Algèbre Multilinéaire

Michel Goze, Elisabeth Remm

November 7, 2013

s

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels sur un corps

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, sans précision sur sa caractéristique.

1.1.1 Définitions

Définition 1 *On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, un ensemble E muni*

1. *d'une structure de groupe commutatif pour une loi notée $+$*
2. *d'une opération externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E \to E$ vérifiant :*
   - *(a)* $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
   - *(b)* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
   - *(c)* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
   - *(d)* $1x = x$

   pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in E$.

On notera 0_E ou s'il n'y a aucune confusion possible 0, l'élément neutre (ou le vecteur nul) de E pour l'addition. On écrira également $x - y$ à la place de $x + (-y)$ si $-y$ est le symétrique de y pour la loi $+$. Un espace vectoriel sur le corps des nombres réels sera appelé espace vectoriel réel, sur celui des nombres complexes, espace vectoriel complexe.

EXERCICE 1 Montrer que tout corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui même. Montrer également que pour tout entier n, $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et k un sous-corps de $\mathbb{K}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur k. Un espace vectoriel peut-il être de cardinalité finie ? Si oui donner un exemple. Un espace vectoriel peut-il être vide ?

Un **sous-espace vectoriel** de E est un sous-groupe stable pour la multiplication externe. Les sous-espaces vectoriels sont caractérisés par la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si*
1. $0 \in F$
2. $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F,\ \alpha x \in F.$

En particulier un sous-espace vectoriel n'est jamais vide. Il contient toujours le vecteur nul de E. Un sous-espace vectoriel de E est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations induites de celles de E.

Soient $e_1, \cdots, e_n$ des éléments (nommés aussi vecteurs) de l'espace vectoriel E. On appelle **combinaison linéaire** de ces vecteurs, un vecteur de E de la forme

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Définition 2 *Soient $e_1, ..., e_n$ n vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel de E engendré par ces vecteurs est*

$$\mathbb{K}\{e_1, \cdots, e_n\} = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \cdots, n\}.$$

On vérifie sans peine que $\mathbb{K}\{e_1, .., e_n\}$ est bien un sous-espace vectoriel de E. Cette définition s'étend à une famille infinie de vecteurs de E. Si $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille quelconque de vecteurs de E, le sous-espace engendré par cette famille est le sous-espace vectoriel engendré par toutes les combinaisons linéaires **finies**

$$\sum_{j \in J \subset I} \alpha_j e_j,\ \alpha_j \in \mathbb{K}$$

où J est un sous ensemble **fini** d'indices de I, de vecteurs de la famille $\{e_i\}_{i\in I}$.

EXERCICE 2 Soit $V(n, 2)$ l'espace vectoriel ${\mathbb{F}_2}^n$ sur le corps fini à deux éléments $\mathbb{F}_2$. Un sous-espace vectoriel de $V(n, 2)$ est appelé un code linéaire binaire. Soit $v \in V(n, 2)$. On appelle poids de v le nombre de composantes non nulles de v. Quels sont les poids des vecteurs $v = (1, 1, ..., 1)$ et $w = (0, 0, ..., 0)$? Soit E le sous ensemble de $V(n, 2)$ formé des vecteurs de poids pair. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $V(n, 2)$.

EXERCICE 3 Montrer que tout espace vectoriel sur un corps infini n'est jamais la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

1.1.2 Bases d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Dans le paragraphe précédent nous avons rappelé la notion de sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Un cas particulier intéressant est celui où cette famille engendre l'espace en entier. Une telle famille est dit génératice. En résumé, une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite **famille génératrice** si pour tout vecteur $x \in E$, il existe une famille finie $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ de scalaires, J étant un sous ensemble fini de I, telle que

$$x = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j.$$

Définition 3 *On appelle base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute famille génératice libre, c'est-à-dire pour laquelle il n'existe aucune relation linéaire*

$$\alpha_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_p} e_{i_p} = 0$$

entre ces vecteurs, autre que la relation triviale $0e_{i_1} + \cdots + 0e_{i_p} = 0$.

Les vecteurs d'une famille libre sont dits linéairement indépendants. Pratiquement on montre qu'une famille quelconque $\{e_i\}_{i\in I}$ de vecteurs de E est libre si pour toute sous famille **finie** $\{e_{i_1}, ..., e_{i_p}\}$ la relation linéaire

$$\alpha_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_p} e_{i_p} = 0$$

implique

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \cdots = \alpha_{i_p} = 0.$$

Théorème 1 *Tout espace vectoriel non réduit à {0} sur un corps $\mathbb{K}$ (commutatif ou non) admet une base.*

Démonstration. Cette démonstration classique est assez délicate car elle s'appuie sur un axiome de la théorie des ensembles, l'axiome du choix ou une version équivalente appelée lemme de Zorn. Avant de rappeler ou de dévoiler cet énoncé, nous avons besoin d'une notion à propos de laquelle le lemme de Zorn décrit quelques propriétés. Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel. Une chaine de P est un sous ensemble totalement ordonné de P. Une borne supérieure d'un sous ensemble S de P est un élément $a \in P$ qui est un majorant c'est-à-dire $s \leq a$ pour tout $s \in S$ et qui vérifie la condition de minimalité : si $b \in P$ est aussi un majorant de S, alors $b \geq a$.

Lemme de Zorn : *Soit P un ensemble partiellement ordonné dans lequel toute chaine admet une borne supérieure. Alors P admet un élement maximal c'est-à dire un élément $m \in P$ tel que si $p \in P$ vérifie $m \leq p$, alors $m = p$.*

Ceci étant, soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $x \in E$ tel que x n'appartienne pas au sous-espace engendré par la famille $\{e_i\}_{i\in I}$. Alors la famille $\{e_i, x\}_{i\in I}$ est encore libre. En effet, soit

$$\alpha x + \alpha_{i_1} e_{i_1} + ... + \alpha_{i_p} e_{i_p} = 0$$

avec $i_j \in I$, $j = 1, ..., p$, une relation linéaire entre ces vecteurs. Si $\alpha \neq 0$, alors x s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs e_{i_j} ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\alpha = 0$. Comme la famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est libre on a aussi $\alpha_{i_j} = 0$ pour $j = 1, ..., p$ et la famille $\{e_i, x\}_{i\in I}$ est libre. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{L}$ des familles libres de vecteurs de E forme un ensemble **inductif** c'est-à-dire vérifie les conditions pour appliquer le lemme de Zorn. Cet ensemble est partiellement ordonné par l'inclusion. D'après la remarque ci-dessus, si $L_1 \subset L_2 \subset ...$ est une chaine dans $\mathcal{L}$, alors elle admet toujours une borne supérieure $\bigcup L_i$ qui est bien dans $\mathcal{L}$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{L}$ contient un élément maximal $\mathcal{B}$. Cet élément est une base de E. En effet, comme il appartient à $\mathcal{L}$, c'est une famille libre dans E. Cette famille engendre E, sinon il existerait un vecteur x non nul n'appartenant pas à l'espace engendré par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \cup \{x\}$ serait une famille libre ce qui contredirait la maximalité de $\mathcal{B}$. ♣

1.1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ est dit **de dimension finie** s'il existe une base ne contenant qu'un nombre fini d'éléments ou si cet espace est réduit à $\{0\}$. Sinon l'espace vectoriel sera dit **de dimension infinie**.

Théorème 2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Alors toutes les bases de E sont de cardinalité finie et ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de E*

Démonstration. Elle repose en partie sur une remarque faite plus haut : si $\{e_i\}$ est une famille libre de E est si $v \in E$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs e_i alors la famille $\{e_i, v\}$ est aussi libre. Une autre reformulation est donnée dans l'exercice suivant :

EXERCICE 4 Supposons que les vecteurs $e_1, ..., e_n$ soient linéairement indépendants dans E et que les vecteurs $v_1, ..., v_p$ engendrent E. Montrer que $n \leq p$.

Continuons notre démonstration. On déduit de ce résultat que si E est de dimension finie il admet un système fini de générateurs. Toute base qui est une famille libre est de cardinalité inférieure ou égale à ce nombre de générateurs. Ainsi toute base est de cardinalité finie. Soient $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ et $\{v_i\}_{i=1,...,p}$ deux bases de E. Toujours en appliquant ce résultat, on déduit $n \leq p$ et $p \leq n$. D'où $n = p$. ♣

EXERCICE 5 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim(F) \leq dim(E)$ (on note $\dim(E)$ la dimension de E). Montrer que $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1 \bigcap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \bigcap F_2)$$

où $F_1 + F_2$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de la forme $v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$.

1.1.4 Sommes directes et produits directs d'espaces vectoriels

Remarquons tout d'abord que si E et F sont deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$, alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 = \{(x,y),\ x \in E_1, y \in E_2\}$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, les lois étant définies par

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'),\ \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Dans le cas où ces deux espaces sont de dimension finie, nous avons de plus

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Cette définition se généralise au cas d'une famille quelconque d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Définition 4 *Soit $\{E_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle produit direct des espaces $\{E_i\}_{i\in I}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel*

$$\prod_{i\in I} E_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} E_i\ ,\ f(i) \in E_i \right\}.$$

La structure d'espace vectoriel de $\prod\limits_{i\in I} E_i$ est donnée par les opérations suivantes :

$$\begin{array}{l} f+g : i \to f(i) + g(i) \\ \alpha f : i \to \alpha f(i) \end{array}$$

On peut donc identifier le produit des espaces vectoriels E_i à l'ensemble des suites $(v_i)_{i\in I}$ telles que $v_i \in E_i$ pour tout $i \in I$.

Soit $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$. Son support est l'ensemble

$$\operatorname{supp}(f) = \{i \in I \text{ tel que } f(i) \neq 0\}.$$

Définition 5 *Soit $\{E_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle somme directe externe des espaces $\{E_i\}_{i\in I}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel*

$$\sum_{i\in I} E_i = \left\{ f \in \prod_{i\in I} E_i,\quad \operatorname{supp}(f) \text{ fini} \right\}.$$

Ainsi la somme directe externe $\sum_{i\in I} E_i$ correspond à l'ensemble des suites $(v_i)_{i\in I}$ telles que $v_i \in E_i$ et les v_i sont nuls à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

EXERCICE 6. Montrer que si l'ensemble I est fini, les notions de produit direct et de somme directe externe coincident.

La somme directe est une opération sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel donné.

Définition 6 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $F_i,\ i=1,...,p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont supplémentaires si*

1. $F_1+F_2+...+F_p=E$
2. $F_i\bigcap(F_1+..+F_{i-1}+F_{i+1}+...+F_p)=\{0\},\ i=1,...,p.$

Si les sous-espaces $F_i,\ i=1,...,p$ sont supplémentaires on notera

$$F_1\oplus F_2\oplus ...\oplus F_p$$

le sous-espace $F_1+...+F_p$. On dit alors que les espaces $F_i,\ i=1,...,p$ sont en somme directe.

Rappelons que le sous-espace vectoriel $F_1+..+F_p$ est le sous-espace de E engendré par les vecteurs de la forme $v_1+v_2+...+v_p$ avec $v_i\in F_i$.

EXERCICE 7. Montrer que si les sous-espaces F_i sont supplémentaires et de dimension finie, alors

$$\dim(F_1\oplus F_2\oplus ...\oplus F_p)=\dim(F_1)+\dim(F_2)+...+\dim(F_p).$$

Soit $E=\mathbb{R}^2$. Trouver p sous-espaces vectoriels vérifiant

1. $F_1+F_2+...+F_p=\mathbb{R}^2$
2. $F_i\bigcap F_j=\{0\}\ i\neq j$

et qui ne soient pas supplémentaires.

EXERCICE 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que tout sous-espace vectoriel F admet un supplémentaire, c'est-à-dire il existe un sous-espace F' tel que $E=F\oplus F'$. Ce sous-espace est-il unique ?

1.2 Applications linéaires

1.2.1 Définitions

Définition 7 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f:E\rightarrow F$ est dite linéaire si*

1. $f(x+y)=f(x)+f(y)$
2. $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

pour tout $x,y\in E$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

Un peu de vocabulaire. Un **endomorphisme** est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui même. Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective. Une application linéaire quelconque est parfois appelée **homomorphisme**. L'ensemble des applicatons linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$, l'ensemble des isomorphismes $Iso(E,F)$ et des endomorphismes de E, $End(E)$.

EXERCICE 9. Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que E et F sont de dimension finie n et m. Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et calculer sa dimension. Trouver toutes les applications linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

Définition 8 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle noyau de f le sous-espace vectoriel de E*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \text{ tels que } f(x) = 0\}.$$

On appelle image de f le sous-espace vectoriel de F

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \left\{y \in E \text{ tels qu'il existe } x \in E \ \text{ vérifiant } f(x) = y\right\}.$$

Le fait que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ soient des sous-espaces vectoriels respectivement de F et E est immédiat.

Théorème 3 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors*

1. *f est injective si et seulement si* Ker*(f)={0}*
2. *f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*

Démonstration. La deuxième condition n'est rien d'autre que la définiton de la surjectivité. Supposons f injective. Alors comme f est linéaire $f(0) = 0$. Si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x) = 0 = f(0)$. Mais dire que f est injective signifie que $f(x) = f(y)$ implique $x = y$. Ainsi $f(x) = f(0)$ implique $x = 0$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Réciproquement supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Soient x et $y \in E$ vérifiant $f(x) = f(y)$. La linéarité de f implique $f(x-y) = 0$. Ainsi $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$. Par hypothèse $x - y = 0$ et donc $x = y$ et f est injective. □

1.2.2 Le dual d'un espace vectoriel

Définition 9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle dual de E et on le note E^* le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.*

Ainsi

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{K}, \ f \text{ linéaire}\}.$$

Une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire**. Les éléments de E^* sont donc les formes linéaires. L'espace vectoriel dual E^* de E sera étudié en détail au chapitre suivant.

1.2.3 Un théorème de factorisation

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Considérons sur E la relation d'équivalence

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow x - y \in F.$$

On note

$$E/F$$

l'ensemble quotient. Soit $cl(x)$ la classe d'équivalence du vecteur x. Par définition

$$cl(x) = \{y \ , y = x + v, \ v \in F\}.$$

On montre facilement que si $x' \in cl(x)$ et $y' \in cl(y)$, alors $cl(x+y) = cl(x'+y')$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $cl(\alpha x) = cl(\alpha x')$. Ceci permet de définir les opérations suivantes dans E/F :

$$cl(x) + cl(y) = cl(x + y)$$

$$\alpha cl(x) = cl(\alpha x).$$

Ces deux opérations munissent E/F d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'application

$$\pi : E \to E/F$$

définie par $\pi(x) = cl(x)$ est linéaire et surjective. Elle est appelée la projection canonique.

Théorème 4 *Soit $f : E \to E'$ une application linéaire surjective. Il existe un unique isomorphisme*

$$h : E/\mathrm{Ker}(f) \to E'$$

telle que

$$h \circ \pi = f.$$

Démonstration. Cette application h est donnée par $h(cl(x)) = f(x)$. Elle est bien définie. En effet si $x' \in cl(x)$ alors il existe $v \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que $x' = x+v$. Ainsi $f(x') = f(x)+f(v) = f(x)$ car $v \in \mathrm{Ker}(f)$ et $h(cl(x))$ est bien définie. Comme f est surjective, l'application quotient h aussi. Enfin $\mathrm{Ker}(h) = \{cl(x) \ , \ h(cl(x)) = f(x) = 0\}$. D'où $\mathrm{Ker}(h) = \{cl(x) \ , \ x \in \mathrm{Ker}(f)\} = \{cl(0)\}$. L'application h est injective. C'est donc un isomorphisme de $E/\mathrm{Ker}(f)$ sur E'. $\square$

1.3 Applications linéaires. Cas de la dimension finie

1.3.1 Classification des espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5 *Soit $f \in Iso(E, F)$ un isomorphisme entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension finie. Alors l'image d'une base $\{e_1, .., e_n\}$ de E est une base de F. En particulier les deux espaces vectoriels ont la même dimension*

Démonstration. Soit $\{e_1, .., e_n\}$ une base de E. Posons $f_i = f(e_i)$ et considérons une relation linéaire

$$\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n = 0.$$

Alors $\alpha_1 f(e_1) + ... + \alpha_n f(e_n) = 0 = f(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)$ et comme f est injective, ceci implique

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0.$$

L'indépendance des vecteurs e_i impliquent $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ et les vecteurs f_i sont indépendants. Montrons qu'ils sont générateurs. Comme f est surjective tout vecteur y de F s'écrit $y = f(x)$. Comme $x \in E$, il se décompose dans la base $\{e_1, .., e_n\}$: $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. D'où $y = f(x) = f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n)$. Ceci montre que les vecteurs $f(e_i)$ sont aussi générateurs. Ainsi $\{f(e_1), .., f(e_n)\}$ est une base de F. En particulier on a $\dim(F) = n = \dim(E)$. $\square$

EXERCICE 10. Montrer que tout espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Le résultat de l'exercice précédent peut s'interpréter en disant que la classification à isomorphisme près des espaces vectoriels de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ se réduit à un seul élément $\mathbb{K}^n$.

1.3.2 Le théorème Noyau-Image

Théorème 6 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un homomorphisme entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension finie. Alors*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

EXERCICE 11. Démontrer le théorème noyau-image. Montrer que toute application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie) est un isomorphisme. Montrer que si E est de dimension finie et si $f : E \to F$ est linéaire et surjective alors F est de dimension finie et que f est un isomorphisme.

D'après le théorème Noyau-Image

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

On appelle **rang de** f et on note $r(f)$ cette dimension :

$$r(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

1.3.3 Matrices d'une application linéaire

Considérons deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, respectivement n et m. Soient $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_m\}$ une base de F. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors l'image de tout vecteur x de E est connue dès que l'on connait les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. En effet x se décompose de manière unique dans $\mathcal{B}$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Ainsi

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i).$$

Chacun des vecteurs $f(v_i)$ se décompose dans la base $\mathcal{B}'$:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j w_j$$

et donc

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_i^j w_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_i^j w_j.$$

Les coefficients a_i^j sont entièrement définis par f et les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Définition 10 *Soit $f : E \to F$ est une application linéaire et soient $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{w_1, ..., w_m\}$ une base de F. On appelle matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice*

$$M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_{n-1}^{m-1} & a_n^{m-1} \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_{n-1}^m & a_n^m \end{pmatrix}$$

où les coefficients a_i^j sont définis par $f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j w_j$.

On écrira parfois pour simplifier $M = (a_i^j)$, l'indice du bas désignant l'indice de la colonne et l'indice du haut l'indice de la ligne. Ainsi chacune des colonnes de M est le transformé d'un vecteur de la base de E. Cette matrice dépend donc bien du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Elle permet de retrouver l'expression analytique de $f(x)$. Posons

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j.$$

Alors

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i^j.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des composantes du vecteur x relatives à $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ celle de $f(x)$ relatives à $\mathcal{B}'$. L'expression ci-dessus se traduit matriciellement par

$$Y = M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X.$$

1.3.4 Effet d'un changement de bases

Gardons les hypothèses du paragraphe précédent mais supposons que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{v'_1, ..., v'_n\}$ soient deux bases de E et $\mathcal{B}'_1 = \{w_1, ..., w_m\}$ et $\mathcal{B}'_2 = \{w'_1, ..., w'_m\}$ deux bases de F. Les matrices $M_1(f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}$ et $M_2(f)_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}$ représentent la même application linéaire f mais écrites dans des bases différentes.

Définition 11 *Soient $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{v'_1, ..., v'_n\}$ deux bases de E. On appelle matrice de changement de base de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ la matrice de l'application identité $Id : E \to E$ relative aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$. La colonne i correspond donc aux composantes du nouveau vecteur de base w_i relatives à la première base $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$.*

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. C'est une matrice carrée inversible d'ordre n. Notons Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'_1$ à la base $\mathcal{B}'_2$ de F. C'est une matrice carrée inversible d'ordre m.

