \quad f(x, y) = (a \cdot x + b \cdot y, c \cdot x + d \cdot y)$.

Exemple 6 $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; \quad R_\theta(x, y) = (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta, x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta)$. On l'appelle la rotation vectorielle d'angle $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemple 7 $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; \quad f(x, y, z) = (x + y, y - z)$.

Theorem 8 (de caractérisation) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application. Alors

$$f \text{ est linéaire} \Leftrightarrow \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2 : f(\alpha \bullet x + \beta \bullet y) = \alpha \bullet f(x) + \beta \bullet f(y).$$

Remarque 9 Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors,

1. $f(0_E) = 0_F$;
2. $f(-x) = -f(x)$;
3. Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire;
4. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. On peut montrer que c'est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour l'addition des applications et la multiplication par un scalaire. Si $E = F$, cet espace est noté $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 10 Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire bijective alors, $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi une application linéaire.

Preuve. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in F^2$. Il existe donc $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha \bullet y_1 + \beta \bullet y_2) &= f^{-1}(\alpha \bullet f(x_1) + \beta \bullet f(x_2)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha \bullet x_1 + \beta \bullet x_2)) = \alpha \bullet x_1 + \beta \bullet x_2 \\ &= \alpha \bullet f^{-1}(y_1) + \beta \bullet f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Donc, f^{-1} est linéaire. ■

2 NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Definition 11 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. L'e noyau de f est l'ensemble:

$$\ker f = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

Proposition 12 Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors, $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E .

Preuve. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in (\ker f)^2$. Alors,

$$f(\alpha \bullet x + \beta \bullet y) = \alpha \bullet f(x) + \beta \bullet f(y) = \alpha \bullet 0_F + \beta \bullet 0_F = 0_F + 0_F = 0_F$$

Donc $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E . ■

Proposition 13 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$$

Preuve. Supposons que f est injective. On a alors,

$$x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$$

Donc, $\ker f \subseteq \{0_E\}$. Comme $\{0_E\}$ est inclus dans tout sous espace vectoriel, on a alors $\ker f = \{0_E\}$.

Inversement supposons que $\ker f = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x) - f(y) = 0_F \Rightarrow f(x - y) = 0_F \\ &\Rightarrow x - y \in \ker f = \{0_E\} \Rightarrow x - y = 0_F \Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

D'où l'injectivité de f . ■

Proposition 14 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{l'image de toute partie libre de } E \text{ est une partie libre de } F.$$

Preuve. Supposons que f est injective et soit $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une partie libre de E . Il faut montrer que $f(A) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ est une partie libre de F . On a,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bullet f(v_1) + \dots + \alpha_n \bullet f(v_n) = 0_F &\Rightarrow f(\alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n) = 0_F \\ &\Rightarrow \alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n \in \ker f = \{0_E\} \\ &\Rightarrow \alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n = 0_E \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Donc $f(A) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ est une partie libre de F .

Inversement, supposons que l'image de toute partie libre de E est une partie libre de F . Pour montrer que f est injective, il suffit de montrer que $\ker f = \{0_E\}$. Ceci revient à montrer que si v est un vecteur non nul de E alors, $f(v)$ est un vecteur non nul de F . On a

$$\begin{aligned} v \neq 0_E &\Rightarrow A = \{v\} \text{ est une partie libre de } E \\ &\Rightarrow f(A) = \{f(v)\} \text{ est une partie libre de } F \\ &\Rightarrow f(v) \neq 0_F. \end{aligned}$$

■

Exercice 15 L'application linéaire $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ est-elle injective?

Exercice 16 Meme question pour l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$.

3 IMAGE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

Definition 17 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. L'image de f est l'ensemble:

$$\text{Im } f = \{y = f(x) : x \in E\} = f(E).$$

En d'autres termes, $\text{Im } f$ est l'ensemble des images par f .

Proposition 18 Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors, $\text{Im } f$ est un sous espace vectoriel de F .

