

Chapitre I

Résolution des Equations non Lineaires.

Introduction:

non lineaire: Un système dont le comportement n'est pas linéaire, c-a-d par exemple: la sortie (y) n'est pas proportionnelle à l'entrée (x).

Exemple: $y = x^2 - 9x + 2$.
 $y = \log(x+1)$.
 $y = e^x - \cos(x+1)$ } Des équations non linéaire
La sortie y n'est pas proportionnelle à l'entrée (x).

Exemple 2: $y = x + 1$; $y = 2x \rightarrow$ Equations linéaire.

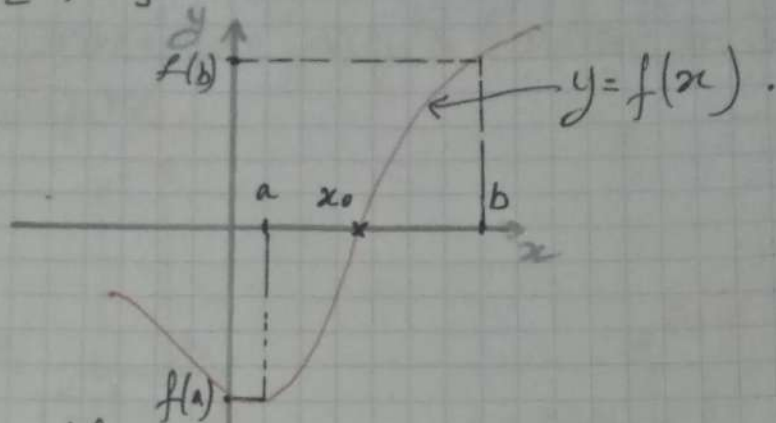
Remarque: Il est difficile de Trouver la racine des équations non linéaires; donc on utilise des méthodes pratiques et simple comme:

- chapitre I
- *. Méthode Bissection (Dichotomie).
 - *. Méthode Newton raphson.
 - *. Méthode de la secante.
 - *. Méthode point fixe

Ces méthodes sont basés sur le Théorème de la valeur intermédiaire (نظرية القيمة المتوسطة).

chapitre I. 1 - Méthode de la Dichotomie.

On considère un intervalle $[a, b]$ et une fonction $f(x)$ continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.



Si $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ il existe donc au moins une racine (x_0) de $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$.

* Théorème de Dichotomie

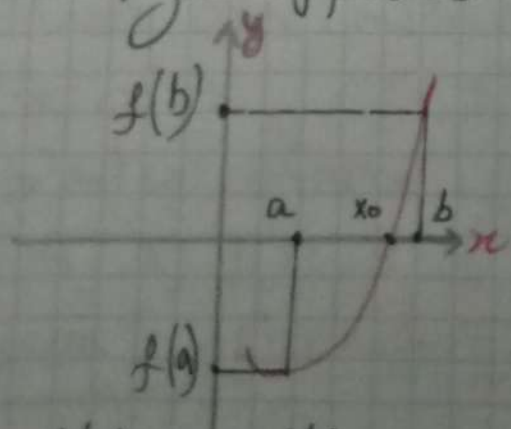
soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x)$ continue dans $[a, b]$
 $f(a) \cdot f(b) < 0$

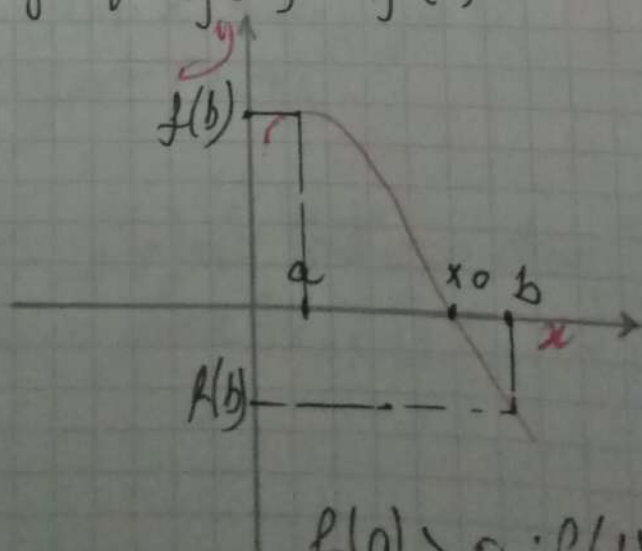
$\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] \text{ tel que } f(x_0) = 0$

Remarque:

La condition $f(a) \cdot f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés.