Théorème 7 *Les matrices $M_1(f)_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}$ et $M_2(f)_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}$ de l'homomorphisme f sont reliées par*

$$M_2 = Q^{-1}M_1P$$

où Q^{-1} désigne l'inverse de la matrice Q.

EXERCICE 12. Démontrer cette relation matricielle.

1.3.5 Cas des endomorphismes

Nous supposons ici que $E = F$ et nous nous donnons une base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de E. Si $f : E \to E$ est un endomorphisme de E, la matrice de f relative à cette base est $M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$. Nous la noterons simplement $M(f)_{\mathcal{B}}$. Si $\mathcal{B}_2 = \{v'_1, ..., v'_n\}$ est une autre base de E, le théorème précédent s'énonce alors dans ce cas :

Théorème 8 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Les matrices $M_1(f)_{\mathcal{B}_1}$ et $M_2(f)_{\mathcal{B}_2}$ de f relatives è ces deux bases sont reliées par*

$$M_2 = P^{-1}M_1P$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

Nous dirons que les matrices M_1 et M_2 sont semblables. Plus précisément, la relation

$$M_1 \mathcal{R} M_2 \Leftrightarrow \exists P \quad \text{inversible telle que } M_2 = P^{-1} M_1 P$$

est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n. Chaque classe d'équivalence représente un endomorphisme. Le problème de réduction des matrices consiste à trouver un représentant d'une classe qui soit diagonal ou triangulaire ou une matrice de Jordan du moins dans le cas complexe.

EXERCICE 13. Soient M_1 et M_2 deux matrices semblables d'ordre n. Montrer que $tr(M_1) = tr(M_2)$ où $tr(M)$ désigne la trace de la matrice M ($tr(M) = \sum_i a_i^i$), et que $\det(M_1) = \det(M_2)$ où $\det(M)$ désigne le déterminant de M. Posons $M_2 = P^{-1} M_1 P$. Montrer que $M_2^k = P^{-1} M_1^k P$. Montrer enfin que M_1 et M_2 ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal. Rappelons que le polynôme caractéristique de M est le polynôme $P_M(X) = \det(M - XId)$ où Id désigne la matrice identité ($a_i^i = 1, a_i^j = 0$ si $i \neq j$). Quant au polynôme minimal, c'est le polynôme unitaire de plus bas degré $Q(X)$ annulant M, c'est-à-dire vérifiant $Q(M) = 0$.

1.3.6 Diagonalisation d'une matrice carrée

Rappelons qu'une matrice carrée $M = (a_i^j)$ est dite diagonale si elle vérifie $a_i^j = 0$ dès que $i \neq j$. Une matrice carrée M est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Définition 12 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $v \neq 0$ dans E tel que*

$$f(v) = \lambda v.$$

Si λ est une valeur propre de f, tout vecteur $v \in E$ tel que $f(v) = \lambda v$ est dit vecteur propre associé à λ.

Si λ est une valeur propre de f, il existe nécessairement un vecteur propre non nul. Désignons par E_λ l'ensemble des vecteurs propres de f associés à λ. Comme il contient au moins un vecteur non nul, il est de dimension supérieure ou égale à 1. Il est clair que

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$$

et donc $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ est non réduit à 0. Ceci implique que l'application linéaire $f - \lambda Id$ est non injective. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ une base de E et M la matrice de f relative à cette base. La matrice de $f - \lambda Id$ est alors $M - \lambda I$. Cette matrice n'est pas inversible. Ainsi $\det(M - \lambda I) = 0$. En développant ce déterminant on récupère un polynôme en λ appelé **polynôme caractéristique de** f ou de M.

Proposition 2 *Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique*

$$C_f(X) = \det(M - XI)$$

Cette proposition est très pratique pour le calcul des valeurs propres.

EXERCICE 14. Soit λ une valeur propre de f. On dit que λ est de multiplicité r si elle est une racine de multiplicité r du polynôme caractéristique. Montrer que si la valeur propre λ est de multiplicité r alors $\dim(E_\lambda) \leq r$.

Théorème 9 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E et M une matrice de f. Alors M est diagonalisable (on dit aussi que f est diagonalisable) si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres de f.*

Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ nous avons le critère suivant de diagonalisation :

Théorème 10 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors f est diagonalisable si et seulement si*

1. *Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont les valeurs propres de f de multiplicité $r_1, r_2, ..., r_p$ alors $r_1+r_2+...+r_p = n$, autement dit f admet n valeurs propres distinctes ou confondues.*
2. *Pour $i = 1, .., p$, alors $\dim(E_{\lambda_i}) = r_i$.*

EXERCICE 15. Montrer que le polynôme minimal de f admet pour racines les valeurs propres de f et que toute valeur propre est racine (ici on suppose aussi que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que f est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal n'a que des racines simples. (on utilisera le fait que le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur de f, c'est-à-dire tout polynôme $P(X)$ tel que $P(f) = 0$, et que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur. Ce dernier résultat fondamental dans la théorie de réduction des endomorphismes est le théorème de Cayley Hamilton).

Chapitre 2

L'espace vectoriel dual d'un espace vectoriel

2.1 Convention d'Einstein

2.1.1 Un peu d'ordre sur la position des indices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Nous écrirons dorénavant les vecteurs de base sous la forme $e_1, e_2, \cdots, e_n$, les indices étant placés en bas (en indice !). Si v est un vecteur de E, sa décomposition dans la base $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ s'écrira

$$v = x^1e_1 + x^2e_2 + \cdots + x^ne_n = \sum_{i=1}^{n} x^ie_i.$$

On remarque que dans cette notation les composantes de v s'écrivent $(x^1, \cdots, x^n)$ les indices étant en haut (en exposant).
Si $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ est une autre base de E, la matrice de changement de base sera définie à partir de

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j e_j.$$

La matrice de changement de base s'écrit alors

$$P = (\alpha_i^j)$$

l'indice du bas étant l'indice des colonnes et l'indice du haut celui des lignes.

2.1.2 Convention d'Einstein

Remarquons que la plupart des formules écrites ci-dessus, telles que les combinaisons linéaires, les formules de changement de base, l'écriture d'un vecteur dans une base, fait intervenir des sommes par rapport à un indice répété deux fois. Pour alléger les notations, Einstein proposa de supprimer dans ces conditions le signe $\sum$ et de faire la convention suivante :

Convention d'Einstein. *Toutes les fois que dans un monôme figure deux fois le même indice, une fois en indice supérieur, une fois en indice inférieur, on doit, sauf avis contraire, sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice, toutes les valeurs possibles.*

Par exemple, l'écrite du vecteur v dans la base $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ s'écrit :

$$v = x^i e_i$$

et les formules de changement de base :

$$e'_i = \alpha_i^j e_j.$$

Toutefois, dans ce chapitre et les deux prochains, afin de ne pas trop perturber nos habitudes, nous conserverons le signe $\sum$ dans nos formules, mais nous respecterons la convention sur les indices et exposants. Nous utiliserons la convention d'Einstein lors de l'étude des applications multilinéaires ou le multi désigne au moins trois arguments.

2.2 Le dual d'un espace vectoriel

2.2.1 Formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension finie ou pas). On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire

$$f : E \to \mathbb{K}$$

à valeurs dans le corps de base $\mathbb{K}$. Par exemple, toute forme linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ s'écrit de la manière suivante : si $v = (x^1, \cdots, x^n)$ alors

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i.$$

EXERCICE 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension n. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E de dimension $n-1$. Supposons que E soit de dimension n.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) H est un hyperplan de E ;
   (b) Pour tout vecteur $v \in E,\ v \notin H$, E est somme directe de H et de $\mathbb{K}\{v\}$.
2. Soit f une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que son noyau est un hyperplan de E.
3. Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle f sur E telle que $H = \mathrm{Ker} f$. On dit que f est une équation de H.
4. Considérons le cas où E est l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$. Qu'est-ce qu'un hyperplan. Trouver une forme linéaire le définissant.

2.2.2 Dual d'un espace vectoriel

Il est clair que l'ensemble des formes linéaires sur E est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les opérations suivantes

- **L'addition** : si f_1 et f_2 sont deux formes linéaires sur E alors $f_1 + f_2$ est la forme linéaire définie par
$$(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$$
pour tout $v \in E$.
- **La multiplication externe** : si $a \in \mathbb{K}$ alors l'application linéaire af_1 est définie par
$$(af_1)(v) = af_1(v).$$

Définition 13 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle dual de E, et on le note E^*, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E*
$$E^* = \{f : E \to \mathbb{K},\ f \text{ linéaire}\}.$$

2.2.3 Représentation des sous-espaces vectoriels

Ce paragraphe présente une application très importante de l'étude de l'espace dual : la représentation d'un sous-espace comme intersection d'hyperplans. On se restreint ici au cas d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace de dimension p avec $p < n$. Il existe alors $q = n - p$ formes linéaires indépendantes $f_1, \cdots, f_q$ telles que
$$F = \bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker} f_i$$
c'est-à-dire qu'un vecteur $v \in E$ appartient à F si et seulement si il est solution du système linéaire
$$\begin{cases} f_1(v) = 0, \\ f_2(v) = 0, \\ \cdots \\ f_q(v) = 0. \end{cases}$$
Ce résultat généralise les résultats élémentaires connus en dimension 2 ou 3 sur la représentation de droites ou de plans par des équations. En particulier, dans un espace vectoriel de dimension 3, l'intersection de 2 plans indépendants est une droite.

2.2.4 Orthogonalité

Ici, E est un espace vectoriel quelconque (on ne suppose pas de dimension finie). Considérons l'application notée $\langle\ ,\ \rangle$ définie sur $E^* \times E$ par
$$\langle f, v\rangle = f(v)$$

pour tout $f \in E^*$ et $v \in E$. Cette application est bilinéaire (cette notion sera détaillée dens le chapitre suivant), c'est-à-dire elle vérifie :
$\forall f_1, f_2 \in E^*, v_1, v_2 \in E, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$.

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, v\rangle = \alpha_1 \langle f_1, v\rangle + \alpha_2 \langle f_2, v\rangle$$

et

$$\langle f, a_1 v_1 + a_2 v_2\rangle = a_1 \langle f, v_1\rangle + a_2 \langle f, v_2\rangle.$$

Définition 14 – *Si F est un sous-espace de E, l'orthogonal F° de F dans E^* est :*

$$F^\circ = \{f \in E^* \,|\, \forall x \in F,\ \langle f, x\rangle = 0\}.$$

– *Si G est un sous-espace de E^*, l'orthogonal $G^\perp$ de G dans E est :*

$$G^\perp = \{x \in E \colon \forall f \in G, \langle f, x\rangle = 0\}.$$

On vérifie sans peine, compte tenu de la bilinéairité de $\langle\ ,\ \rangle$, que F° est un sous-espace vectoriel de E^* et que $G^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

EXERCICE 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \subset F_2$.
   Montrer que $F_2^\circ \subset F_1^\circ$.
2. Soient G_1 et G_2 deux sous-espaces vectoriels de E^* tels que $G_1 \subset G_2$.
   Montrer que $G_2^\perp \subset G_1^\perp$.
3. Si G est un sous-espace vectoriel de E^* alors $G^\perp = \bigcap_{f \in G} \mathrm{Ker} f$.
4. Soit F une partie de E. Montrer que $F \subset F^{\circ\perp}$ et $F^\circ = F^{\circ\perp\circ}$.

2.3 Base duale

2.3.1 Définition de la base duale d'une base de E

Nous allons supposer, dans tout ce paragraphe, que E est de dimension finie.

Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E. Toute forme linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ est entièrement déterminée par les transformées des vecteurs de base $f(e_i)$. Prenons pour base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ qui est de dimension 1, $\{1\}$. On a alors $f(e_i) = a_i \cdot 1$ et donc le n-uple $(a_1, .., a_n)$ détermine f. Considérons les formes linéaires, notées e^i définies par :

$$e^i(e_j) = \delta^i_j$$

où δ^i_j est le symbole de Kronecker : $\delta^i_j = 1$ si $i = j$ et $\delta^i_j = 0$ si $i \neq j$. Les formes linéaires $e^1, ..., e^n$ sont génératrices dans E^*. En effet si $v = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ est un vecteur de E, alors

$$f(v) = \sum_{i=1}^n x^i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i a_i.$$

Mais

$$e^i(v) = e^i(\sum_{j=1}^{n} x^j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j e^i(e_j) = x^i.$$

Ainsi

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e^i(v)$$

pour tout $v \in E$, soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e^i.$$

Ainsi la famille $\{e^1, \cdots, e^n\}$ est génératrice. Montrons qu'elle est aussi libre. Soit $a_1 e^i + \cdots + a_n e^n = 0$ une combinaison linéaire nulle de ces formes. Alors pour tout vecteur e_i de la base de E on a

$$(a_1 e^1 + ... + a_n e^n)(e_i) = 0 = a_i.$$

Donc tous les coefficients a_i sont nuls. Ainsi $\{e^1, ..., e^n\}$ est une base de E^*.

Théorème 11 *Si E est de dimension finie et si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E, alors la famille $\{e^1, \cdots, e^n\}$ de E^* définie par*

$$e^i(e_j) = \delta^i_j$$

est une base de E^*, appelée la base duale de la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E.

Corollaire 1 *Si E est de dimension finie, alors E^* est de dimension finie et*

$$\dim E^* = \dim E.$$

EXERCICE 3.

1. On considère les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la base duale $\left\{v^1, v^2, v^3\right\}$.
2. Soit V l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 1 et soient

$$f_1(P) = \int_0^1 P(t)dt, \quad f_2(P) = \int_0^2 P(t)dt.$$

Vérifier que $\{f_1, f_2\}$ est une base de V^*. Trouver la base $\{P_1, P_2\}$ de V telle que $\{f_1, f_2\}$ en soit la base duale.

EXERCICE 4. Soit V l'espace l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2 et soient φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires définies par

$$f_1(P) = \int_0^1 P(t)dt, \quad f_2(P) = P'(1), \quad f_3(P) = P(0),$$

où P' est la dérivée de P. Vérifier que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de V^*. Trouver la base $\{P_1, P_2, P_3\}$ de V telle que $\{f_1, f_2, f_3\}$ en soit la base duale.

EXERCICE 5. Soient les trois formes linéaires de $V = \mathbb{R}^3$ définies par

$$f_1(x, y, z) = x + 2y - 3z, \quad f_2(x, y, z) = 5x - 3y, \quad f_3(x, y, z) = 2x - y - z.$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de l'espace dual V^*. Déterminer la base de $\mathbb{R}^3$ dont $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base duale.

EXERCICE 6. Soient les trois formes linéaires de $V = \mathbb{R}^3$ définies par

$$f_1(x, y, z) = x + y + z, \quad f_2(x, y, z) = x - y + z, \quad f_3(x, y, z) = x + z.$$

Exprimer ces vecteurs dans la base $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ duale de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2.3.2 Changement de bases duales

Soient $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{e^1, \cdots, e^n\}$ sa base duale, qui est une base de E^*. Considérons une deuxième base $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ de E et soit $\{\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\}$ sa base duale. Soit P la matrice de passage de la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ à la base $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$. Rappelons que cette matrice s'obtient en mettant en colonne les composantes des nouveaux vecteurs de base exprimés dans l'ancienne base. Si

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i e_i$$

alors

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 3 *Soient $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ deux bases de E. Si P est la matrice de passage de la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ à la base $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$, alors la matrice de passage de la base duale $\{e^1, \cdots, e^n\}$ à la base duale $\{\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\}$ est*

$$Q = {}^tP^{-1}$$

où ${}^tP$ désigne la transposée de la matrice P.

Démonstration. Rappelons tout d'abord que

$$^t(P^{-1}) = (^tP)^{-1}$$

que l'on écrit pour simplifier $^tP^{-1}$. Posons

$$\varepsilon^j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j e^i.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon^j(\varepsilon_k) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (\beta_i^j e^i)(\sum_{l=1}^n \alpha_k^l e_l) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_i^j \alpha_k^l e^i(e_l) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \beta_i^j \alpha_k^i. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i^j \alpha_k^i = \delta_k^j.$$

Ceci traduit le produit matriciel

$$Q \cdot {}^tP = Id.$$

D'où

$$Q = {}^tP^{-1}.$$

2.4 L'espace bidual

Soit E un espace vectoriel et soit E^* son espace dual. L'espace $(E^*)^*$ des formes linéaires sur E^* est appelé le bidual de E et il est noté E^{**}.

2.4.1 Cas de la dimension finie

Considérons l'application

$$\epsilon_E : E \to E^{**}$$

définie par

$$\epsilon_E(v) : \varphi \to \varphi(v)$$

pour tout $\varphi \in E^*$. L'application $v \to \epsilon_E(v)(\varphi)$ est une forme linéaire sur E. En effet l'expression de $\varphi(v)$ comme fonction de φ avec v fixé est linéaire par rapport à φ. L'application $\epsilon_E : E \to E^{**}$ est linéaire. En effet l'expression de $\varphi(v)$ comme fonction de v avec φ fixé est linéaire par rapport à v.

Proposition 4 *Si E est de dimension finie alors l'application ϵ_E est un isomorphisme linéaire entre E et son bidual E^{**}.*

En effet, si $\{e_i\}$ est une base de E et si $\{e^i\}$ est la base duale, alors $\epsilon_E(e_i) \in E^{**}$ et on a

$$\epsilon_E(e_i)(e^j) = \delta_i^j.$$

L'application linéaire ϵ_E transforme la base $\{e_i\}$ en la base duale de la base $\{e^i\}$ de E^*. C'est donc un isomorphisme. Il est appelé l'isomorphisme canonique (car il ne dépend pas, dans sa définition, du choix d'une base) et il permet d'identifier E et son bidual.

Remarques. 1. Si E n'est pas de dimension finie, l'application linéaire ϵ_E n'est pas nécessairement bijective. Elle est toutefois toujours injective. Nous verrons ceci dans le paragraphe suivant.

2. Considérons l'application linéaire $\phi : E \to E^*$ définie par $\phi(e_i) = e^i$. Comme elle transforme une base en une base, c'est un isomorphisme entre E et son dual. Mais cet isomorphisme n'est pas canonique. Ceci signifie que si on change de base de E, l'application ϕ change également. Par exemple, si E est de dimension 1, soit $\{e_1\}$ une base de E et soit $\{e^1\}$ sa base duale. Alors la base $\{a^{-1}e^1\}$ est la base duale de $\{ae_1\}$, $a \neq 0$. Mais les applications $\phi_1 : e_1 \to e^1$ et $\phi_2 : ae_1 \to a^{-1}e_1$ sont différentes dès que $a^2 \neq 1$. Par contre ϵ_E est canonique. Il ne dépend pas de la base choisie.

Proposition 5 *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Alors $\epsilon_E(\mathcal{B})$ est la base duale de $\mathcal{B}^* = \{e^1, \cdots, e^n\}$, c'est-à-dire*

$$\epsilon_E(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{**}.$$

Démonstration. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ alors on a

$$\epsilon_E(e_k)(e^i) = \langle e^i, e_k \rangle = \delta^i_k.$$

ce qui est précisément la formule définissant la base biduale.

On en déduit une formule explicite pour la base préduale, c'est-à-dire une base de E dont la base duale est la base donnée. L'existence est assurée par le calcul matriciel.

Corollaire 2 *Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E^*. Alors la base $\mathcal{B}$ préduale de $\mathcal{B}_1$ est donnée par*

$$\mathcal{B} = \epsilon_E^{-1}(\mathcal{B}_1^*).$$

2.4.2 Cas de la dimension infinie

Supposons à présent que E soit de dimension infinie. Soit E^{**} le bidual de E. Dans le paragraphe précédent, nous avons définie l'application linéaire

$$\epsilon_E : E \to E^{**}$$

avec

$$\epsilon_E(v) : \varphi \to \varphi(v)$$

pour tout $v \in E$ et $\varphi \in E^*$. Cette application est injective. En effet soit $v \in E$ tel que $\epsilon_E(v) = 0$. On en déduit

$$\epsilon_E(v)(\varphi) = \varphi(v) = 0$$

pour tout $\varphi \in E^*$. Ainsi $\varphi(v) = 0$ pour tout forme linéaire et donc $v = 0$. Le noyau de $\epsilon_E(v)$ est réduit à $\{0\}$ et cette application est injective. Elle n'est pas surjective. Ceci est une conséquence du théorème d'Erdös-Kaplansky, précisant qu'il n'existe aucun isomorphisme entre E est son bidual. Ainsi E apparaït comme un sous espace propre du bidual E^{**}. L'image de ϵ_E est parfois appelé le bidual restreint.