Preuve. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(y_1, y_2) \in (\text{Im } f)^2$. Il existe donc $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Par conséquent,

$$\alpha \bullet y_1 + \beta \bullet y_2 = \alpha \bullet f(x_1) + \beta \bullet f(x_2) = f(\alpha_1 \bullet x_1 + \alpha_2 \bullet x_2) \in \text{Im } f$$

Donc $\text{Im } f$ est un sous espace vectoriel de F . ■

Remarque 19 Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire alors, f est surjective si et seulement si, $\text{Im } f = F$.

Proposition 20 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors, pour toute A génératrice de E , la famille $f(A)$ est une partie génératrice de $\text{Im } f$.

Preuve. Soit $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ une partie génératrice de E . On a alors,

$$y \in \text{Im } f \Rightarrow y = f(x) \quad (x \in E)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} A = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ partie génératrice de } E &\Rightarrow x = \alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}) \\ &\Rightarrow y = f(x) = f(\alpha_1 \bullet v_1 + \dots + \alpha_n \bullet v_n) = \alpha_1 \bullet f(v_1) + \dots + \alpha_n \bullet f(v_n) \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $f(A)$ est une partie génératrice de $\text{Im } f$. ■

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

f surjective $\Leftrightarrow$ l'image de toute partie génératrice de E est une partie génératrice de F .

Exercice 21 Trouver une base de l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$. f est-elle surjective?

Corollary 22 $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \text{l'image de toute base de } E \text{ est une base de } F.$$

4 THEOREME DES DIMENSIONS ET COROLLAIRES

Theorem 23 (des dimensions) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)$$

Corollary 24 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

1. f injective $\Rightarrow \dim E \leq \dim F$.
2. f surjective $\Rightarrow \dim E \geq \dim F$.
3. f bijective $\Rightarrow \dim E = \dim F$.

Corollary 25 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose que $\dim E = \dim F$. Dans ce cas,

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

Exercise 26 On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; f(x, y, z) = (x - y, y - z, x + 2z)$$

Montrer que cette application est bijective.

CHAPITRE 7: MATRICE ASSOCIEE A UNE APPLICATION LINEAIRE

1 DEFINITION ET EXEMPLES

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et B une base fixée de E . Dans tout ce qui suit, on écrira alors (E, B) au lieu de E .

Definition 1 Soit $f : (E, B_1) \rightarrow (F, B_2)$ une application linéaire. On suppose que

$$B_1 = \{u_1, \dots, u_p\} \quad ; \quad B_2 = \{v_1, \dots, v_q\}.$$

On appelle matrice de f par rapport aux bases B et B' , la matrice

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{qp} \end{bmatrix} \quad (1)$$

où,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_1) = a_{11} \bullet v_1 + a_{21} \bullet v_2 + \dots + a_{q1} \bullet v_q \\ f(u_2) = a_{12} \bullet v_1 + a_{22} \bullet v_2 + \dots + a_{q2} \bullet v_q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(u_p) = a_{1p} \bullet v_1 + a_{2p} \bullet v_2 + \dots + a_{qp} \bullet v_q \end{array} \right. . \quad (2)$$

1. Les éléments de la colonne j sont les composantes du vecteur $f(u_j)$ dans la base B_2 .
2. Le nombre de lignes de $M(f, B_1, B_2)$ est égal à la dimension de F .
3. Le nombre de colonnes de $M(f, B_1, B_2)$ est égal à la dimension de E .
4. Si $E = F$ et $B_1 = B_2$, on écrit alors $M(f, B_1)$ au lieu de $M(f, B_1, B_1)$.