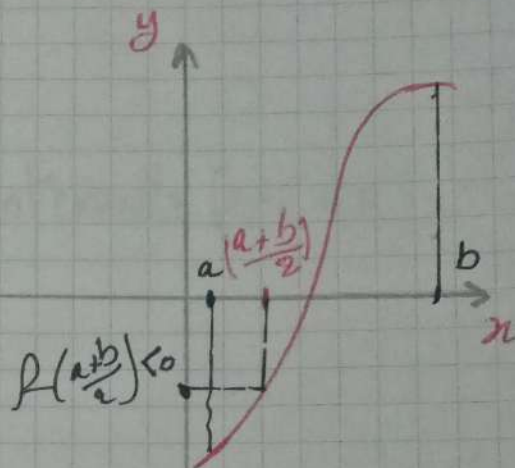
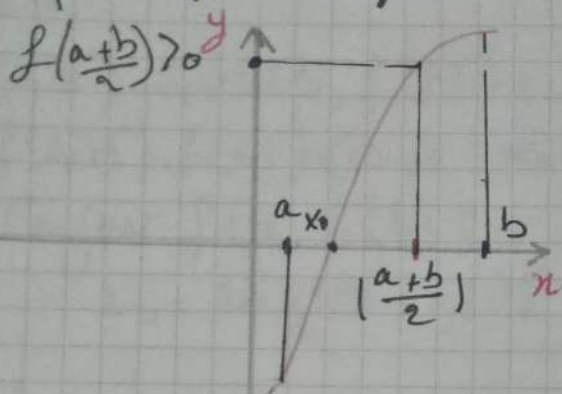
$$f(a) < 0; f(b) > 0 \\ f(a) \cdot f(b) < 0$$



$$f(a) > 0; f(b) < 0 \\ f(a) \cdot f(b) < 0$$

* Principe de la méthode:

1. Trouver un encadrement de la racine x_0 .
2. Diviser l'intervalle $[a, b]$ en deux sous-intervalles égaux et déterminer dans quel sous-intervalle se trouve la racine x_0 .
3. Répéter la procédure jusqu'à l'obtention de la précision désirée.



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$: Continue, avec $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$, $\exists x_0 \in [a, \frac{a+b}{2}]$ $\wedge$ $f(x_0) = 0$.

Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) > 0$, cela implique que:

$f(b) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$, $\exists x_0 \in [\frac{a+b}{2}, b]$ $\wedge$ $f(x_0) = 0$.

Exemple: On veut utiliser la méthode de Bissection pour déterminer la racine de $(f(x) = x^2 - 3 = 0)$ qui se trouve dans l'intervalle de départ $[1, 2]$.

$f(x) = x^2 - 3$ $[1, 2]$.

- $f(x)$ est un polynôme: $[1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x)$ est continue dans $[1, 2]$.
- $f(1) = -2$; $f(2) = 1 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$; donc $\exists x_0 \in [1, 2]$, $\wedge$ $f(x_0) = 0$ selon la procédure.

Iteration: $n=1$.

$$f(1) = -2; f(2) = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

Iteration: $n=2$.

$$f(1,5) = -0,75; f(2) = 1 \Rightarrow f(1,5) \cdot f(2) < 0.$$

Une nouvelle intervalle ou sous intervalle: $[1,5, 2]$.

$$x_2 = \frac{1,5+2}{2} = 1,75$$

$n=3$.

$$f(1,75) = 0,0625; f(1,5) = -0,75$$

$f(1,75) \cdot f(1,5) < 0 \Rightarrow$ nouvelle sous intervalle $[1,75, 1,5]$.

• Toujours $f(a) \cdot f(b) < 0$.

$$x_3 = \frac{1,5+1,75}{2} = 1,625$$

$n=4$.

$$f(1,625) = -0,359; f(1,75) = 0,0625$$

$f(1,625) \cdot f(1,75) < 0 \Rightarrow$ Nouvelle sous intervalle $[1,625, 1,75]$.

$$x_4 = \frac{1,625+1,75}{2} = 1,6875$$

n	$a^{(n)}$	$b^{(n)}$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	Erreur absolue $ E_n = \frac{b-a}{2}$	Erreur relative $Er = \frac{E_n}{x_n} (\%)$
1	1	2	1,5	0,5	33%
2	1,5	2	1,75	0,25	14%
3	1,5	1,75	1,625	0,125	7,69%
4	1,625	1,75	1,6875	0,0625	3,7%
5	1,6875	1,75	1,71875	0,03125	1,8%
6	1,71875	1,75	1,734375	0,015625	0,9%

Par exemple pour $n=6$, on a trouvé la racine: $x_0 = 1,734375$

Pour $x^2 - 3 = 0$ ($x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$: $\sqrt{3}$ pour $x_0 \in [1,2]$.)

*

Étant donné une précision ε , on peut déterminer le nombre d'itération "n" à partir de l'encadrement initial $[a, b]$.

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow \log \left[\frac{b-a}{2^n} \right] \leq \log \varepsilon.$$

$$\log(b-a) - \log 2^n \leq \log \varepsilon \text{ donc: } \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2} \leq n.$$

Exemple: Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 - 10 = 0$ dans $[1, 2]$.
avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$.

nombre d'itération $n = ?$

$$\frac{\log(2-1) - \log(10^{-10})}{\log 2} \leq n \Rightarrow n \simeq \frac{10 \log 10}{\log 2} \Rightarrow n = 33$$

$n = 33$ (nbre entier) c-a-d: on doit faire 33 itération pour trouver la racine de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 10$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$ dans l'intervalle: $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$.