2.5 Applications duales

2.5.1 Définition de l'application duale

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit

$$f : E \to F$$

une application linéaire.

Proposition 6 *Il existe une unique application linéaire*

$$f^* : F^* \to E^*$$

définie par

$$\langle f^*(\varphi), v\rangle = \langle \varphi, f(v)\rangle$$

pour tout $\varphi \in F^*$ et pour tout $v \in E$.

Démonstration. 1. Montrons l'unicité de f^*. Soient f_1^* et f_2^* deux telles applications. Alors

$$\langle f_1^*(\varphi), v\rangle = \langle \varphi, f(v)\rangle = \langle f_2^*(\varphi), v\rangle$$

pour tout $\varphi \in F^*$ et pour tout $v \in E$. Ainsi

$$\langle (f_1^* - f_2^*)(\varphi), v\rangle = 0$$

Fixons φ et laissons varier $v \in E$. Alors l'application $(f_1^* - f_2^*)(\varphi)$ qui pour tout vecteur v a pour image 0 est nulle. On en déduit $f_1^* = f_2^*$.

2. Montrons l'existence de f^*. Fixons $\varphi \in F^*$ et regardons $\langle \varphi, f(v)\rangle$ comme une fonction sur E. Comme f est linéaire, cette application est linéaire. Elle appartient donc à E^*. Notons la $f^*(\phi)$. Comme $\langle \varphi, f(v)\rangle$ est linéaire par rapport à ϕ, l'application f^* est linéaire.

2.5.2 Cas de la dimension finie : Matrice adjointe

Donnons nous $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\{e'_j\}_{1\leq j\leq p}$ une base de F. La matrice de f relative à ces bases est donnée à partir de

$$f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j e'_j.$$

Notons $A = (\alpha_i^j)$ cette matrice et cherchons la matrice de f^* dans les bases duales. Par définition, $f^*(e'^j)(e_i) = e'^j(f(e_i))$. Ainsi

$$f^*(e'^j)(e_i) = e'^j(f(e_i)) = e'^j(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k e'_k) = \alpha_i^j.$$

D'où

$$f^*(e'^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j e^i.$$

On en déduit que la matrice A^* de f^* relative aux bases duales est $A^* = {}^tA$ la transposée de la matrice A.

Proposition 7 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, E et F étant de dimension finie. Si A est la matrice de f relative aux bases $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ et $\{e'_j\}_{1\leq j\leq p}$ de E et F, alors la matrice de l'application duale $f^* : F^* \to E^*$ dans les bases duales est*

$$A^* = {}^tA.$$

On en déduit

Corollaire 3 *Soient $f, g : E \to F$ et $h : F \to G$ des applications linéaires*

1. $(f + g)^* = f^* + g^*$,
2. $(af)^* = af^*$, *pour tout* $a \in \mathbb{K}$.
3. $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$.

Démonstration. Toutes ces identités résultent des relations matricielles suivantes

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$,
2. ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA$,
3. ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Corollaire 4 *Les applications linéaires f et f^* ont même rang. En particulier f est un isomorphisme si et seulement si f^* est un isomorphisme.*

Démonstration. En effet les matrices de f et f^* sont reliées par $A^* = {}^tA$. Elles ont même rang. Comme $\det A = \det {}^tA$, alors A inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible. Rappelons que dans ce cas ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Comme E et F sont de dimension finie, on peut identifier les biduaux E^{**} et F^{**} à E et F. Dans ce cas, si f est une application linéaire de E dans F, alors f^{**} est une application linéaire de E dans F et l'on a :

$$f^{**} = f.$$

On dit que l'application linéaire

$$f \to f^*$$

est involutive.

EXERCICE 7. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus n. Soient $a_1, ..., a_n$ des nombres réels distincts. On pose

$$A(X) = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n), \quad \text{et } E_i(X) = \frac{A(X)}{A'(a_i)(X - a_i)}$$

pour $i = 1, \cdots, n$.

1. Que vaut $A'(a_i)$?
2. Montrer que $\{E_1, ..., E_n\}$ est une base de E.
3. Soit $F_i \in E^*$ définie par $F_i(P) = P(a_i)$, $i = 1, \cdots, n$. Que peut-on dire de la famille $\{F_1, ..., F_n\}$?
4. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Soit $F \in E^*$ définie par

   $$F(P) = \int_0^1 f(t)P(t)dt.$$

   Exprimer F à l'aide de $F_1, ..., F_n$. Traiter l'exemple suivant : $n = 2$, $f(t) = \sin wt$, $w \neq 0$.

Chapitre 3

Formes bilinéaires, formes quadratiques

On suppose dans tout ce chapitre que le corps de base $\mathbb{K}$ est le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

3.1 Formes bilinéaires

3.1.1 Définition

Définition 15 *Une application*

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$$

est appelée forme bilinéaire si elle vérifie : pour tout $v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in E$ *et* $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$

1. $\varphi(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 \varphi(v_1, w) + a_2 \varphi(v_2, w)$,
2. $\varphi(v, a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 \varphi(v, w_1) + a_2 \varphi(v, w_2)$.

Ceci est équivalent à dire que φ est linéaire en chacun de ses arguments et à valeurs dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire chacune des applications $\varphi_v^1 : E \to \mathbb{K}$ et $\varphi_w^2 : E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_v^1(w) = \varphi(v, w), \quad \varphi_w^2(v) = \varphi(v, w)$$

appartient à E^*.

Exemples

1. Soit $E = \mathbb{K}^n$. Si $v = (x^1, \cdots, x^n)$ et $w = (y^1, \cdots, y^n)$, l'application

   $$\varphi(v, w) = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n$$

   qui correspond au produit scalaire classique, est une forme bilinéaire.

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. L'application définie par
$$\varphi\left((x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3)\right) = x^1y^2 - x^2y^1 + xsy^3$$
est une forme bilinéaire.
3. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Si $P, Q \in E$, alors l'application définie par
$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$
est une forme bilinéaire sur E.

3.1.2 L'espace $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$

Soient $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$, on définit :

1. La somme $\varphi_1 + \varphi_2$ par $(\varphi_1 + \varphi_2)(v, w) = \varphi_1(v, w) + \varphi_2(v, w)$ pour tous $v, w \in E$,
2. La multiplication externe par $(a\varphi_1)(v, w) = a\varphi_1(v, w)$ pour tous $v, w \in E$ et pour tout $a \in \mathbb{K}$.

Ces deux opérations munissent $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{K})$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3.1.3 Formes bilinéaires symétriques, antisymétriques

Une forme bilinéaire
$$\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$$
est dite

- *symétrique*, si $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$ pour tous $v, w \in E$,
- *antisymétrique* si $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$ pour tous $v, w \in E$,

Soit φ une forme bilinéaire sur E. Alors la forme biniléaire φ_s définie par
$$\varphi_s(v, w) = \frac{\varphi(v, w) + \varphi(w, v)}{2}$$
pour tous $v, w \in E$ est symétrique.

La forme bilinéaire φ_a définie par
$$\varphi_a(v, w) = \frac{\varphi(v, w) - \varphi(w, v)}{2}$$
pour tous $v, w \in E$ est antisymétrique.

Proposition 8 *Toute forme bilinéaire sur E s'écrit de manière unique comme la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique.*

Démonstration. Soient φ_s et φ_a les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques définies ci-dessus. On a bien la décomposition
$$\varphi = \varphi_s + \varphi_a.$$

Supposons que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ soit une deuxième décomposition, avec φ_1 symétrique et φ_2 antisymétrique. Alors

$$\varphi(v, w) + \varphi(w, v) = 2\varphi_1(v, w)$$

pour tous $v, w \in E$ ce qui montre que $\varphi_1 = \varphi_s$. De même,

$$\varphi(v, w) - \varphi(w, v) = 2\varphi_2(v, w)$$

pour tous $v, w \in E$ implique $\varphi_2 = \varphi_a$. D'où la proposition.

3.1.4 Formes bilinéaires non dégénérées

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 16 *Une forme bilinéaire symétrique φ sur E est dite*

1. *non dégénérée si $\varphi(v, w) = 0$ pour tout $w \in E$ implique $v = 0$.*
2. *définie positive si $\varphi(v, v) \in \mathbb{R}^{+*}$ pour tout $v \neq 0 \in E$.*

On peut également parler de non dégénérescence pour une forme bilinéaire antisymétrique. Par contre la notion de définie positive est sans intérêt dans ce cas, car si φ est antisymétrique, alors $\varphi(v, v) = 0$ pour tout v.

Proposition 9 *Une forme bilinéaire symétrique définie positive est non dégénérée.*

Démonstration. En effet, si φ était dégénérée, il existerait $v \neq 0 \in E$ tel que $\varphi(v, w) = 0$ pour tout $w \in E$. En particulier on aurait $\varphi(v, v) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

EXERCICE 1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les formes bilinéaires suivantes

1. $\varphi_1(v, w) = x^1y^1 - x^1y^2 - x^2y^2 + 2x^2y^3 + x^3y^1 - 2x^3y^3$
2. $\varphi_2(v, w) = x^1y^1 + x^2y^1 + x^1y^2 + x^3y^3$
3. $\varphi_3(v, w) = x^1y^2 - x^2y^1 + x^2y^3 - x^3y^2$

avec $v = (x^1, x^2, x^3)$ et $w = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$. Ces formes sont-elles symériques, antisymétriques, dégénérées, définies positives ?

EXERCICE 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient f_1, f_2 deux formes linéaires sur E.

1. Montrer que l'application φ donnée par $\varphi(v, w) = f_1(v)f_2(w)$ pour tous $v, w \in E$ est bilinéaire.
2. Exprimer les formes bilinéaires symétrique φ_s et antisymétrique φ_a associées.
3. A quelle condition φ_s est non dégénérée ou définie positive ?

3.1.5 Orthogonalité pour les formes bilinéaires symétriques

Définition 17 *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E et v, w des vecteurs de E. On dit que v et w sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(v, w) = 0$. Un vecteur est dit isotrope s'il est orthogonal à lui même.*

La relation d'orthogonlité est une relation symétrique. L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé le cône isotrope de φ. Ce n'est pas, en général, un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}^3$ la forme bininéaire symétrique

$$\varphi(v, w) = x^1y^1 + x^2y^2 - x^3y^3$$

où $v = (x^1, x^2, x^3)$ et $w = (y^1, y^2, y^3)$. Le vecteur v est isotrope si ses coordonnées vérifient l'équation algébrique :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$$

qui est l'équation d'un cône algébrique dans $\mathbb{R}^3$. Ceci explique le vocabulaire "cône isotrope".

Définition 18 *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. On appelle noyau de φ, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E.*

Le noyau de φ est un sous-espace vectoriel de E. Il est défini par la relation

$$\varphi(v, w) = 0, \quad \forall w \in E.$$

Il est réduit à $\{0\}$ si et seulement si φ est non dégénérée.

Définition 19 *Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux relativement à φ si tout vecteur de l'un est orthogonal à tous les vecteurs de l'autre, soit*

$$\varphi(v, w) = 0, \quad \forall v \in F, \forall w \in G.$$

On appelle orthogonal de F, noté $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.

Par exemple, l'orthogonal de l'espace E en entier est le noyau de φ. L'orthogonal de F est donc défini par l'équation

$$\varphi(v, w) = 0, \quad \forall w \in F.$$

On en déduit que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. En général $F \cap F^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. En effet si F contient un vecteur isotrope v non nul, alors ce vecteur appartient aussi à $F^\perp$. On dit de F est totalement isotrope s'il est inclu dans le cône isotrope. Dans ce cas tous les vecteurs de F sont orthogonaux à F et $F^\perp$ est un sous-espace de F. On a toutefois le résultat suivant :

Proposition 10 *Supposons l'espace vectoriel E de dimension finie. Si φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on*

$$\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E).$$

De plus $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration. Soit $\{e_1, \cdots, e_k\}$ une base de F que l'on complète en une base de E. Un vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$ de E est orthogonal à F si $\varphi(v, e_j) = 0$ pour $j = 1, \cdots, k$, soit

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \varphi(e_i, e_j) = 0, \quad j = 1, \cdots, k.$$

Lemme 1 *Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et soit φ une forme bilinéaire non dégénérée sur E. Alors la matrice $M = (a_i^j)$ avec $a_i^j = \varphi(e_i, e_j)$ pour $i, j = 1, \cdots, n$ est inversible.*

Démontrons ce lemme. Si $v = (x^1, \cdots, x^n)$ est un vecteur du noyau de M, alors

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) x^j = 0$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$. On en déduit

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) x^j = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j x^j) = \varphi(e_i, v) = 0$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$. Ainsi v est dans le noyau de φ, il est donc nul et M est inversible.
Reprenons notre démonstration. Comme la matrice $(\varphi(e_i, e_j))$ est inversible, le système linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \varphi(e_i, e_j) = 0, \quad j = 1, \cdots, k$$

est de rang k. L'orthogonal $F^{\perp}$ correspondant à l'espace des solutions de ce système linéaire est donc de dimension $n - k$ et l'on a $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$. Comme la relation d'orthogonalité est symétrique, F est orthogonal à $F^{\perp}$ c'est-à-dire $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. D'après la relation précédente, ces espaces ont la même dimension, ils sont donc égaux.

Si φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, sa restriction à un sous-espace vectoriel F de E n'est pas nécéssairement non dégénérée. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$ et la forme bilinéaire $\varphi(v, w) = x^1 y^1 - x^2 y^2$. Soit F le sous-espace défini par l'équation $x^1 - x^2 = 0$. Si $v, w \in F$, alors $v = (x^1, x^1), w = (y^1, y^1)$ et on a $\varphi(v, w) = 0$. La restriction de la forme non dégénérée φ à F et ici nulle.

Définition 20 *Un sous-espace vectoriel de E sur lequel la restriction de φ est non dégénérée est appelé sous-espace non dégénéré.*

Proposition 11 *Soit φ une forme bilinéaire non dégénérée sur E. Alors un sous-espace F est non dégénéré si et seulement si*

$$F \oplus F^{\perp} = E.$$

De plus, dans ce cas, le sous-espace $F^{\perp}$ est aussi non dégénéré.

Démonstration. On sait que $\dim(F)+\dim(F^{\perp}) = \dim(E)$. Ainsi $F \oplus F^{\perp} = E$ si et seulement si $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Si F est non dégénéré, aucun vecteur de F n'est orthogonal à F et donc cette intersection est réduite à $\{0\}$. Inversement, si $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, alors l'équation $\varphi(v, w) = 0$ pour tout vecteur $w \in F$ implique $v = 0$ et F est non dégénéré.

3.1.6 Bases othogonales

Théorème 12 *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur l'espace vectoriel de dimension finie E. Il existe une base de E formée de vecteurs deux à deux orthogonaux.*

Démonstration Montrons ce résultat par récurrence sur la dimension de E. La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie pour tout espace vectoriel de dimension n et soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Si $\varphi = 0$, alors toute base de E est orthogonale pour φ et toute base répond à la question. Supposons donc φ non nulle. Il existe au moins un vecteur $u \neq 0$ tel que $\varphi(u, u) \neq 0$. En effet il existe $u_1, u_2 \in E$ tel que $\varphi(u_1, u_2) \neq 0$. Alors soit $\varphi(u_1, u_1) \neq 0$, soit $\varphi(u_2, u_2) \neq 0$, soit $\varphi(u_1, u_1) = \varphi(u_2, u_2) = 0$ et on a $\varphi(u_1 + u_2, u_1 + u_2) = 2\varphi(u_1, u_2) \neq 0$. Soit $F = u^{\perp}$ et soit φ_1 la restriction de φ à F. Cette forme est bilinéaire symétrique. Comme $\varphi(u, u) \neq 0$, F est de dimension strictement inférieure à n. On peut trouver une base $\mathcal{B}_F$ de F formée de vecteurs orthogonaux pour la restiction de φ à F.

Lemme 2 *Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}u$ et $F = u^{\perp}$ sont supplémentaires dans E.*

Démonstration En effet Soit $v \in E$, $v \notin F$. Considérons le vecteur

$$v_1 = v - \frac{\varphi(u, v)}{\varphi(u, u)} u.$$

Il vérifie

$$\varphi(u, v_1) = \varphi(u, v) - \frac{\varphi(u, v)}{\varphi(u, u)} \varphi(u, u) = \varphi(u, v) - \varphi(u, v) = 0.$$

Ainsi $v_1 \in F$ et $v = v_1 + \dfrac{\varphi(u, v)}{\varphi(u, u)} u \in F + \mathbb{R}u$. Calculons $F \bigcap \mathbb{R}u$. Si $v \in F \bigcap \mathbb{R}u$, alors $v = \alpha u$ et $0 = \varphi(v, u) = \alpha \varphi(u, u)$. Comme $q(u) \neq 0$, alors $\alpha = 0$ et $v = 0$. Ainsi $E = \mathbb{R}u \oplus F$, d'où le lemme.

On en déduit $dimF = n - 1$. La base formée de la base $\mathcal{B}_F$ et de u répond à la question.

EXERCICE 3. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire

$$\varphi(v,w) = x^1y^1+3x^2y^2+5x^3y^3+2(x^1y^2+x^2y^1)+3(x^1y^3+x^3y^1)+4(x^2y^3+x^3y^2)$$

où $v=(x^1,x^2,x^3)$, $w=(y^1,y^2,y^3)$ sont dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que φ est symétrique. Est-elle non dégénérée ?
2. Calculer son rang et son noyau.
3. Déterminer les vecteurs isotropes.
4. Soit $u_1=(1,0,0)$. Déterminer l'espace $u^\perp$ orthogonal à u.
5. Déterminer une base orthogonale pour φ.

EXERCICE 4. Soit φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{F}=\{e_1,\cdots,e_n\}$ une famille de vecteurs deux à deux othogonaux pour φ. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.

3.2 Matrices d'une forme bilinéaire

3.2.1 Matrice relative à une base donnée

Supposons $\dim E = n$ et soit $\mathcal{B}=\{e_1,\cdots,e_n\}$ une base de E. Si v et w sont deux vecteurs de E, ils se décomposent de manière unique dans cette base :

$$v=\sum_{i=1}^n x^ie_i, \quad v=\sum_{i=1}^n y^ie_i.$$

Soit φ une forme bilinéaire sur E. On a alors

$$\varphi(v,w)=\varphi\left(\sum_{i=1}^n x^ie_i, \sum_{j=1}^n y^je_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x^iy^j\varphi(e_ie_j).$$

Cette expression montre que l'expression analytique de $\varphi(v,w)$ est entièrement déterminée dès que l'on connait les valeurs $\varphi(e_i,e_j)$ pour tout $i,j=1,\cdots,n$.

Définition 21 *Soit φ une forme bilinéaire sur E et soit $\{e_1,\cdots,e_n\}$ une base de E. La matrice de φ relative à cette base est la matrice*

$$M(\varphi)_{\{e_1,\cdots,e_n\}} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \cdots & \varphi(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(e_i,e_1) & \varphi(e_i,e_2) & \cdots & \varphi(e_i,e_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \varphi(e_n,e_2) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Il est clair que si la matrice M de φ est

- *symétrique*, c'est-à-dire ${}^tM = M$ si φ est symétrique,
- *antisymétrique*, c'est-à-dire ${}^tM = -M$ si φ est antisymétrique.

On a également

Proposition 12 *La forme bilinéaire φ est non dégénérée si et seulement si sa matrice M relative à la base donnée est non dégénérée, c'est-à-dire vérifie* $\det M \neq 0$.