Example 2 soit $f : (\mathbb{R}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, B_2)$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x, x - y, y)$. Trouver $M(f, B_1, B_2)$ dans chacun des cas suivants:

- a. B_1 est la base canonique de E et B_2 est la base canonique de F .
- b. $B_1 = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (1, 1)\}$, $B_2 = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$.

$$\text{a. } \left\{ \begin{array}{l} f(u_1) = f(1, 0) = (1, 1, 0) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) \\ f(u_2) = f(1, 1) = (0, -1, 1) = -(0, 1, 0) + (0, 0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow M(f, B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b. } \begin{cases} f(u_1) = f(1, 0) = (1, 1, 0) = v_2 \\ f(u_2) = f(1, 1) = (1, 0, 1) = v_1 - v_2 + v_3 \end{cases} \Rightarrow M(f, B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposition 3 Soit $f : (E, B_1) \rightarrow (F, B_2)$ et $g : (F, B_2) \rightarrow (G, B_3)$ deux applications linéaires. Dans ce cas,

1. Si f est l'application nulle ($f(x) = 0_F \quad \forall x \in E$) alors, $M(f, B_1, B_2)$ est la matrice nulle de $M_{\dim F, \dim E}(\mathbb{K})$.
2. f est bijective $\Leftrightarrow M(f, B_1, B_2)$ inversible $\Leftrightarrow \det M(f, B_1, B_2) \neq 0$. Dans ce cas,

$$M(f, B_1, B_2)^{-1} = M(f^{-1}, B_2, B_1)$$

3. Si $E = F$ et $f = Id_E$ alors $M(f, B_1, B_2) = P_{(B_1, B_2)}$.
4. Si $E = F$, $B_1 = B_2$ et $f = Id_E$ alors $M(f, B_1, B_2) = I_p$ ($p = \dim E$).
5. Si $f : (E, B_1) \rightarrow (F, B_2)$ et $g : (E, B_1) \rightarrow (F, B_2)$ sont deux applications linéaires alors,

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K} : M(\alpha.f + \beta.g, B_1, B_2) = \alpha.M(f, B_1, B_2) + \beta.M(g, B_1, B_2)$$

6. Si $f : (E, B_1) \rightarrow (F, B_2)$ et $g : (F, B_2) \rightarrow (G, B_3)$ sont deux applications linéaires alors,

$$M(g \circ f, B_1, B_3) = M(g, B_2, B_3) \times M(f, B_1, B_2)$$

2 COMMENT RETROUVER UNE APPLICATION LINÉAIRE A PARTIR DE SA MATRICE DANS UNE BASE DONNÉE

Position du problème. Soit $f : (E, B_1) \rightarrow (F, B_2)$ une application linéaire. On suppose qu'on connaît la matrice $M(f, B_1, B_2)$. La question est de savoir comment calculer $f(u)$ pour tout $u \in E$. La réponse à cette question est donnée par la proposition suivante:

Proposition 4 Soit $f : (E, B_1) \rightarrow (F, B_2)$ une application linéaire. Pour tout $u \in E$, on pose

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)_{B_1} \quad , \quad f(u) = (\beta_1, \dots, \beta_q)_{B_2}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_q \end{pmatrix} = M(f, B_1, B_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \quad (3)$$

Exemple 5 soit $f : (\mathbb{R}^2, B_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, B_2)$ l'application linéaire dont la matrice est

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où,

$$B_1 = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (1, 1)\} \quad , \quad B_2 = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}.$$

Calculer $f(u)$ pour tout $u \in E$.

Solution 6 On a

$$u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow u = (x - y) \bullet u_1 + y \bullet u_2 \Rightarrow u = (x - y, y)_{B_1}$$

Posons $f(u) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{B_2}$. D'après la formule 3,

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = M(f, B_1, B_2) \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - 2y \\ y \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(u) &= y \bullet v_1 + (x - 2y) \bullet v_2 + y \bullet v_3 = (x - y, x - 2y, y) \\ &= (x, x - y, y) \end{aligned}$$

Exemple 7 soit $f : (\mathbb{R}^3, B) \rightarrow (\mathbb{R}^3, B)$ l'application linéaire dont la matrice est

$$M(f, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où, B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution 8 Posons

$$u = (x, y, z) = x \bullet (1, 0, 0) + y \bullet (0, 1, 0) + z \bullet (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad f(u) = (a, b, c) = a \bullet (1, 0, 0) + b \bullet (0, 1, 0) + c \bullet (0, 0, 1)$$