Démonstration. En effet, φ est dégénérée si et seulement s'il existe un vecteur $v \neq 0$, tel que $\varphi(v, w) = 0$ pour tout vecteur w, ce qui est équivalent à dire que $\varphi(v, e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Posons $v = \sum_{j=1}^n x^j e_j$. Alors la non dégénérescence se traduit par

$$\sum_{j=1}^{n} x^j \varphi(e_j, e_i) = 0$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$. Ceci est équivalent à dire que les colonnes de la matrice M sont linéairement dépendantes et donc M n'est pas inversible.

On peut dès à présent remarquer que si on considère une base $\mathcal{B}'$ de E complétée à partir du vecteur v c'est-à-dire $\mathcal{B}' = \{v, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$, la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ à une colonne de 0 et est donc dégénérée. On verra par la suite le lien entre ces deux matrices.

La donnée de la matrice M de φ relative à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ permet de retrouver directement l'écriture analytique de φ. En effet, soient $v = (x^1, \cdots, x^n)$ et $w = (y^1, \cdots, y^n)$ deux vecteurs de E décomposés dans la base $\mathcal{B}$ donnée. Considérons les matrices des coordonnées

$$V =^t (x^1, \cdots, x^n), \quad W =^t (y^1, \cdots, y^n).$$

On a alors

$$\varphi(v, w) =^t VMW.$$

EXERCICE 5. Soit φ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire l'expression analytique de φ relative à la base canonique.
2. Est-ce-que φ est symétrique ? non dégénérée ?
3. Ecrire la matrice M' de φ relative à la base $\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$
4. Si P désigne la matrice de passage, vérifier la formule

$$M' =^t PMP.$$

EXERCICE 6. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit φ la forme bilinéaire sur E définie par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

pour tout $P, Q \in E$. Déterminer la matrice de φ relative à la base $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ de E. Est-ce que φ est symétrique ? non dégénérée ?

EXERCICE 7. Soit φ une forme bilinéaire sur E.

1. Montrer que l'application $\varphi_w : E \to \mathbb{K}$ donnée par $\varphi_w(v) = \varphi(v, w)$ pour tout $v \in E$ est une forme linéaire. Montrer que l'application $f : w \to \varphi_w$ de E dans le dual E^* est linéaire.
2. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si φ est non dégénérée. Conclure que dans ce cas, les espaces E et E^* sont canoniquement isomorphes.

3.2.2 Formule de changement de base

Si $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ est une autre base de E, et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors la matrice M'_φ relative à cette nouvelle base vérifie

$$M'_\varphi =^t PM_\varphi P \tag{3.1}$$

On vérifie facilement que si M_φ est symétrique (respectivement antisymétrique, respectivement non dégénérée), M'_φ est également symétrique (respectivement antisymétrique, respectivement non dégénérée).

On vérifie facilement que si M_φ est symétrique (respectivement antisymétrique), M'_φ est également symétrique (respectivement antisymétrique,).

Proposition 13 *Les matrices M_φ et M'_φ ont même rang.*

Démonstration. Etant donnée la forme bilinéaire φ, on considère l'application

$$R(\varphi) : E \to E^*$$

définie par

$$R(\varphi)(w) : v \in E \to \varphi(v, w).$$

L'application $R(\varphi)$ est linéaire. Considérons une base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E et sa base duale. La matrice de $R(\varphi)$ relatives à ces bases est la matrice M de φ relative à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. En effet, on a

$$(R(\varphi)(e_j))(e_i) = \varphi(e_i, e_j).$$

Ainsi, si on pose $R(\varphi)(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{ij}e^i$, la matrice de $R(\varphi)$ est la matrice (a_{ij}) et on a

$$(R(\varphi)(e_j))(e_i) = \left(\sum_{k=1}^n a_{kj}e^k\right)(e_i) = a_{ij} = \varphi(e_i, e_j).$$

Ainsi la matrice de $R(\varphi)$ est bien M. Considérone une nouvelle base $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ de E et sa base duale. Notons par M' la matrice de φ relative à $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$. Si P désigne la matrice de changement de bases de

E, on a $M' = {}^tPMP$. Mais M' est aussi la matrice de $R(\varphi)$ relative aux bases $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ et sa duale. En effet, la matrice de changement de base duale est $Q = {}^tP^{-1}$. Ainsi $M' = Q^{-1}MP = ({}^tP^{-1})^{-1}MP = {}^tPMP$. Donc M' est la matrice de l'endomorphisme $R(\varphi)$ relative aux nouvelles bases. Elle a donc le même rang que M.

EXERCICE 8. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire

$$\varphi(v, w) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + 2(x^1y^3 + x^3y^1) + 2(x^2y^3 + x^3y^2)$$

où $v = (x^1, x^2, x^3)$, $w = (y^1, y^2, y^3)$ sont dans $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ orthogonale pour φ.
3. Ecrire la matrice de φ relative à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier la formule de changement de base.

EXERCICE 9. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base orthogonale pour φ. Montrer que la matrice de φ relative à $\mathcal{B}$ est diagonale. Que peut-on en déduire ?

3.3 Formes quadratiques

3.3.1 Forme quadratique attachée à une forme bilinéaire symétrique

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

Définition 22 *On appelle forme quadratique attachée à φ l'application*

$$q_\varphi : E \to \mathbb{R}$$

définie par

$$q_\varphi(u) = \varphi(u, u)$$

pour tout $u \in E$.

Cette application vérifie

$$q_\varphi(\lambda u) = \lambda^2 q_\varphi(u)$$

pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 14 *Si q_φ est la forme quadratique attachée à φ, alors*

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}[q_\varphi(u + v) - q_\varphi(u) - q_\varphi(v)]$$

pour tout $u, v \in E$.

Démonstration On a

$$\begin{aligned} q_\varphi(u+v) - q_\varphi(u) - q_\varphi(v) &= \varphi(u+v, u+v) - \varphi(u,u) - \varphi(v,v) \\ &= \varphi(u,u) + \varphi(v,v) + 2\varphi(u,v) - \varphi(u,u) - \varphi(v,v) \\ &= 2\varphi(u,v). \end{aligned}$$

Ceci permet de donner une définition générale d'une forme quadratique.

Définition 23 *On appelle forme quadratique de E toute application*

$$q : E \to \mathbb{R}$$

telle que

1. $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$.
2. *l' application*
$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$$
définie par
$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}[q(u+v) - q(u) - q(v)]$$
est une forme bilinéaire (symétrique).

La forme bilinéaire φ est appelée la forme polaire de q et l'on a

$$q(u) = \varphi(u,u)$$

pour tout $u \in E$. Si $\varphi(u,v) = a_{ij}x^iy^j$ est l'expression analytique de φ relative à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E, alors la symétrie de φ est équivalente à

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

On en déduit

$$q(u) = q(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x^i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x^ix^j.$$

Inversement, si la forme quadratique est donnée par un polynôme homogène de degré 2 en les variables $(x^1, \cdots, x^n)$, la forme polaire s'obtient en polarisant chaque monôme de ce polynôme. Un monôme de la forme $a(x^i)^2$ est polarisé en ax^iy^i, et un monôme de la forme ax^ix^j est polarisé en $\frac{a}{2}(xy^j + x^jy)$. Considérons par exemple la forme quadratique dans $\mathbb{R}^3$:

$$q(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + 3(x^3)^2 + 4x^1x^2.$$

Sa forme polaire est

$$\varphi(v,w) = x^1y^1 + 3x^3y^3 + 2(x^1y^2 + x^2y^1)$$

où $v = (x^1, x^2, x^3),\ w = (y^1, y^2, y^3)$.

3.3.2 Rang et noyau d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique de E et $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice de sa forme polaire est appelée également la matrice de q et notée $M = M(q;\mathcal{B})$. On appelle rang de q, noté $rg(q)$, le rang de la matrice M. Nous avons vu que ce rang ne dépend pas du choix de la base.

Définition 24 *On appelle noyau de q le sous-espace vectoriel de E :*

$$ker q = \{u \in E; \varphi(u, v) = 0, \forall v \in E\}$$

Le noyau de q est donc le noyau de sa forme polaire.

3.3.3 Le cône des vecteurs isotropes

Un vecteur isotrope $u \in E$ est un vecteur orthogonal à lui même. Ceci signifie que

$$q(u) = \varphi(u, u) = 0.$$

L'ensemble des vecteurs isotropes est donc un sous-ensemble de E défini par l'équation

$$q(u) = 0.$$

Il est clair que si u est isotrope, tout vecteur αu est aussi isotrope. Par contre, si u et v sont isotropes, en général $u + v$ ne l'est pas. L'ensemble des vecteurs isotropes n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.

Définition 25 *On appelle cône isotrope de la forme quadratique q, l'ensemble des vecteurs isotropes.*

On notera le cône $\mathcal{C}(q)$. Dans un système de coordonnées, $q(u) = 0$ est une équation polynomiale homogène de degré 2. Ainsi $\mathcal{C}(q)$ apparaît dans ce système comme une variété algébrique invariant par homothétie. D'où le nom de cône.

Exemple historique On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Sa forme polaire s'écrit

$$\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + yy' - zz'.$$

Le cône isotrope est défini par l'équation

$$q(u) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

C'est un cône de révolution d'axe Oz. Cet exemple, issu de la mécanique relativiste restreinte, est appelé dans ce contexte, le cône des lumières.

3.4 Décomposition en carrés d'une forme quadratique

3.4.1 Diagonalisation

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Considérons une base $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ formée de vecteurs deux à deux orthogonaux. Cete base existe d'après le théorème (**??**). Comme $\varphi(e'_i, e'_j) = 0$ si $i \neq j$, la matrice de

φ relative à cette base s'écrit :

$$M'_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(e'_1, e'_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi(e'_2, e'_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(e'_n, e'_n) \end{pmatrix}$$

Elle est donc diagonale. On en déduit

Théorème 13 *Soit M une matrice réelle symétrique. Il existe une matrice inversible P telle que $M' = {}^t PMP$ soit diagonale.*

La démonstration du Théorème (**??**) montre comment déterminer une telle base orthogonale. Lorsque la forme bilinéaire est définie positive, cette méthode est dite de Gram-Schmidt. C'est un algorithme qui permet de construite à partir d'une base quelconque de E, une base orthogonale. Rappelons rapidement cette méthode. Tout d'abord, soit un vecteur u non nul de E. On appelle projection d'un vecteur v sur le sous-espace engendré par un vecteur u le vecteur

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\varphi(u, v)}{\varphi(u, u)} u.$$

Rappelons que, comme φ est définie positive, $\varphi(u, u) > 0$ pour tout vecteur $u \neq 0$. Ceci étant, soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Posons

$$\begin{cases} u_1 = e_1, \\ u_2 = e_2 - \text{proj}_{u_1}(e_2), \\ u_3 = e_3 - \text{proj}_{u_1}(e_3) - \text{proj}_{u_2}(e_3), \\ \cdots \\ u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(e_k) \end{cases}$$

Alors $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est une base orthogonale pour φ. Notons que la matrice de changement de base est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et son déterminant est 1.

Si la forme bilinéaire symétrique est non dégénérée, et pas nécessairement définie positive, on peut calquer l'algorithme ci-dessus, mais en prenant soin de choisir des vecteurs non isotropes.

Ceci étant, soit $u = X^i e'_i$ la décomposition d'un vecteur u de E dans la base orthogonale. Alors

$$q(u) = \varphi(u, u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(X^i)^2 \tag{3.2}$$

où $a_{ii} = \varphi(e_i, e_i)$. L'expression (**??**) s'appelle une décomposition en carrés de q.

3.4.2 La méthode de Gauss

Cette méthode permet en partant de l'expression analytique de q de l'écrire sous forme de somme de carrés. Soit

$$q(u) = q(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x^i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{i,j} x^i x^j.$$

1. Supposons qu'il existe un α_i non nul. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\alpha_1 \neq 0$. On écrit
$$\begin{aligned} q(u) &= \alpha_1 \left((x^1)^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_1} x_1 x_j \right) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i (x^i)^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} \alpha_{ij} x^i x^j \\ &= \alpha_1 \left(x^1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_1} x^j \right)^2 - \frac{1}{\alpha_1} (\textstyle\sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} x^j)^2 + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \alpha_i (x^i)^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} \alpha_{ij} x^i x^j \end{aligned}$$
Posons
$$X^1 = x^1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_1} x^j$$
et
$$q_2(x^2, \cdots, x^n) = -\frac{1}{\alpha_1} (\sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} x^j)^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i (x^i)^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} \alpha_{ij} x^i x^j.$$
On en déduit
$$q(x^1, \cdots, x^n) = \alpha_1 (X^1)^2 + q_2(x^2, \cdots, x^n).$$

2. Supposons que $\alpha_i = 0$ pour tout i. Nous allons réduire la forme quadratique en utilisant l'identité (babylonnienne)
$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$$
qui montre que tout produit est somme de deux carrés. Supposons $\alpha_{12} \neq 0$. Ecrivons q sous la forme
$$q(x^1, \cdots, x^n) = 2\alpha_{12} \left(x^1 + \sum_{j\geq 3} \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{12}} x^j \right) \left(x^2 + \sum_{i\geq 3} \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{12}} x^i \right) + q_3(x^3, \cdots, x^n)$$
où q_3 est la forme quadratique des seules variables $x^3, x^4, \cdots, x^n$ égale à :
$$q_3(x^3, \cdots, x^n) = 2\alpha_{12} \left(\sum_{j\geq 3} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{12}} x^j \right) \left(\sum_{i\geq 3} \frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{12}} x^i \right) + 2\sum_{3\leq i<j\leq n} \alpha_{ij} x^i x^j.$$
Posons
$$\begin{cases} U^1 = x^1 + \sum_{j\geq 3} \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{12}} x^j, \\ U^2 = x^2 + \sum_{j\geq 3} \frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{12}} x^j. \end{cases}$$
Dans ce cas, q s'écrit
$$q(x^1, \cdots, x^n) = 2\alpha_{12}(U^1 U^2) + q_3(x^3, \cdots, x^n).$$
Mais, en utilisant l'identité de Babylonne, on obtient
$$q(x^1, \cdots, x^n) = \frac{1}{2}\alpha_{12}((U^1 + U^2)^2 - (U^1 - U^2)^2) + q_3(x^3, \cdots, x^n).$$
Posons
$$\begin{cases} X^1 = U^1 + U^2 \\ X^2 = U^1 - U^2. \end{cases}$$
Alors
$$q(x^1, \cdots, x^n) = \frac{1}{2}\alpha_{12}(X^1)^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}(X^2)^2 + q_3(x^3, \cdots, x^n).$$

3. Conclusion : Dans les deux cas, nous avons écrit q sous la forme d'une somme d'un ou deux carrés et d'une forme quadratique dépendant seulement de $n-1$ ou $n-2$ variables. En réitérant la procédé ci-dessus à cette nouvelle forme quadratique, on récupère une écriture de q sous la forme d'une somme de carrés et d'une nouvelle forme quadratique dépendant d'un nombre moindre de variables. On termine cette procédure lorsque cette dernière forme est nulle.

Les nouvelles variables $X^1, X^2, \cdots, X^p$, $p \leq n$ ont la propriété fondamentale suivante :

Proposition 15 *Considérons les formes linéaires données par*

$$f^1(x^1, \cdots, x^n) = X^1, f^2(x^1, \cdots, x^n) = X^2, \cdots, f^p(x^1, \cdots, x^n) = X^p.$$

Alors la famille $\{f^1, f^2, \cdots, f^p\}$ est libre dans l'espace dual E^*.

Démonstration. En effet, d'après la méthode de réduction ci-dessus, on a soit

$$f^i(x^1, \cdots, x^n) = x^i + g(x^{i+1}, \cdots, x^n)$$

avec $g \in E^*$, soit

$$f^i(x^1, \cdots, x^n) = x^i + x^{i+1} + g(x^{i+2}, \cdots, x^n), f^{i+1}(x^1, \cdots, x^n) = x^i - x^{i+1} + h(x^{i+2}, \cdots, x^n)$$

avec $g, h \in E^*$. On construit ainsi à chaque étape des nouvelle formes linéaires indépendantes avec les précédentes.

Théorème 14 *Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une famille libre $\left\{f^1, \cdots, f^p\right\}$ de formes linéaires sur E telle que*

$$q = a_1(f^1)^2 + a_2(f^2)^2 + \cdots + a_p(f^p)^2$$

où p est le rang de la forme polaire associée à q.

Démonstration. Le procédé de Gauss donne une telle décomposition. Bien entendu, la décomposition n'est pas unique. Montrons que le nombre de carrés intervenant dans cette écriture est unique et correspond au rang de φ, la forme polaire de q. Considérons la famille $\left\{f^1, \cdots, f^1\right\}$. Comme elle est libre, on a $p \leq n$. Complétons cette famille en une base $\left\{f^1, \cdots, f^1, g^{p+1}, \cdots, g^n\right\}$ de E^*. Considérons la base $\{f_1, \cdots, f_p, f_{p+1}, \cdots, f_n\}$ de E dont $\left\{f^1, \cdots, f^1, g^{p+1}, \cdots, g^n\right\}$ est la base duale. On a alors

$$\varphi(f_i, f_j) = 0$$

dès que $i \neq j$. La base $\{f_1, \cdots, f_p, f_{p+1}, \cdots, f_n\}$ est donc orthogonale pour φ. La matrice de φ relative à cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_p & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et est de rang p qui est le rang de φ.

Exemples.

1. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 7yz - 4xz + 3xy.$$

Décomposons-là sous forme d'une somme de carrés en utilisant le principe de Gauss. On a

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= 2x^2 + x(3y-4z) - 2y^2 - 7z^2 + 7yz \\ &= 2(x^2 + \tfrac{1}{2}x(3y-4z)) - 2y^2 - 7z^2 + 7yz \\ &= 2(x + \tfrac{1}{4}(3y-4z))^2 - \tfrac{1}{8}(3y-4z)^2 - 2y^2 - 7z^2 + 7yz \\ &= 2(x + \tfrac{1}{4}(3y-4z))^2 - \tfrac{25}{8}y^2 + 10yz - 9z^2. \end{aligned}$$

Posons

$$X = x + \frac{3}{4}y - z.$$

Alors

$$q = 2X^2 + q_2(y,z).$$

Réduisons q_2. On a

$$\begin{aligned} q_2(y,z) &= -\tfrac{25}{8}y^2 + 10yz - 9z^2 \\ &= -\tfrac{25}{8}(y^2 - \tfrac{16}{5}yz) - 9z^2 \\ &= -\tfrac{25}{8}(y - \tfrac{8}{5}z)^2 - z^2 \end{aligned}$$

Posons

$$Y = y - \frac{8}{5}z, \quad Z = z.$$

Alors

$$q(x,y,z) = q(X,Y,Z) = 2X^2 - \frac{25}{8}Y^2 - Z^2.$$

On a bien une décomposition en somme de carrés telle que les formes linéaires

$$\begin{cases} f^1(x,y,z) = x + \frac{3}{4}y - z \\ f^2(x,y,z) = y - \frac{8}{5}z \\ f^3(x,y,z) = z \end{cases}$$

soient indépendantes. Nous pouvons interpréter ces calculs de la façon suivante. Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Cette décomposition de v est relative à la base canonique $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$. Il existe une nouvelle base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, par rapport à laquelle v a pour composnate (X,Y,Z) soit

$$v = Xe'_1 + Ye'_2 + Ze'_3.$$

La matrice de q ou de sa forme polaire relative à cette nouvelle base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est diagonale et s'écrit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base orthogonale pour la forme polaire de q. Il nous reste à déterminer cette base. Nous avons vu que $\{f^1, f^2, f^3\}$ est une base de E^*, et $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est la base de $\mathbb{R}^3$ dont

$\{f^1, f^2, f^3\}$ en est la base duale. Mais la matrice de changement de bases dans le dual $(\mathbb{R}^3)^*$ de la base canonique $\{e^1, e^2, e^3\}$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

car $f^1 = e^1 + \frac{3}{4}e^2 - e^3$, $f^2 = e^2 - \frac{25}{8}e^3$, $f^3 = e^3$. Si Pest la matrice de passage de $\{e_1, e_2, e_3\}$ à $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, alors

$$Q = {}^t P^{-1}.$$

On en déduit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = -\frac{3}{4}e_1 + e_2 \\ e'_3 = -\frac{1}{5}e_1 + \frac{8}{5}e_2 + e_3 \end{cases}$$

On aurait pu calculer autrement la matrice P en écrivant le changement de coordonnées

$$\begin{cases} X = x + \frac{3}{4}y - z \\ Y = y - \frac{8}{5}z \\ Z = z \end{cases}$$

On sait que les systèmes de coordonnées sont reliés par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considérons la forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2.$$

Elle s'écrit comme somme de trois carrés mais les formes linéaires qui sont attachées à cette décomposition

$$\begin{cases} f^1(x, y, z) = y - z \\ f^2(x, y, z) = z - x \\ f^3(x, y, z) = x - y \end{cases}$$

ne sont pas indépendantes. En effet on a la relation de dépendance

$$f^1 + f^2 + f^3 = 0.$$

Pour réduire la forme quadratique q, commençons par la développer :

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

Utilisons le procédé de Gauss.

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= 2\left(x^2 - x(y+z)\right) + 2y^2 + 2z^2 - 2yz. \\ &= 2\left(x - \tfrac{1}{2}(y+z)\right)^2 - \tfrac{1}{2}(y+z)^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz \\ &= 2X^2 + \tfrac{3}{2}(y^2 + z^2 - 2yz) \\ &= 2X^2 + \tfrac{3}{2}(y-z)^2 \\ &= 2X^2 + \tfrac{3}{2}Y^2 \end{aligned}$$

avec $X = x - \frac{1}{2}(y+z)$ et $Y = y - z$. Les formes linéaires associées sont

$$\left\{ \begin{array}{l} f^1(x,y,z) = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ f^2(x,y,z) = y - z. \end{array} \right.$$

Elles sont indépendantes et la forme polaire associée est de rang 2.

EXERCICE 9. Réduire les formes quadratiques suivantes et en déduire leur rang :

1. $q_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 2xz + yz$,
2. $q_2(x,y,z) = xy + yz + 2xz$.
3. En déduire, pour chacune d'elles, une base othogonale pour la forme polaire associée.

EXERCICE 10. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 4xz.$$

1. Ecrire la forme polaire et sa matrice M dans la base canonique.
2. Réduire la forme quadratique q.
3. Quel est son rang ? Quel est son noyau ?
4. Trouver une base qui diagonalise la matrice M.

EXERCICE 11. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'un produit scalaire φ, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire définie positive. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Un vecteur $w \in F$ est appelé la projection orthogonale d'un vecteur $v \in E$ sur F si le vecteur $v - w \in F^{\perp}$.

1. Montrer que pour tout vecteur $v \in E$, il existe une unique projection orthogonale sur F.
2. Montrer que si w et $w^{\perp}$ sont les projections orthogonales de $v \in E$ sur F et $F^{\perp}$, alors $v = w + w^{\perp}$.
3. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de E. Si v est un vecteur unitaire, montrer que $v = \sum_{k=1}^{n} \cos \alpha_k e_k$ où α_k est l'angle entre le vecteur v et le vecteur e_k. En déduire
$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2 \alpha_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \alpha_k = n - 1.$$
4. Soit $v \in E$. On appelle angle entre v et le sous-espace F, l'angle de v avec sa projection orthogonale sur F. Soit α cet angle. On considère une base orthonormée de F notée $\{e'_1, \cdots, e'_p\}$. Soit β_i l'angle entre v et e'_i. Montrer
$$\cos^2 \alpha = \sum_{k=1}^{p} \cos^2 \beta_k.$$
5. On considère un ensemble de sous-espaces de E de dimension p tels que l'intersection de deux quelconques d'entre eux soit de dimension $p - 1$. Montrer que, soit tous ces sous-espaces contiennent un même sous-espace de dimension $p-1$, soit tous ces sous-espaces sont contenus dans un même sous-espace de dimension $p + 1$.

EXERCICE 12. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n.

1. Montrer qu'une forme quadratique sur E est le carré d'une forme linéaire non nulle si et seulement si q est de rang 1.
2. Montrer qu'une forme quadratique sur E est le produit de 2 formes linéaires indépendantes si et seulement si q est de rang 2.

3.5 Signature d'une forme quadratique réelle

Dans toute cette section, les espaces vectoriels considérés seront réels.

3.5.1 Théorème d'inertie de Sylvester

Théorème 15 *Soit q une forme quadratique sur E et soit φ sa forme polaire. Si on considère une base orthogonale pour φ, la matrice de q est diagonale et admet p éléments diagonaux positifs et s éléments diagonaux négatifs. Alors pour toute base orthogonale pour φ, la matrice diagonale de q a aussi p éléments diagonaux positifs et s éléments diagonaux négatifs.*

Démonstration. En effet, si r est le rang de q, il existe des formes linéaires $\{f^1, \cdots, f^p, f^{p+1}, \cdots, f^r\}$ linéairement indépendantes dans E^* telles que pour tout $v \in E$

$$q(v) = \lambda_1(f^1(v))^2 + \cdots + \lambda_p(f^p(v))^2 - \lambda_{p+1}(f^{p+1}(v))^2 - \cdots - \lambda_r(f^r(v))^2$$

les scalaires λ_i étant tous positifs. Complétons la famille libre $\{f^1, \cdots, f^p, f^{p+1}, \cdots, f^r\}$ en une base de E^*. Soit $\{f^1, \cdots, f^p, f^{p+1}, \cdots, f^r, \cdots, f^n\}$ cette base. Il existe alors une unique base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E telle que la base $\{f^1, \cdots, f^n\}$ de E^* soit la base duale de $\mathcal{B}$. Cette base est orthogonale pour φ et la matrice est diagonale et la diagonale s'écrit

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, -\lambda_{p+1}, -\lambda_{p+2}, \cdots, -\lambda_r, 0, \cdots, 0.$$

Considérons à présent une autre base orthogonale $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ pour φ. La matrice de φ associée à cette base est diagonale de rang r et nous pouvons toujours supposer, quitte à changer l'ordre des vecteurs de cette base, que la diagonale de cette matrice est

$$\lambda'_1, \lambda_2, \cdots, \lambda'_s, -\lambda'_{s+1}, -\lambda'_{s+2}, \cdots, -\lambda'_r, 0, \cdots, 0$$

avec $\lambda'_i > 0$ pour $i = 1, \cdots, r$. La forme quadratique s'écrit alors

$$q(v) = \lambda'_1(f'^1(v))^2 + \cdots + \lambda'_s(f'^s(v))^2 - \lambda'_{s+1}(f'^{p+1}(v))^2 - \cdots + \lambda'_r(f'^r(v))^2$$

Supposons $p > s$. Soit F le sous espace de E engendré par les $n - r + p$ vecteurs $\{e_1, \cdots, e_p, e_{r+1}, \cdots, e_n\}$ et F le sous espace de E engendré par les $r - s$ vecteurs $\{e'_{s+1}, \cdots, e'_r\}$. Comme $\dim F + \dim G = n + p - s$, alors $\dim F + \dim G > n$ et $F \bigcap G \neq \{0\}$. Soit $X \in F \bigcap G$, $X \neq 0$. Alors $q(X) > 0$ car $X \in F$ et $q(X) < 0$ car $X \in G$. Ce qui est impossible, donc $p \leq s$. On montre de même que $s \leq p$ et donc $s = p$. Ceci démontre le théorème.

3.5.2 Signature d'une forme quadratique réelle

Le symbole

$$(p \text{ signes } +, r - p \text{ signes } -)$$

que l'on écrira pour abréger

$$(p, r - p)$$

qui précise que dans toute décomposition de q sous forme de somme de carrés, il y a p coefficients positifs et $r - p$ coefficients négatifs, r étant le rang de q, est appelé la signature de q.

3.5.3 Classification des formes quadratiques réelles

Etant donnée une forme quadratique q sur un espace vectoriel réel de dimension n, elle s'écrit dans une base donnée comme un polynôme homogène du second degré en les composantes $(x^1, \cdots, x^n)$ des vecteurs dans la base donnée. On peut donc considérer q comme une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 26 *Deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont dites équivalentes, s'il existe un isomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$q_2(v) = q_1(f(v))$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Notons que cette condition est équivalente à écrire

$$\varphi_2(v, w) = \varphi_1(f(v), f(w))$$

pour tout $v, w \in \mathbb{R}^n$. En effet on a

$$\varphi_1(f(v+w), f(v+w)) = q_1(f(v+w)) = q_1(f(v)) + q_1(f(w)) + 2\varphi_1(f(v), f(w)).$$

Mais $q_1(f(v+w)) = q_2(v+w)$, $q_1(f(v)) + q_1(f(w)) = q_2(v) + q_2(w)$. Mais $q_2(v+w) = \varphi_2(v+w, v+w) = q_2(v) + q_2(w) + 2\varphi_2(v, w)$. On en déduit

$$\varphi_2(v, w) = \varphi_1(f(v), f(w)).$$

La réciproque est immédiate.

Théorème 16 *Deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont isomorphes si et seulement si elles ont la même signature.*

Démonstration. Considérons une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit M_1 (respectivement M_2) la matrice de q_1 (respectivement q_2) relative à cette base. Soit P la matrice inversible de l'isomorphisme f relative à cette base. Comme $\varphi_2(v, w) = \varphi_1(f(v), f(w))$, on a ; si V et W désigne les matrices des vecteurs v et w :

$${}^tVM_2W = {}^t(PV)M_1PW = {}^tV{}^tPM_1PW.$$

Ainsi

$$M_2 = {}^tPM_1P$$

et les matrices M_2 et M_1 sont les matrices de q_1 relatives aux bases $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$. Comme nous avons vu que la signature d'une forme quadratique correspondait au nombre de carrés positifs et négatifs des coefficients d'une quelconque matrice diagonale de cette forme quadratique, on en déduit que la signature de q_1 est égale à celle de q_2. Inversement, supposons que q_1 et q_2 aient la même signature. Il existe deux bases de $\mathbb{R}^n$ par rapport aux quelles la matrice de q_1 est diagonale et égale à la matrice de q_2. En effet il existe une décomposition en carrés de q_1 qui s'écrit

$$q_1(v) = \lambda_1(f^1(v))^2 + \cdots + \lambda_p(f^p(v))^2 - \lambda_{p+1}(f^{p+1}(v))^2 - \cdots + \lambda_r(f^r(v))^2$$

et comme tous les coefficients λ_i sont positifs, on peut se ramener à la forme

$$q_1(v) = (X^1)^2 + \cdots + (X^p)^2 - (X^{p+1})^2 - \cdots (X^r)^2$$

où $(p, r-p)$ est la signature de q_1. De même on peut ramener l'écriture de $q_2(v)$ relative à une autre base, à

$$q_1(v) = (Y^1)^2 + \cdots + (Y^p)^2 - (Y^{p+1})^2 - \cdots (Y^r)^2.$$

Ainsi q_1 et q_2 ont des matrices égales mais relatives à deux bases différentes. Soit M_1 cette matrice. Si P désigne la matrice de changement de bases, alors la matice q_2 dans la base diagonalisant q_1 s'écrit

$$M_2 = ^t PM_1P.$$

Nous avons vu que cette identité matricielle était équivalente à

$$\varphi_2(v, w) = \varphi_1(f(v), f(w))$$

où f est l'isomorphisme de matrice P. Ainsi q_1 et q_2 sont isomorphes.

EXERCICE 13. Soit El'espace vectoriel des matrices symétriques réelles 2×2.

1. Montrer que l'application $q : E \to \mathbb{R}$ donnée par $q(A) = \det A$ est une forme quadratique. Quelle est sa signature ?
2. Soit F le sous-espace de E formé des matrices de trace nulle. Montrer que la forme polaire associée à la restriction de q à F est définie négative.

EXERCICE 14. Soit A une matrice réelle $n \times 1$. On note $B = A.^tA$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de B.
2. Montrer que la forme bilinéaire associée à la matrice B est le carré d'une forme linéaire. Quelle est sa signature ?

3.5.4 Classification des formes quadratiques complexes

Théorème 17 *Toute forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel complexe E peut s'écrire sous la forme*

$$q = (f^1)^2 + \cdots + (f^r)^2$$

où $f^1, \cdots, f^r$ sont des formes linéaires sur E linéairement indépendantes.

Démonstration. Considérons une base orthogonale $\{e_1, \cdots, e_n\}$ pour la forme polaire de q. Quitte à réordonner les vecteurs de cette base, nous pouvons supposer que l'on a

$$q(v) = \lambda_1(x^1)^2 + \cdots + \lambda_r(x^r)^2$$

où r est le rang de q et $v = (x^1, \cdots, x^n)$ la décomposition de v dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Soit ρ_i un nombre complexe tel que $\rho_i^2 = \lambda_i$. Soit la base orthogonale $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ avec $e'_i = \rho_i^{-1}e_i$ pour $i = 1, \cdots r$ et $e'_i = e_i$ pour $i = r+1, \cdots, n$. Relativement à cette base, on a

$$q(v) = (x^1)^2 + \cdots + (x^r)^2.$$

D'où le théorème.

Corollaire 5 *Deux formes quadratiques complexes sur un espace vectoriel complexe sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Chapitre 4

Espaces vectoriels euclidiens et pseudo-euclidiens

Dans tout ce chapitre, nous ne considèrerons que des espaces vectoriels réels de dimension finie.

4.1 Produits scalaires

4.1.1 Définition

Définition 27 *On appelle produit scalaire pseudo-euclidien sur l'espace vectoriel réel E, toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E. On appelle produit scalaire euclidien, tout produit scalaire pseudo-euclidien défini positif.*

Rappelons qu'une forme bilinéaire est non dégénérée si sa matrice relative à une base quelconque est inversible, ou bien, ce qui est équivalent, si son noyau est réduit à $\{0\}$ et dans ce cas la forme quadratique associée est de signature $(p, n-p)$ avec $n = \dim E$. La forme est définie positive si elle vérifie

$$\varphi(v,v) > 0, \quad \forall v \neq 0.$$

Dans ce cas la signature de la forme quadratique est égale à $(n, 0)$.

Exemples.

1. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\varphi(v,w) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

où $v = (x^1, \cdots, x^n$ et $w = (y^1, \cdots, y^n)$ est un produit salaire euclidien. Sa forme quadratique s'écrit

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

2. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$ dont la forme quadratique est

$$q(v) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$$

de signature $(3, 1)$ est pseudo-euclidien et non euclidien. L'intérêt de ce produit scalaire en physique et plus particulièrement en mécanique relativiste a justifié cette étude des produits scalaires pseudo-euclidiens.

EXERCICE 1. Représenter dans le plan les courbes de niveau, c'est-à-dire les courbes $q(v) = a$, $a \in \mathbb{R}$ donné, pour les formes quadratiques suivantes

1. $q(v) = x^2 + y^2$,
2. $q(v) = x^2 - y^2$.

EXERCICE 2. Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit φ un produit scalaire euclidien sur un espace vectoriel réel E et soit q la forme quadratique associée. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\varphi(v, w))^2 \leq q(v)q(w)$$

pour tous vecteurs $v, w \in E$.
A quelle condition, l'égalité a-t-elle lieu ?
Cette inégalité est-elle vraie pour des produits scalaires pseudo-euclidiens non euclidiens ?

EXERCICE 3. Inégalité de Minkowski : Soit φ un produit scalaire euclidien sur un espace vectoriel réel E et soit q la forme quadratique associée. Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\varphi(v + w)} \leq \sqrt{q(v)} + \sqrt{q(w)}$$

pour tous vecteurs $v, w \in E$.
A quelle condition, l'égalité a-t-elle lieu ?
Cette inégalité est-elle vraie pour des produits scalaires pseudo-euclidiens non euclidiens ?

4.1.2 Expression dans une base orthonormale

Rappelons qu'il existe une base orthogonale pour $\varphi\}$ c'est-à-dire composée de vecteurs deux à deux orthogonaux pour φ. Nous connaissons deux procédés pour déterminer une telle base, soit le procédé de Gram-Schmidt, soit l'algorithme de réduction de Gauss. Dans ce dernier cas, on détermine une base $\mathcal{B}^*$ du dual E^* en considérant les formes linéaires dans la décompositions en carré de la forme quadratique q, la base cherchée est la base de E dont la duale est la base $\mathcal{B}^*$. Le procédé de Gram-Schmidt donne directement la base orthogonale, faire attention dans la procédure, de ne considérer que des vecteurs non isotropes.

Définition 28 *Une base orthogonale pour le produit scalaire φ est dite orthonormale si les vecteurs de cette base sont unitaires, c'est-à-dire vérifie $q(v) = 1$.*

Proposition 16 *Tout produit scalaire φ pseudo-euclidien admet une base orthonormale.*

Démonstration. Nous savons qu'il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ formée de vecteurs non isotropes $q(e_i) \neq 0$ pour $i = 1, \cdots, n$. Considérons les vecteurs

$$e_i' = \frac{e_i}{\sqrt{q(e_i)}}$$

si $q(e_i) > 0$ ou

$$e_i' = \frac{e_i}{\sqrt{-q(e_i)}}$$

si $q(e_i) < 0$. Alors $\{e_1', \cdots, e_n'\}$ est orthonormale.

Dans une base orthonormée, quitte à réordonner l'ordre des vecteurs, la matrice de φ esr diagonale et s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

où $(p, n-p)$ est la signature de q et I_p la matrice identité d'ordre p. Dans cette base, l'expression analytique de q est

$$q(v) = (x^1)^2 + \cdots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \cdots - (x^n)^2.$$

4.1.3 Sous-espaces dégénérées

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'un produit scalaire φ pseudo-euclidien.

Définition 29 *Un sous espace vectoriel F de E est dit non dégénéré, si la restriction du produit scalaire φ à F est non dégénérée. Il est dit défini positif, si la restriction est définie positive.*

Un sous espace n'est pas nécessairement non dégénéré bien que φ le soit. Considérons par exemple le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\varphi(v, w) = x^1 y^1 - x^2 y^2.$$

Sa forme quadratique est $q(v) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. Le sous espace vectoriel d'équation $f(x^1, x^2) = x^1 + x^2 = 0$ est dégénéré. En effet tout vecteur de F s'écrit $v = (x^1, -x^1)$ et $q(v) = 0$. La restriction de φ à F est nulle. Le sous espace G d'équation $f(x^1, x^2) = x^2 = 0$ est non dégénéré. Par contre, on a

Proposition 17 *Si le produit scalaire φ est euclidien, tout sous espace vectoriel est défini positif.*

Démonstration. En effet, pour tout vecteur $v \in F$, $v \neq 0$, on a $q(v) > 0$ car q est définie positive.

Cette proposition se généralise au cas pseudo-euclidien

Proposition 18 *Soit φ un produit scalaire pseudo-euclidien de signature $(p, n-p)$. Alors tout sous espace défini positif est au plus de dimension p.*

Démonstration. Considérons une base orthonormale $\{e_1, \cdots, e_n\}$ par rapport à laquelle la matrice de φ est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Alors le sous espace engendré par $\{e_1, \cdots, e_p\}$ est défini positif. Supposons qu'il existe un sous espace F définie positif de dimension p' avec $p' > p$. Considérons le sous espace G de E engendré par les vecteurs $\{e_{p+1}, \cdots, e_n\}$. La restriction de φ à G est non dégénérée et de signature $(0, n-p)$ (G est défini négatif). Comme $p' + (n-p) = n + (p'-p) > n$, on en déduit que $F \cap G \neq \{0\}$. Ainsi, il existe un evcteur v non nul tel que $q(v) > 0$ car $v \in F$, et $q(v) < 0$ car $v \in G$. Ceci est impossible, donc $p' \leq p$.