On a alors,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M(f, B) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 3x - y + z \\ x + y \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(u) &= (x - 2z) \bullet (1, 0, 0) + (3x - y + z) \bullet (0, 1, 0) + (x + y) \bullet (0, 0, 1) \\ &= (x - 2z, 3x - y + z, x + y) \end{aligned}$$

3 MATRICE D'APPLICATION LINEAIRE ET CHANGE-MENT DE BASE

Position du problème. Soit $f : (E, B_1) \rightarrow (E, B_1)$ une application linéaire. On suppose qu'on connaît la matrice $M(f, B_1)$. Soient maintenant B_2 une autre base de E . La question est de savoir comment obtenir $M(f, B_2)$ à partir de $M(f, B_1)$.

Proposition 9 Les matrices $M(f, B_1)$ et $M(f, B_2)$ sont liées par la relation

$$M(f, B_2) = P_{(B_2, B_1)}^{-1} M(f, B_1) P_{(B_2, B_1)}.$$

où $P_{(B_2, B_1)}$ est la matrice de passage de la base B_1 vers la base B_2 , $P_{(B_2, B_1)}^{-1} = P_{(B_1, B_2)}$ est la matrice de passage de la base B_2 vers la base B_1 .

Preuve. On a

$$\begin{array}{ccc} (E, B_1) & \xrightarrow{f} & (E, B_1) \\ Id_E \uparrow & & \downarrow Id_E \\ (E, B_2) & \xrightarrow{f} & (E, B_2) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
f &= Id_E \circ f \circ Id_E \Rightarrow M(f, B_2) = M(Id_E, B_1, B_2) \times M(f, B_1) \times M(Id_E, B_2, B_1) \\
&= P_{(B_1, B_2)} \times M(f, B_1) \times P_{(B_2, B_1)} \\
&= P_{(B_2, B_1)}^{-1} M(f, B_1) P_{(B_2, B_1)}.
\end{aligned}$$

■

Exercice 10 Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par:

$$f(x, y) = (x - 4y, x + 3y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Trouver la matrice $M(f, B_1)$ où B_1 est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver par méthode directe la matrice $M(f, B_2)$ où $B_2 = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)\}$.
3. Retrouver $M(f, B_2)$ en utilisant les matrices de passage.

Exercice 11 Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par:

$$f(x, y, z) = (x - y, x + 3y, x + y + z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Trouver la matrice $M(f, B_1)$ où B_1 est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver par méthode directe la matrice $M(f, B_2)$ où,

$$B_2 = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}.$$

3. Retrouver $M(f, B_2)$ en utilisant les matrices de passage.

TD5 d'Algèbre II:
APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES
ASSOCIEES

<http://www.sites.google.com/site/bendoukha27>

Exercice 1 *On considère l'application*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad f(x, y) = (x - y, x + y, 2x - 3y)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Trouver une base de $\ker f$ et une base de $\text{Im } f$.
3. Trouver la matrice $M(f, B_1, B_2)$, où B_1 est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et B_2 est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Trouver la matrice $M(f, B'_1, B'_2)$, où $B'_1 = \{u'_1 = (1, 0), u'_2 = (1, 1)\}$ et $B'_2 = \{v'_1 = (1, 0, 0), v'_2 = (1, 1, 0), v'_3 = (1, 1, 1)\}$.
5. Soit maintenant l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, vérifiant la condition:
$$M(g, B_2, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
6. Trouver l'expression $g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
7. Trouver $M(g \circ f, B_1, B_1)$. L'application linéaire $g \circ f$ est-elle bijective?
8. Trouver l'expression $g \circ f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 *On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire vérifiant: $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = e_1$.*

1. Trouver $M(f, B)$.
2. Trouver l'expression $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que f est bijective et trouver $M(f^{-1}, B)$.
4. Trouver l'expression $f^{-1}(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
5. En utilisant la matrice de passage, trouver $M(f^{-1}, B_1)$ où,
 $B_1 = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$.