4.1.4 Cône isotrope

Soit φ un produit scalaire pseudo-euclidien sur E et soit q sa forme quadratique. Le cône isotrope de q est l'ensemble

$$\mathcal{C}(q) = \{v \in E, \ q(v) = 0.$$

Rapportons nous à une base orthonormale. Alors , si q est de signature $(p, n-p)$, l'équation du cône isotrope est l'hypersurface algébrique qui a pour équation, l'équation polynomiale homogène du second degré :

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \cdots - (x^n)^2 = 0.$$

Si le produit scalaire est euclidien, alors $\mathcal{C}(q) = \{0\}$. Inversement $\mathcal{C}(q) = \{0\}$ implique que q est définie positive.

EXERCICE 4. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique

$$q(v) = x^2 - y^2.$$

Représenter le cône isotrope.

EXERCICE 5. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique

$$q(v) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Représenter le cône isotrope.

EXERCICE 6. Rappelons qu'un sous espace vectoriel de E est dit isotrope si tous ses éléments sont isotropes. Il est donc contenu dans le cõne isotrope. Si $(p, n-p)$ est la signature de q, montrer que tout sous espace isotrope est au plus de dimension $d = \inf(p, n-p)$. Montrer qu'il existe un espace isotrope de dimension $\inf(p, n-p)$.

4.2 Le groupe $O(p, n-p)$

4.2.1 Isométries d'un produit scalaire

Définition 30 *Soit φ un produit scalaire pseudo-euclidien sur l'espace vectoriel E. On appelle isométrie de φ, tout endomorphisme f de E conservant le produit scalaire, c'est-à-dire*

$$\varphi(f(v), f(w)) = \varphi(v, w)$$

pour tout $v, w \in E$.

Notons que tout isométrie est un isomorphisme de E. En effet, soit f une isométrie et soit $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors, pour tout vecteur $w \in E$, on a

$$\varphi(v, w) = \varphi(f(v), f(w)) = \varphi(0, f(w)) = 0.$$

Ainsi v est dans le noyau de φ. Mais un produit scalaire est non dégénéré, donc $v = 0$. Ainsi f est un endomorphisme injectif, il est bijectif.

Proposition 19 *Soit f un endomorphisme de E. Alors f est une isométrie pour le produit scalaire φ si et seulement si*

$$q(f(v)) = q(v)$$

pour tout $v \in E$, où q est la forme quadratique associée à φ.

Démonstration. Si f est une isométrie, alors

$$q(f(v)) = \varphi(f(v), f(v)) = \varphi(v, v) = q(v)$$

pour tout $v \in E$. Réciproquement, soit f un endomorphisme de E tels que $q(f(v)) = q(v)$ pour tout $v \in E$. Alors

$$\begin{array}{rcl} 2\varphi(f(v), f(w)) & = & q(f(v) + f(w)) - q(f(v)) - q(f(w)) \\ & = & q(f(v+w)) - q(f(v)) - q(f(w)) \\ & = & q(v+w) - q(v) - q(w) \\ & = & 2\varphi(v, w). \end{array}$$

Ainsi f est une isométrie.

EXERCICE 7. Déterminer les valeurs propres d'une isométrie.

EXERCICE 8. Montrer que l'ensemble des isométries de φ est un groupe, que l'on notera $O(E, \varphi)$, appelé le groupe orthogonal de E pour le produit scalaire φ.

4.2.2 Matrices d'une isométrie relatives à une base orthonormale

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale pour φ. Supposons que la signature de la forme quadratique associée q soit égale à $(p, n-p)$, n étant la dimension de E. Alors, relativement à cette base, la matrice de φ est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Nous noterons cette matrice $I_{p,n-p}$. Dans cette base, l'expression analytique de φ est

$$\varphi(v, w) = {}^tVI_{p,n-p}W$$

où V et W sont les matrices colonnes des coordonnées de v et w relatives à la base $\mathcal{B}$. Soit f une isométrie pour φ et notons par M la matrice de f relative à $\mathcal{B}$. Alors

$$\varphi(f(v), f(w)) = {}^t(MV)I_{p,n-p}MW = {}^tV{}^tMI_{p,n-p}MW = {}^tVI_{p,n-p}W.$$

On en déduit que M vérifie l'équation matricielle

$${}^tMI_{p,n-p}M = I_{p,n-p}.$$

Proposition 20 *L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n vérifiant*

$${}^tMI_{p,n-p}M = I_{p,n-p}$$

est un groupe, que l'on notera $O(p, n-p)$

Démonstration. Comme toute isométrie est un isomorphisme, toute matrice de $O(p, n-p)$ est inversible. On vérifie sans peine que le produit de deux matrices de $O(p, n-p)$ est encore dans $O(p, n-p)$. Ainsi $O(p, n-p)$ est un sous groupe du groupe linéaire $GL(n, \mathbb{R})$.

EXERCICE 9. Soit φ un produit scalaire sur E dont la forme quadratique est de signature $(p, n-p)$. Montrer que les groupes $O(E, \varphi)$ et $O(p, n-p)$ sont isomorphes.

Remarque. Si φ est un produit scalaire euclidien, la signature de la forme quadratique associée est égale à $(n, 0)$ et $O(E, \varphi)$ est alors isomorphe à $O(n, 0)$ que l'on note classiquement $O(n)$. Il est appelé le groupe orthogonal. Il est constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices carrées d'ordre n vérifiant

$${}^tMM = I.$$

Théorème 18 *Soit φ un produit scalaire pseudo-euclidien sur E. Alors un endomorphisme de E est une isométrie de φ si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale pour φ est une base orthonormale pour φ respectant le carré des éléments.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale pour φ. Si f est une isométrie, alors f est un isomorphisme, $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ est une base de E vérifiant

$$\varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j).$$

Donc $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ est une base orthonormale. Réciproquement, si l'image de $\mathcal{B}$ par l'endomorphisme f est une base orthonormale, alors f est un isomorphisme et la matrice M' de φ dans la base $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ vérifie

$$M' = {}^tPMP$$

où M est la matrice de φ relative à $\mathcal{B}$. Nous pouvons supposer que $M = I_{p,n-p}$. Comme la nouvelle base $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ reespectent le carré des éléments de $\{e_1, \cdots, e_n\}$, c'est-à-dire

$$q(f(e_i)) = q(e_i)$$

alors $M' = I_{p,q}$. On en déduit

$${}^tPI_{p,n-p}P = I_{p,n-p}$$

et f est une isométrie.

4.2.3 La structure du groupe $O(p, n-p)$

Si $M \in O(p, n-p)$ alors

$${}^tMI_{p,n-p}M = I_{p,n-p}.$$

On en déduit

$$(\det M)^2 = 1.$$

Ainsi toute matrice de $O(p, n-p)$ est de déterminant égal à $+1$ ou -1.

Proposition 21 *Le sous ensemble $SO(p, n-p)$ formé des matrices de $O(p, n-p)$ de déterminant 1 est un sous groupe de $O(p, n-p)$.*

Démonstration. Ceci est évident car le produit de deux matrices de déterminant 1 est de déterminant 1.

Remarque. Le groupe $O(p, n-p)$ est un groupe topologique. Ceci signifie que l'on peut mettre sur ce groupe une topologie pour laquelle la multiplication des matrices que l'on peut voir comme une application de $O(p, n-p) \times O(p, n-p)$ dans $O(p, n-p)$ est contine. Les groupes $O(p, n-p)$ ne sont pas connexes. Il existe un sous groupe connexe remarquable qui est la composante connexe passant par l'identité. Cette composante connexe ne contient que des matrices de déterminant 1 mais n'est pas nécessairement égale à $SO(p, n-p)$. On note ce sous groupe connexe par $SO_0(p, n-p)$ et est appelé parfois le groupe orthochrone, vocabulaire issu de la mécanique relativiste. Dans ce qui suit, nous allons décrire ces composantes pour $n = 2$, et donc des groupes $O(2)$ et $O(1,1)$.

4.2.4 Le groupe $O(2)$

Soit $M \in O(2)$. Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la relation ${}^tMM = I$ est équivalente au système algébrique

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0. \end{cases}$$

Il existe θ_1 et θ_2 tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = \cos\theta_1 & c = \sin\theta_1 \\ b = \cos\theta_2 & d = \sin\theta_2. \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'équation $ab + cd = 0$. Elle est équivalente à

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 = 0$$

soit

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Ainsi, on a

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou bien

$$\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Dans le premier cas on obtient

$$b = \cos(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta_1, \quad d = \sin(\theta_1 - \frac{\pi}{2}) = -\cos\theta_1$$

et

$$M = \left(\begin{array}{ll} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{array} \right)$$

et dans le deuxième cas on obtient

$$b = \cos(\theta_1 + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta_1, \quad d = \sin(\theta_1 + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta_1$$

et

$$M = \left(\begin{array}{ll} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{array} \right).$$

Notons par $SO(2)$ l'ensemble des matrices

$$SO(2) = \{M = \left(\begin{array}{ll} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{array} \right)\}$$

et par $0_-(2)$ l'ensemble des matrices

$$0_-(2) = \{M = \left(\begin{array}{ll} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{array} \right)\}.$$

Alors

$$O(2) = SO(2) \bigcup 0_-(2)$$

et $O(2)$ est un groupe non connexe contenant deux composantes connexes. la composantes connexes passant par l'élément neutre est $SO(2)$ et l'on a

$$SO(2) = \{M \in O(2), \ \det M = 1\}.$$

Toute matrice de $SO(2)$ est la matrice d'une rotation vectorielle, qui est bien une isométrie du plan pour le produit scalaire euclidien canonique. La composnate $O_-(2)$ correspond à

$$O_-(2) = \{M \in O(2), \ \det M = -1\}$$

Ceci n'est pas un sous groupe de $O(2)$ mais une composnate connexe. Les éléments de $O_-(2)$ sont des composés d'une rotation et d'une symétrie, ces deux transformantions commutant. En effet, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : le groupe $O(n)$ On peut montrer que plus généralement $O(n)$ est un groupe ayant deux composantes connexes :

$$O(n) = SO(n) \bigcup O_-(n)$$

avec

$$SO(n) = \{M \in O(n),\ \det M = 1\}$$

et

$$O_-(n) = \{M \in O(n),\ \det M = -1\}.$$

Le sous groupe $SO(n)$ est connexe et correspond à la composante connexe de $O(n)$ passant par l'élément neutre. Il est appelé le groupe spécial orthogonal.

4.2.5 Le groupe $O(1,1)$

Soit $M \in O(1,1)$. Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la relation ${}^t M I_{1,1} M = I_{1,1}$ est équivalente au système algébrique

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = -1 \\ ab - cd = 0. \end{cases}$$

1. Premier cas : $a \geq 0$, $d \geq 0$.
   Il existe α et β tels que

   $$\begin{cases} a = \cosh\alpha & c = \sinh\alpha \\ d = \cosh\beta & b = \sinh\beta. \end{cases}$$

   L'équation $ab - cd = 0.$ est équivalente à

   $$\cosh\alpha \sinh\beta - \sinh\alpha \cosh\beta = 0$$

   soit

   $$\sinh(\beta - \alpha) = 0.$$

   Ainsi, on a

   $$\beta = \alpha$$

   et

   $$M = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

2. Deuxième cas : $a \geq 0$, $d \leq 0$.
   Il existe α et β tels que
$$\begin{cases} a = \cosh\alpha & c = \sinh\alpha \\ d = -\cosh\beta & b = \sinh\beta. \end{cases}$$
   L'équation $ab - cd = 0$. est équivalente à
$$\cosh\alpha\sinh\beta + \sinh\alpha\cosh\beta = 0$$
   soit
$$\sinh(\beta+\alpha) = 0.$$
   Ainsi, on a
$$\beta = -\alpha$$
   et
$$M = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{pmatrix}$$
3. Troisème cas : $a \leq 0$, $d \geq 0$.
   Il existe α et β tels que
$$\begin{cases} a = -\cosh\alpha & c = \sinh\alpha \\ d = \cosh\beta & b = \sinh\beta. \end{cases}$$
   L'équation $ab - cd = 0$. est équivalente à
$$-\cosh\alpha\sinh\beta - \sinh\alpha\cosh\beta = 0$$
   soit
$$\sinh(\beta+\alpha) = 0.$$
   Ainsi, on a
$$\beta = -\alpha$$
   et
$$M = \begin{pmatrix} -\cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$
4. Quatrième cas : $a \leq 0$, $d \leq 0$.
   Il existe α et β tels que
$$\begin{cases} a = -\cosh\alpha & c = \sinh\alpha \\ d = -\cosh\beta & b = \sinh\beta. \end{cases}$$
   L'équation $ab - cd = 0$. est équivalente à
$$-\cosh\alpha\sinh\beta + \sinh\alpha\cosh\beta = 0$$
   soit
$$\sinh(\alpha-\beta) = 0.$$
   Ainsi, on a
$$\beta = \alpha$$
   et
$$M = \begin{pmatrix} -\cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{pmatrix}$$

Il est clair que toute matrice de $O(1,1)$ est de déterminant égal à $+1$ ou à -1. Notons par $SO(1,1)$ l'ensemble des matrices de $O(1,1)$ de déterminant 1. C'est un sous groupe de $O(1,1)$ mais contrairement au cas précédent, il n'est pas connexe. Il s'écrit

$$SO(1,1) = SO_0(1,1) \bigcup SO_1(1,1)$$

avec

$$SO_0(1,1) = \{M = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\}$$

et

$$SO_1(1,1) = \{M = \begin{pmatrix} -\cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{pmatrix}\}.$$

La composante connexe passant par l'élément neutre est le sous groupe $SO_0(1,1)$. Notons par $O_-(1,1)$ le sous ensemble de $O(1,1)$ constitué des matrices de $O(1,1)$ de déterminant -1. Ce n'est pas un sous groupe de $O(1,1)$ mais il est constitué de deux composantes connexes :

$$O_-(1,1) = O_{-,0}(1,1) \bigcap O_{-,1}(1,1)$$

avec

$$O_{-,0}(1,1) = \{M = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{pmatrix}\}$$

et

$$O_{-,1}(1,1) = \{M = \begin{pmatrix} -\cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\}.$$

On en déduit que $O(1,1)$ admet quatre composantes connexes.

Remarque : le groupe $O(p, n-p)$ Lorsque $n = 4$ et $p = 3$, ce groupe est appelé le groupe de Lorentz. Dans tous les cas, il est composé de quatre composantes connexes et la composante passant par l'élément neutre est un sous groupe de $SO(p, n-p)$.

> **EXERCICE 10.** Montrer que $O(p, n-p)$ contient un sous groupe isomorphe à $O(p) \times O(q)$ et que sa composante connexe passant par l'identité, $SO_0(p,q)$ contient un sous groupe isomorphe à $SO(p) \times SO(q)$.

Chapitre 5

Applications multilinéaires et tenseurs

5.1 Applications multilinéaires

5.1.1 Définition

Soient $E_1, \cdots, E_m$ et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Définition 31 *Une application*

$$\Phi : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$$

est multilinéaire si elle est linéaire sur chaque argument, c'est-à-dire si pour tout $j = 1, \cdots, m$

$$\Phi(v_1, \cdots, \alpha v_j + \beta v'_j, \cdots, v_m) = \alpha \Phi(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_m) + \beta \Phi(v_1, \cdots, v'_j, \cdots, v_m)$$

pour tout vecteurs $v_i \in E_i, v'_j \in E_j, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

On notera par $\mathcal{L}(E_1, E_2, \cdots, E_m; F)$ l'ensemble de telles applications multilinéaires. Tout élément $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, E_2, \cdots, E_m; F)$ ayant m argments sera aussi appelée application m-linéaire. Pour $m = 2$, on parlera d'application bilinéaire, pour $m = 3$, on parlera aussi d'application trilinéaire.

Exemples

1. Supposons que chacun des espaces E_i soit égal à $\mathbb{K}^m$ et soit $F = \mathbb{K}$. Considérons l'application

$$\Phi : (\mathbb{K}^n)^m \to \mathbb{K}$$

   donnée par

$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = \det(a_i^j)$$

   où $v_i = (a_i^1, a_i^2, \cdots, a_i^m)$. Cette application est multilinéaire.

2. Soient $E_1, = E_2 = \cdots = E_m = \mathbb{K}^n$ avec $m \leq n$. Soit ω une suite strictement croissante de longueur m d'entiers compris entre 1 et n :
$$1 \leq \omega(1)n \leq \omega(2) \leq \cdots \leq \omega(m) \leq n.$$
On note par $Q(m,n)$ l'ensemble de ces suites et on l'ordonne par la relation d'ordre lexicographique. Si X est une matrice à m lignes et n colonnes, considérons les sous-matrices sonstituées des m lignes et des colonnes $\omega(1), \cdots, \omega(m)$. Une telle matrice sera notée $X[1,\cdots,m;\omega]$. Ceci 'tant, soient $v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Notons par X la matrice $n \times m$ des coordonnées. L'application
$$\Phi : (\mathbb{K}^m)^n \to \mathbb{K}^{C(n,m)}$$
où $C(n,m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ donnée par
$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = u$$
où u est le $C(n,m)$-uple dans $\mathbb{K}^{C(n,m)}$ dont les coordonnées ordonnées lexicographiquement sont les $X[1,\cdots,m;\omega]$, $\omega \in Q(m,n)$ est n-linéaire.

Proposition 22 *L'ensemble $\mathcal{L}(E_1, E_2, \cdots, E_m; F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Si chacun des E_i est de dimension finie n_i et si F est de dimension p, alors $\mathcal{L}(E_1, E_2, \cdots, E_m; F)$ est de dimension finie et on a*
$$\dim \mathcal{L}(E_1, E_2, \cdots, E_m; F) = pn_1n_2\cdots n_m.$$

Démonstration Posons $dimE_i = n_i$ pour $i = 1, \cdots, m$. Considérons une base $\{e_{(i),1}, e_{i,2}, \cdots, e_{(i),n_i}\}$ une base de E_i pour chaque $i, i = 1, \cdots, m$ et soit $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$ une base de F. Nous avons écrit les vecteurs de la base de E_i sous la forme $e_{(i),j}$, l'indice parenthésé (i) n'est pas en fait un véritable indice, il indique le numéro de l'espace vectoriel qui le contient.L'application Φ est donc déterminée par les composantes sur la base $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$ des vecteurs $\Phi(e_{(1),i_1}, e_{(2),i_2}, \cdots, e_{(m),i_m})$ lorsque $1 \leq i_1 \leq n_1, \cdots, 1 \leq i_m \leq n_m$. En effet considérons des vecteurs $v_i \in E_i$. Ils se décomposent
$$v_i = \sum_{j_i=1}^{n_i} x_{(i)}^{j_i} e_{(i),j_i}.$$
On a donc
$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{j_m=1}^{n_m} x_{(1)}^{j_1} \cdots x_{(m)}^{j_m} \Phi(e_{(1),j_1}, \cdots, e_{(m),j_m}).$$
(On commence à comprendre ici l'intérêt de la convention d'Einstein et le fait que les indices parenthésés ne sont pas de "véritables" indices. Dans l'écriture conventionnée on aurait
$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = x_{(1)}^{j_1} \cdots x_{(m)}^{j_m} \Phi(e_{(1),j_1}, \cdots, e_{(m),j_m})$$
qui est une écriture un peu moins lourde. Dès la fin de cette démonstration, nous ne garderons que l'écriture conventionnée.) Chacun de ces vecteurs $\Phi(e_{(1),j_1}, \cdots, e_{(m),j_m})$ est dans F, il a p composantes :
$$\Phi(e_{(1),j_1}, \cdots, e_{(m),j_m}) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_1,\cdots,j_m}^k f_k$$
où $\{f_1, \cdots, f_p\}$ est une base de F. et on a $n_1.n_2 \cdots n_m$ vecteurs. D'où la proposition.

Notons que l'écriture analytique de Φ relative aux bases choisies est, dans une écriture conventionnée,

$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = x_{(1)}^{j_1} \cdots x_{(m)}^{j_m} \alpha_{j_1,\cdots,j_m}^k f_k$$

et donc s'écrit comme un système de p polynômes homogènes de degré m en les composantes des vecteurs v_i et linéaire en les composantes de chacun des vecteurs.

EXERCICE 1. Montrer que les espaces vectoriels suivants

$$\mathcal{L}(E_1, E_2; F),\ \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2; F)),\ \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_1; F))$$

sont isomorphes, où $\mathcal{L}(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires de E dans F.

EXERCICE 2. Etant donnés deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$, montrer que l'application

$$\Phi :\ \mathcal{L}(E, F) \times E \to F$$

donnée par

$$\Phi(f, v) = f(v)$$

est bilinéaire.

Théorème 19 *Soient* $E_1, \cdots, E_m, F$ *des espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$ *de dimension finie. Soit* $\{e_{(i),1}, e_{i,2}, \cdots, e_{(i),n_i}\}$ *une base de* E_i *pour chaque* $i, i = 1, \cdots, m$ *et soit* $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$ *une base de* F*.Pour qu'une application*

$$\Phi : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$$

soit multilinéaire, il faut et il suffit qu'il existe des vecteurs $c_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ *de* F *avec* $1 \leq j_1 \leq n_1 \cdots 1 \leq j_m \leq n_m$*, tels que l'on ait*

$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = x_{(1)}^{j_1} \cdots x_{(m)}^{j_m} c_{j_1 j_2 \cdots j_m}$$

quels que soient les vecteurs

$$v_1 = x_{(1)}^{j_1} e_{(1),j_1} \in E_1, \cdots, v_m = x_{(m)}^{j_m} e_{(m),j_m} \in E_m.$$

Démonstration. Nous avons vu précédemment que si Φ est multilinéaire, alors son expression analytique dans les bases considérées était

$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = x_{(1)}^{j_1} \cdots x_{(m)}^{j_m} \Phi(e_{(1),j_1}, \cdots, e_{(m),j_m}).$$

Posons

$$c_{j_1 j_2 \cdots j_m} = \Phi(e_{(1),j_1}, \cdots, e_{(m),j_m}).$$

On obtient l'expression désirée. Réciproquement, montrons que

$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = x_{(1)}^{j_1} \cdots x_{(m)}^{j_m} c_{j_1 j_2 \cdots j_m}$$

représente une application multilinéaire. Considérons l'application

$$\Pi_{j_1 j_2 \cdots j_m} : E_1 \times \cdots \times E_m \to \mathbb{K}$$

donnée par

$$\Pi_{j_1 j_2 \cdots j_m}(v_1, \cdots, v_m) = x_{(1)}^{j_1} \cdots x_{(m)}^{j_m}.$$

Il est clair que cette application à valeur dans $\mathbb{K}$ est m-linéaire. Comme

$$\Phi(v_1, \cdots, v_m) = \Pi_{j_1 j_2 \cdots j_m}(v_1, \cdots, v_m) c_{j_1 j_2 \cdots j_m},$$

l'application Φ est m-linéaire. De plus, on a

$$c_{j_1 j_2 \cdots j_m} = \Phi(e_{(1),j_1}, \cdots, e_{(m),j_m}).$$

Remarque. Les vecteurs $c_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ de F s'appellent les coefficients de Φ par rapport aux bases données $\{e_{(i),1}, e_{i,2}, \cdots, e_{(i),n_i}\}$ de E_i. Ils dépendent, bien entendu, des bases choisies.

EXERCICE 3. On considère de nouvelles bases $\{e'_{(i),1}, e'_{i,2}, \cdots, e'_{(i),n_i}\}$ de E_i. Soient $c'_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ les coefficients correspondants. Ecrire la relation entre les coefficients $c'_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ et $c_{j_1 j_2 \cdots j_m}$.

5.1.2 Formes multilinéaires

Une forme multilinéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_m$ est une application multilinéaire à valeurs dans le corps de base $\mathbb{K}$.

Exemple fondamental. Soient E_i^* les espaces vectoriels duaux des espaces E_i. Pour chaque i, $i = 1, \cdots, m$, soit $f_i \in E_i^*$. Considérons l'application

$$\Psi : E_1 \times \cdots \times E_m \to \mathbb{K}$$

définie par

$$\Psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = f_1(v_1) \cdot f_2(v_2) \cdots f_m(v_m).$$

C' est une forme multilinéaire. On la notera $\prod_{i=1}^{m} f_i$.

Notons par Ξ l'ensemble des m-uples d'entiers $(l_1, \cdots, l_m)$ tels que

$$1 \leq l_1 \leq n_1, 1 \leq l_2 \leq n_2, \cdots, 1 \leq l_m \leq n_m.$$

Théorème 20 *Soit $\{f_{i,1}, f_{i,2}, \cdots, f_{i,n_i}\}$ une base de l'espace vectoriel dual E_i^* pour $i = 1, \cdots, m$. Alors les formes linéaires*

$$\Psi_\lambda = \prod_{i=1}^{m} f_{i,\lambda(i)}$$

où $\lambda \in \Xi$ et où $\lambda(i)$ désigne l'entier placé en position i dans la suite λ forment une base de $\mathcal{L}(E_1, E_2, \cdots, E_m; \mathbb{K})$.

Démonstration Soit $\{e_{i,1}, \cdots, e_{i,n_i}\}$ la base de E_i dont $\{f_{i,1}, f_{i,2}, \cdots, f_{i,n_i}\}$ en est la base duale. On a alors

$$\Psi_\lambda(e_{1,\lambda(1)}, e_{2,\lambda(2)}, \cdots, e_{m,\lambda(m)}) = 1$$

et

$$\Psi_\lambda(e_{1,\lambda'(1)}, e_{2,\lambda'(2)}, \cdots, e_{m,\lambda'(m)}) = 0$$

dès que $\lambda \neq \lambda'$ dans Ξ. Comme toute forme multilinéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_m$ est entièrement déterminée par ses images des vecteurs de bases, on en déduit que la famille des formes Ψ_λ, lorsque λ parcourt Ξ est génératrice. Cette famille compte autant déléments que Ξ c'est à dire $n_1.n_2 \cdots n_m$. Elle est donc minimale et c'est une base.

EXERCICE 4 Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.

1. $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) = x_1 + y_2 + z_3$
2. $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
3. $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$
4. $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$
5. $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$
6. $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$
7. $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

EXERCICE 5 Une forme trilinéaire sur $E \times E \times E$ est dite alternée si elle vérifie

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma)\Phi(v_1, v_2, v_3)$$

pour tout $(v_1, v_2, v_3) \in E^3$ et tout $\sigma \in \Sigma_3$, le groupe symétrique de degré 3. Dans cette formule $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. Donner toutes les formes trilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, que dire des formes m-linéaires alternées sur un espace de dimension n lorsque $m > n$?

EXERCICE 6 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$\Phi_A : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\Phi_A(C_1, ..., C_n) = \det(AM)$$

où M est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $C_1, ..., C_n$.

1. Montrer que Φ_A est n-linéaire.
2. Montrer que Φ_A est alternée.
3. Montrer que $\Phi_A(M) = \det(A)\det(M)$.
4. En déduire que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \qquad \det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B).$$

5.2 Applications multilinéaires alternées sur E

5.2.1 Applications bilinéaires alternées

Soient E et F des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

Définition 32 *Une application bilinéaire*

$$\Phi : E \times E \to F$$

est dite alternée, si pour tout vecteur $v \in E$, on a

$$\Phi(v, v) = 0.$$

La caractérisation suivante des applications bilinéaires alternées tient compte du fait que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0 (plus précisément différente de 2).

Proposition 23 *Une forme bilinéaire $\phi : E \times E \to F$ est alternée si et seulement si elle vérifie*

$$\Phi(v, w) = 0$$

pour tout $v, w \in E$.

Démonstration. En effet supposons que l'application bilinéaire Φ soit alternée. Comme Φ est bilnéaire, alors pour tout vecteur v, w dans E, on a

$$\Phi(v + w, v + w) = \Phi(v, v) + \Phi(w, w) + \Phi(v, w) + \Phi(w, v).$$

Comme Phi est alternée, on déduit

$$0 = \Phi(v, w) + \Phi(w, v).$$

Réciproquement, l'identité $0 = \Phi(v, w) + \Phi(w, v)$ implique

$$2\Phi(v, v) = 0.$$

Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0, alors $\Phi(v, v) = 0$ pour tout vecteur $v \in E$, et Φ est alternée.

EXERCICE 7

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\Phi(v, w) = v \wedge w$$

   où $v \wedge w$ désigne le produit vectoriel, est bilinéaire alternée.
2. Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in E^*$. Montrer que l'application $f \wedge g : E \times E \to \mathbb{K}$ donnée par

$$f \wedge g(v, w) = f(v)g(w) - f(w)g(v)$$

   pour tout $v, w \in E$ est bilinéaire alternée.

Intéressons nous à l'expression analytique d'une application bilinéaire alternée relative à une base de E. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Si

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \; w = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j$$

sont deux vecteurs de E, alors la forme bilinéaire alternée Φ s'écrit

$$\varphi(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \Phi(e_i, e_j).$$

Posons $c_{i,j} = \Phi(e_i, e_j)$. Ces vecteurs de F sont les coefficients de Φ et comme Φ est alternée, ils vérifient

$$\begin{cases} c_{ii} = 0, \\ c_{ij} + c_{ji} = 0 \end{cases}$$

pour tout $i, j = 1, \cdots, n$. On en déduit

$$\Phi(v,w) = \sum_{i<j} (x^i y^j - x^j y^i) c_{ij}.$$

Application : cas où $E = \mathbb{K}^2$. Supposons que E soit de dimension 2 et soit

$$\Phi : E \times E \to \mathbb{K}$$

une forme (car Φ est à valeurs dans $\mathbb{K}$) bilinéaire alternée. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E. Alors, relativement à cette base, on a

$$\Phi(v,w) = (x^1 y^2 - x^2 y^1) \Phi(e_1, e_2).$$

Considérons la forme bilinéaire $D_{\mathcal{B}}$ définie par

$$D_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1$$

soit

$$D_{\mathcal{B}}(v,w) = x^1 y^2 - x^2 y^1.$$

On a alors

$$\Phi = \Phi(e_1, e_2) D_{\mathcal{B}}.$$

Ainsi toute forme bilinéaire alternéee sur E est proportionnelle à $D_{mathcalB}$. On dira que $D_{\mathcal{B}}$ est le déterminant de deux vecteurs de E relatif à la base $D_{\mathcal{B}}$. Si nous considérons le cas particulier $E = \mathbb{K}^2$, alors, si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ est la base canonique, on aura

$$D(e_1, e_2) = 1$$

et pour tout vecteur $v(x^1, x^2)$ et $w = (y^1, y^2)$ de $\mathbb{K}^2$,

$$D(v,w) = x^1 y^2 - x^2 y^1$$

c'est-à-dire D est le déterminant des vecteurs v et w de $\mathbb{K}^2$.

EXERCICE 8 Montrer que toute applicationsbilinéaires alternées sur un espace de dimension 1 est nulle.

EXERCICE 9 Donner l'expression analytique d'une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ relative à la base orthonormée classique. En déduire pour toute forme bilinéaire alternéee ϕ sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(v,w) = < u, v \wedge w >$$

pour tout $v, w \in \mathbb{R}^3$, où $< \, , \, >$ désigne le produit scalaire euclidien classique.

5.2.2 Applications trilinéaires alternées

Soient E et F des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

Définition 33 *Une application trilinéaire*

$$\Phi : E \times E \times E \to F$$

est dite alternée, si $\Phi(v_1, v_2, v_3) = 0$ dès que deux vecteurs parmi v_1, v_2, v_3 sont égaux.

Ceci signifie que l'on a

$$\Phi(v_1, v_1, v_3) = \Phi(v_1, v_2, v_2) = \Phi(v_1, v_2, v_1) = 0$$

pour tout $v_1, v_2 \in E$. On en déduit

$$\Phi(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3) = 0 = \Phi(v_1, v_2, v_3) + \Phi(v_2, v_1, v_3).$$

D'où les identités, lorqu'on procède de même sur chaque couple d'arguments :

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = -\Phi(v_2, v_1, v_3) = -\Phi(v_1, v_3, v_2) = -\Phi(v_3, v_2, v_1)$$

pour tout vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in E$. Ceci implique aussi

$$\Phi(v_2, v_1, v_3) = -\Phi(v_2, v_3, v_1) = -\Phi(v_3, v_1, v_2).$$

Pour résumer ces relations, considérons le groupe alterné Σ_3 de degré 3. Ses éléments sont les permutations de $(1, 2, 3)$:

$$\Sigma_3 = \{Id, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, c, c^2\}$$

où τ_{ij} est la transposition permutant les éléments i et j, c la permutation cyclique $c(1) = 2, c(2) = 3, c(3) = 1$ et $c^2 = c \circ c$. Les relations ci-dessus peuvent se résumer en écrivant

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(v_1, v_2, v_3)$$

pour tout vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in E$

Proposition 24 *Une application trilinéaire*

$$\Phi : E \times E \times E \to F$$

est alternée si et seulement si

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(v_1, v_2, v_3)$$

pour tout $v_1, v_2, v_3 \in E$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_3$, où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

Remarque : Formes antisymétriques. Soit ϕ une forme trilinéaire sur E, ou plus généralement une forme multilinéaire

$$\Phi : E^n \to \mathbb{K}$$

sur E. Elle est appelée antisymétrique si

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

pour tout $v_1, \cdots, v_p \in E$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_p$ le groupe symétrique de degré p. Nous avons donc montré que toute forme bilinéaire ou trilinéaire alternée est antisymétrique et réciproquement. Il n'y a pas lieu, à priori de distinguer ces deux notions, mais ces deux notions ne sont plus équivalentes lorsque la caractériqtique du corps de base est égale à 2. Donc nous conserverons les deux définitions.

Proposition 25 *Soit Φ une forme trilinéaire sur E. Alors la forme trilinéaire Φ_a définie par*

$$\Phi_a(v_1, v_2, v_3) = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \epsilon(\sigma)\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)})$$

est ontisymétrique.

Démonstration. Ceci se voit immédiatement.

EXERCICE 10 Une forme p-linéaire est dite symétrique si

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) = \Phi(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

pour tout $v_1, \cdots, v_p \in E$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_p$. Montrer que toute forme bilinéaire est la somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique.
En est-il de même pour les formes trilinéaires ?

EXERCICE 11 Soit ϕ une forme bilinéaire sur E et soit $f \in E^*$.

1. Montrer que la forme $f \wedge \phi$ donnée par

$$(f \wedge \phi)(v_1, v_2, v_3) = f(v_1)\phi(v_2, v_3) + f(v_2)\phi(v_3, v_1) + f(v_3)\phi(v_1, v_2)$$

est trilinéaire alternée.

2. On définit de même $\phi \wedge f$ par

$$(\phi \wedge f)(v_1, v_2, v_3) = \phi(v_1, v_2)f(v_3) + \phi(v_2, v_3)f(v_1) + \phi(v_3, v_1)f(v_2).$$

Montrer que

$$f \wedge \phi = \Phi \wedge f.$$

Considérons une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E. Soient

$$v_1 = x^i e_i, \ v_2 = y^i e_i, \ v_3 = z^i e_i$$

trois vecteurs quelconques de E écrits avec la convention d'Einstein. Soit ϕ une forme trilinéaire alternée sur E. On a

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = x^i y^j z^k \Phi(e_i, e_j, e_k).$$

Posons

$$c_{ijk} = \Phi(e_i, e_j, e_k).$$

Comme Φ est alternée, on a

$$c_{ijk} = -c_{jik} = -c_{kji} = -c_{ikj} = c_{jki} = c_{kij}.$$

Ainsi

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} c_{ijk}(x^i y^j z^k - x^j y^i z^k - x^k y^j z^i - x^i y^k z^j + x^j y^k z^i + x^k y^i z^j).$$

EXERCICE 12 Montrer que toute forme trilinéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension 2 est nulle.

Application : cas où $E = \mathbb{K}^3$ Soit $\Phi : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ une forme trilinéaire sur $\mathbb{K}^3$. Si $v_1 = x^i e_i,\ v_2 = y^i e_i,\ v_3 = z^i e_i$ sont des vecteurs de $\mathbb{K}^3$, alors

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = (x^1 y^2 z^3 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1 - x^1 y^3 z^2 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2)\Phi(e_1, e_2, e_3).$$

Considérons la forme trilinéaire alternée D_3 définie par

$$D_3(e_1, e_2, e_3) = 1.$$

On en déduit

$$D_3(v_1, v_2, v_3) = (x^1 y^2 z^3 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1 - x^1 y^3 z^2 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2)$$

et par conséquent

$$\Phi = \Phi(e_1, e_2, e_3) D_3.$$

L'expression

$$D_3(v_1, v_2, v_3) = (x^1 y^2 z^3 - x^2 y^1 z^3 - x^3 y^2 z^1 - x^1 y^3 z^2 + x^2 y^3 z^1 + x^3 y^1 z^2)$$

est le déterminant des vecteurs (v_1, v_2, v_3) par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.

EXERCICE 13

1. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des formes trilinéaires alternées sur $\mathbb{K}^3$. Décrire une base.
2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des formes trilinéaires alternées sur $\mathbb{K}^4$. Décrire une base.

5.2.3 Applications multilinéaires alternées

Soient E et F des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.

Définition 34 *Une application p-linéaire*

$$\Phi : E^p \to F$$

est dite alternée, si $\Phi(v_1, v_2, \cdots, v_p) = 0$ *dès que deux vecteurs parmi les* $v_1, v_2, \cdots, v_p$ *sont égaux.*

Soit Σ_p le groupe symétrique de degré p, c'est-à-dire que le groupe des permutations de $(1, 2, \cdots, p)$. Une application p-linéaire Φ est dite antisymérique si elle vérifie

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

pour tout $v_1, v_2, \cdots, v_p \in E$ et pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

Proposition 26 *Une application p-linéaire*

$$\Phi : E^p \to F$$

est dite alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Démonstration. Supposons que Φ soit antisymétrique. Considérons une famille de vecteurs $\{v_1, \cdots, v_p\}$ tels qu'il existe deux indices i et j pour lesquels $v_i = v_j$. Considérons la transposition $\sigma = \tau_{ij}$ permutant les deux indices i et j. Alors

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(i)}, \cdots, v_{\sigma(j)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) = -\Phi(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_p).$$

Mais

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(i)}, \cdots, v_{\sigma(j)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) = \Phi(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_p)$$

et comme $v_i = v_j$,

$$\Phi(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_p) = -\Phi(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_p) = 0$$

et Φ est alternée. Réciproquement, supposons que la forme ϕ soit alternée. Pour montrer que Φ est antisymétrique, il suffit de montrer l'identité

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(v_1, v_2, \cdots, v_p)$$

pour toutes les transpositions. Considérons donc la transposition τ_{ij}. Comme

$$\Phi(v_1, \cdots, v_i + v_j \cdots, v_i + v_j, \cdots, v_p) = 0$$

on en déduit

$$\Phi(v_1, \cdots, v_i \cdots, v_j, \cdots, v_p) + \Phi(v_1, \cdots, v_j \cdots, v_i, \cdots, v_p)$$

et par conséquent

$$\Phi(v_1, \cdots, v_j \cdots, v_i, \cdots, v_p) = -\Phi(v_1, \cdots, v_i \cdots, v_j, \cdots, v_p) = \epsilon(\tau_{ij})\Phi(v_1, \cdots, v_i \cdots, v_j, \cdots, v_p).$$

La forme est donc antisymétrique.

Proposition 27 *Soit Φ une application p-linéaire sue l'espace vectoriel E. Alors la forme p-linéaire Φ_a définie par :*

$$\Phi_a(v_1, \cdots, v_p) = \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \epsilon(\sigma)\Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)})$$

où Σ_p désigne le groupe symétrique de degré p. est antisymétrique.

Démonstration. La démonstration est immédiate.

EXERCICE 14 On considère le groupe symétrique Σ_p. Soient m et n deux entiers tels que $m+n=p$. On appelle (m,n)-shuffle, une permutation σ de Σ_p telle que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(m)$$

et

$$\sigma(m+1) < \sigma(m+2) < \cdots < \sigma(m+n).$$

On note par $Sh(m,n)$ le sous-ensemble de Σ_p constitué des (m,n)-shuffles. Soit Φ une application p-linéaire sur E. Que peut-on dire de l'application p-linéaire $\Phi_{m,n}$ définie par :

$$\Phi_{m,n}(v_1,\cdots,v_p) = \sum_{\sigma \in Sh(m,n)} \epsilon(\sigma)\Phi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(p)}).$$

EXERCICE 15 Montrer que toute application p-linéaire altérnée sur une espace de dimension $n > p$ est nulle.

Application : formes p-linéaires alternées sur $\mathbb{K}^p$.

Soit $\Phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ un forme p-linéaire alternée. Considérons p vecteurs de $\mathbb{K}^p$ $v_1,\cdots,v_p$ et soit

$$v_i = x_i^j e_j$$

leur décomposition dans la base canonique. Alors

$$\Phi(v_1,\cdots,v_p) = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}\Phi(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_p})$$

Comme Φ est alternée si $\Phi(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_p}) \neq 0$ il existe une permutation σ qui a $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(p)) = (i_1,i_2,\cdots,i_p)$ ainsi

$$\Phi(v_1,\cdots,v_p) = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}\Phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\cdots,e_{\sigma(p)})$$

mais

$$\Phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\cdots,e_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(e_1,e_2,\cdots,e_p)$$

donc

$$\Phi(v_1,\cdots,v_p) = \epsilon(\sigma)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}\Phi(e_1,e_2,\cdots,e_p).$$

Il existe une unique forme p-linéaire alternée sur $\mathbb{K}^p$ telle que $D_p(e_1,e_2,\cdots,e_p)=1$. On en déduit que pour toute forme p-linéaire alternée Φ on a :

$$\Phi = \Phi(e_1,e_2,\cdots,e_p)D_p.$$

Ceci montre en particulier que l'espace des formes p-linéaires alternées sur $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel de dimension 1. La forme D_p est appelée le déterminant de p vecteurs relatifs à la base canonique $\{e_1,\cdots,e_p\}$. Il vérifie :

$$D(v_1,v_2,\cdots,v_p) = \epsilon(\sigma)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}.$$

EXERCICE 16 Donner l'expression analytique de D_4 et vérifier la formule classique donnant le déterminant d'ordre 4 en fonction de déterminants d'ordre 3 en développant suivant une ligne (ou une colonne) par la méthode des cofacteurs.

5.3 Formes multilinéaires sur $E^p \times (E^*)^q$ et tenseurs

5.3.1 Formes multilinéaires sur $E^p \times (E^*)^q$

On s'intéresse dans ce paragraphe aux formes n linéaires sur $E^p \times (E^*)^q$ avec $n = p + q$, où E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie m. On va noter par $\mathcal{L}_p^q(E)$ l'espace vectoriel initialement noté $\mathcal{L}(E^p, (E^*)^q; \mathbb{K})$ dont les éléments sont ces applications. Supposons ici que E est de dimension m, alors $\dim E^* = m$ et

$$\dim \mathcal{L}_p^q(E) = m^n.$$

On va appeler une telle forme linéaire un tenseur p-fois contravariant et q-fois covariant ou plus simplement un tenseur de type (p,q). Cette dénomination est ici un abus de language qui se justifiera à posteriori dans les chapitres suivants ou la notion de tenseurs sera introduite de manière axiomatique après avoir défini la notion de produit tensoriel entre espaces vectoriels et d'applications linaires sur ces espaces vectoriels.

Exemples.

1. Toute forme p-linéaire sur E est un tenseur de type $(p, 0)$.
2. Un élément du bidual $(E^*)^*$ est un tenseur de type $(0, 1)$. Mais comme nous supposons E de dimension finie les espaces E et $(E^*)^*$ sont canoniquement isomorphes ainsi chaque vecteur $v \in E$ s'identifie à un tenseur de type $(0, 1)$, c'est-à-dire à une forme linéaire sur E^* à savoir la forme linéaire
$$f \in E^* \to f(v) \in \mathbb{K}.$$
3. Tout produit scalaire sur E est un tenseur de type $(2, 0)$.

5.3.2 Ecriture dans une base d'un tenseur de type (p, q)

Soit $\{e_1, \cdots, e_m\}$ une base de E et soit $\{e^1, \cdots, e^m\}$ sa base duale. Si $\Phi \in \mathcal{L}_p^q(E)$ est un tenseur de type (p, q), il est entièrement déterminé par la suite des constantes

$$\Phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^{j_1}, \cdots, e^{j_q}) = C_{i_1, i_2, \cdots i_p}^{j_1, j_2, \cdots, j_q}$$

avec $i_1, \cdots, i_p \in \{1, \cdots, m\}$ et $j_1, \cdots, j_q \in \{1, \cdots, m\}$. Les constantes $C_{i_1, i_2, \cdots i_p}^{j_1, j_2, \cdots, j_q}$ sont appelées constantes de structures de Φ relatives à la base $\{e_1, \cdots, e_m\}$.

Considérons un changement de base

$$e'_j = \alpha_j^k e_k$$

si $e'^s = \beta_k^s e^k$ est le changement de base duale, rappelons que l'on a

$$Q =^t P^{-1}$$

où P est la matrice $P = (\alpha_j^k)$ et $Q = (\beta_j^k)$. Les constantes de structures

$$D_{i_1, i_2, \cdots i_p}^{j_1, j_2, \cdots, j_q} = \Phi(e'_{i_1}, \cdots, e'_{i_p}, e'^{j_1}, \cdots, e'^{j_q})$$

de Φ relative à la base $e'_1, \cdots, e'_m$ sont données par

$$D_{i_1, i_2, \cdots, i_p}^{j_1, j_2, \cdots, j_q} = \alpha_{i_1}^{k_1} \cdots \alpha_{i_p}^{k_p} \beta_{l_1}^{j_1} \cdots \beta_{l_q}^{j_q} C_{l_1, l_2, \cdots, l_q}^{k_1, k_2, \cdots, k_p}$$

pour tous $i_1, \cdots, i_p \in \{1, \cdots, m\}$ et $j_1, \cdots, j_q \in \{1, \cdots, m\}$.

Exemple. Considérons l'application

$$\Phi : E \times E^* \to \mathbb{K}$$

donnée par

$$\Phi(v, f) = f(v)$$

pour tout $v \in E$ et $f \in E^*$. Cette application est bilinéaire. Sa matrice dans une base $\{e_1, \cdots, e_m\}$ de E et sa base duale est la matrice identité. L'application bilinéaire Φ considérée comme un tenseur de type $(1, 1)$ a pour constantes de structures relative à la base $\{e_1, \cdots e_n\}$

$$C_i^j = \Phi(e_i, e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j$$

le symbole de Kronecker. Considérons une autre base $\{e'_1, \cdots, e'_m\}$ de E, on a

$$D_i^j = \Phi(e'_i, e'^j) = \alpha_i^k \beta_l^j C_k^l = \alpha_i^k \beta_k^j = \delta_i^j.$$

EXERCICE 17 On considère dans $\mathbb{R}^3$ le produit vectoriel.

1. Montrer que l'application bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ $\mu : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\mu(u, v) = u \wedge v$ définit de manière naturelle un tenseur sur $\mathbb{R}^3$ de type $(2, 1)$.
2. Considérer les constantes de structures dans la base canonique

EXERCICE 18 Considérons l'application

$$\Phi : E^2 \times (E^*)^2 \to \mathbb{K}$$

donnée par

$$\Phi(v_1, v_2, f_1, f_2) = f_1(v_1) f_2(v_2)$$

pour tout $v_1, v_2 \in E$ et $f_1, f_2 \in E^*$ est 4-linéaire. Calculer les constantes de structures.

5.3.3 Produit tensoriel de tenseurs

Considérons un tenseur Φ_1 sur E de type (p_1, q_1) et un tenseur Φ_2 sur E de type (p_2, q_2).

Définition 35 *On appelle produit tensoriel de Φ_1 par Φ_2 que l'on note $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ le tenseur sur E de type $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ défini par*

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2(v_1, \cdots, v_{p_1+p_2}, f^1, \cdots, f^{q_1+q_2}) = \Phi_1(v_1, \cdots, v_{p_1}, f^1, \cdots, f^{q_1}) \Phi_2(v_{p_1+1}, \cdots, v_{p_2}, f^{q_1+1}, \cdots, f^{q_2}).$$

Remarque. Notons que le produit tensoriel n'est pas commutatif. Prenons par exemple deux tenseurs Φ_1 et Φ_2 de type $(1, 0)$ c'est-à-dire deux formes linéaires sur E. Alors $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ et $\Phi_2 \otimes \Phi_1$ sont deux tenseurs de type $(2, 0)$ donnés par

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2(v_1, v_2) = \Phi_1(v_1) \Phi_2(v_2)$$

et

$$\Phi_2 \otimes \Phi_1(v_1, v_2) = \Phi_2(v_1) \Phi_1(v_2)$$

et ces deux expressions ne sont pas identiques.

Proposition 28 *Le produit tensoriel de tenseur est associatif c'est-à-dire*

$$(\Phi_1 \otimes \Phi_2) \otimes \Phi_3 = \Phi_1 \otimes (\Phi_2 \otimes \Phi_3)$$

Démonstration. La démonstration découle directement de la définition.

EXERCICE 19 On considère deux tenseurs Φ_1 et Φ_2 de type $(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$. On note par A_1 et A_2 les matrices de Φ_1 et Φ_2 relatives à la base canonique $\{e_i, e^j\}$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2*}$. Ecrire en fonction de A_1 et A_2 la matrice de $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ relative à la base canonique de $\mathbb{R}^4 \times R^{4*}$ identifié à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2*} \times \mathbb{R}^{2*}$.

EXERCICE 20 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On considère ϕ une application p-linéaire de E^p à valeurs dans E et ψ une application q-linéaire de E^q à valeurs dans E. On définit l'application $\phi \circ_1 \psi$ de E^{p+q-1} dans E par

$$\phi \circ_1 \psi(v_1, \cdots, v_{p+q-1}) = \phi(\psi(v_1, \cdots, v_q), v_{q+1}, \cdots, v_{p+q-1}).$$

1. Montrer que cette application est $(p+q-1)$-linéaire.
2. Déterminer le symétrisé et l'antisymétrisé de cette application.

Chapitre 6

Structures d'algèbres sur un espace vectoriel

6.1 Algèbres

6.1.1 Définition

Rappelons que les espaces vecoriels considérés sont sur des corps commutatifs de caractéristique 0.

Définition 36 *On appelle algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ tout couple (E, μ) formé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une application bilinéaire $\mu : E \times E \to E$ à valeur dans E.*

Ecrivons tout simplement $\mu(v, w) = v \cdot w$. Alors la bilinéarité de μ se traduit par :

$$\begin{cases} v \cdot (w_1 + w_2) = v \cdot w_1 + v \cdot w_2, \\ (v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w, \\ (av) \cdot w = v \cdot (aw) = a(v \cdot w), \end{cases}$$

pour tous $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in E$ et $a \in \mathbb{K}$. Ainsi $\mu(v, w) = v \cdot w$ défini une loi de composition interne, c'est-à-dire une multiplication, qui est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire :

$$\mu(v, w) = v \wedge w$$

   où $v \wedge w$ est le produit vectoriel de v par w. Ce produit muni l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ d'une structure d'algèbre.

2. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'application biliéaire alternée définie par :

$$\begin{cases} \mu(e_1, e_2) = e_3, \\ \mu(e_2, e_3) = 0, \\ \mu(e_1, e_3) = 0. \end{cases}$$

   Cette strucutre d'algèbre sur $\mathbb{R}^3$ est appelé algèbre de Heisenberg.

3. Soit E un espace vectoriel et μ l'application bilinéaire nulle :

$$\mu(v,w) = 0$$

pour tous $v, w \in E$. La structure d'algèbre ainsi définie est appelée algèbre abélienne.

6.1.2 Quelques exemples classiques

L'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur le corps $\mathbb{K}$

Cette algèbre est constituée des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2 sur $\mathbb{K}$. Comme loi multiplicative, on prend la multiplication ordinaire

$$\mu(A,B) = AB$$

pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Cette multiplication n'est pas commutative ce qui équivalent à dire que l'application bilinéaire μ n'est pas symétrique. Cette multiplication est associative

$$(AB)C = A(BC)$$

ce qui est équivalent à

$$\mu(\mu(A,B),C) = \mu(A,\mu(B,C)).$$

Dans le chapitre précédent nous avons défini la notion de comp$_i$ opération. L'associativité de μ est donc équivalente à

$$\mu \circ_1 \mu = \mu \circ_2 \mu.$$

L'algèbre des polynômes $\mathbb{K}[X]$ à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$

Les éléments de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

avec $a_i \in \mathbb{K}$, le degré n'étant pas fixé. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie, la multiplication d'algèbre estla multiplication ordinaire des polynômes

$$\mu(P_1(X), P_2(X)) = P_1(X)P_2(X).$$

Cette multiplication est commutative et associative.

L'algèbre des quaternions

Considérons un espace vectoriel $\mathcal{Q}$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ dont une base est donnée par les symboles $\{1, i, j, k\}$. Tout vecteur de $\mathcal{Q}$ s'écrit donc

$$v = a_1 1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$.

On définit une multiplication sur $\mathcal{Q}$ en posant

$$\begin{cases} 1\cdot 1 = 1, & 1\cdot i = i\cdot 1 = i, \quad 1\cdot j = j\cdot 1 = j, \quad 1\cdot k = k\cdot 1 = k,\\ i\cdot i = -1, & i\cdot j = -j\dot{i} = k, \quad i\cdot k = -k\dot{i} = -j,\\ j\cdot j = -1 & j\cdot k = -k\dot{j} = i,\\ k\cdot k = -1. \end{cases}$$

Ainsi, si $v_1 = a_1 1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ et $v_2 = b_1 1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k$ sont deux vecteurs de $\mathcal{Q}$

$$\begin{array}{rl}\mu(v_1,v_2) = v_1\cdot v_2 = & (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)1 + (a_1b2_{+}a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i\\ & +(a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2)j + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)k\end{array}$$

Cette algèbre n'est pas commutative mais associative.

EXERCICE 1 Soit $f = a_{11}(x^1)^2 + a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. Considérons un espace vectoriel dont une base est formée des mots $1, e_1, e_2, e_1e_2$. On considère la multiplication définie par

$$\begin{cases} 1\cdot e_i = e_i, \text{pour } i = 1,2; \quad 1\cdot e_1e_2 = e_1e_2,\\ e_1\cdot e_2 = e_1e_2,\\ \text{et} e_i\cdot e_j + e_j\cdot e_i = 2a_{ij}1. \end{cases}$$

Cette algèbre est appelée l'algèbre de Clifford de f et notée $\mathcal{C}l(2,f)$.
– Déterminer $\mathcal{C}l(2,f)$ pour $f = (x^1)^2 + (x^2)^2$.
– Déterminer $\mathcal{C}l(2,f)$ pour $f = (x^1)^2 - (x^2)^2$.
– Déterminer $\mathcal{C}l(2,f)$ pour $f = x^1x^2$.

6.1.3 Sous-algèbres - homomorphismes - Isomorphismes

Soit $A = (E,\mu)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. On appelle sous-algèbre de A un sous-espace vectoriel F de E tel que μ_F, la restriction de μ à F, vérifie

$$\mu_F(v,w)\in F \text{ pour tous } v,w\in F.$$

Dans ce cas $A_F = (F,\mu_F)$ est aussi une $\mathbb{K}$-algèbre.

Un idéal à gauche de A est une sous-algèbre $I = (F,\mu_F)$ vérifiant

$$\mu(v,w)\in I \ \forall v\in I \text{ et } w\in E.$$

On définit de manière analogue la notion d'idéal à droite. Un idéal bilatère est une sous-algèbr qui est à la fois un idéal à droite et à gauche. Si la multiplication μ est commutative, ces trois notions coincident.

Proposition 29 *Si $I = (F,\mu_F)$ est un idéal bilatère de $A = (E,\mu)$ alors l'espace vectoriel quotient E/F est muni d'une structure d'algèbre telle que la surjection linéaire canonique $\pi : E\to E/F$ vérifie*

$$\pi(\mu(v,w)) = \mu_{E/F}(\pi(v),\pi(w)).$$

Démonstration. Soit $\bar{v},\bar{w}\in E/F$ où $\bar{v}$ est la classe d'équivalence du vecteur v :

$$\bar{v} = \{v+u, \forall u\in F\}$$

Soient $v_1 \in \bar{v}$ et $w_1 \in \bar{w}$. Alors il existe $u_1, u_2 \in F$ tels que $v_1 = v + u_1$ et $w_1 = w + u_2$. On a alors

$$\mu(v_1, w_1) = \mu(v + u_1, w + u_2) = \mu(v, w) + u_3$$

avec $u_3 = \mu(v_1, u_2) + \mu(u_1, w) + \mu(u_1, u_2) \in F$ car I est un idéal bilatère. On en déduit

$$\pi(\mu(v_1, w_2)) = \pi(\mu(v, w)).$$

La multiplication dans E/F est alors définie par $\mu_{E/F}(\bar{v}, \bar{w}) = \pi(\mu(v, w))$.

Définition 37 *Soient $A_1 = (E_1, \mu_1)$ et $A_2 = (E_2, \mu_2)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Une application linéaire $f : E_1 \rightarrow E_2$ est appellée un morphisme d'algèbres si*

$$f(\mu_1(v, w)) = \mu_2(f(v), f(w))$$

pour tous $v, w \in E_1$. On écrira alors $f : A_1 \rightarrow A_2$.

Ainsi, dans la proposition précédente, la structure d'algèbre sur l'espace quotient E/F est telle que la projection linéaire canonique $\pi : E \rightarrow E/F$ soit un morphisme d'algèbre.

Si le morphisme d'algèbres $f : A_1 \rightarrow A_2$ est un isomorphisme linéaire, on dira que c'est un isomorphisme d'algèbres.

Deux algèbres A_1 et A_2 sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbres $f : A_1 \rightarrow A_2$.

Un isomorphisme $f : A_1 \rightarrow A_1$ de A_1 dans elle-même est appelé un automorphisme de A_1.

Proposition 30 *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Alors l'ensemble des automorphismes de A, noté $Aut(A)$ est un groupe pour la composition.*

EXERCICE 2

- Démontrer que $Aut(A)$ est un groupe.
- Calculer $Aut(A)$ lorsque A est l'algèbre de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} \mu(e_1, e_1) = \mu(e_2, e_2) = 0 \\ \mu(e_1, e_2) = \mu(e_2, e_1) = e_1 \end{cases}$$

où $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

6.2 Algèbres de dimension finie

6.2.1 Constantes de structures

Soit $A = (E, \mu)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, ce qui signifie que l'espace vectoriel sous-jacent E est de dimension finie. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de l'espace vectoriel E. Posons

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{ij}^{k} e_k.$$

Les scalaires C_{ij}^k pour $1 \leq i, j \leq n$ et $k = 1, \cdots, n$ sont appelés les constantes de structure de la multiplication de A ou plus simplement de A relatives à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Considérons une nouvele base $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ et soit $P = (\alpha_j^i)$ la matrice de passage définie par

$$e_j = \alpha_j^i e_i.$$

Considérons la famille de constantes de structure $\{D_{ij}^k\}$ relative à la base $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$. Dans un écriture conventionnée

$$\mu(e'_i, e'_j) = D_{ij}^k e'_k.$$

On a alors

$$\mu(\alpha_i^l e_l, \alpha_j^s e_s) = \alpha_i^l \alpha_j^s C_{ls}^r e_r = \alpha_i^l \alpha_j^s C_{ls}^r \beta_r^k e'_k$$

où $(\beta_k^r) = P^{-1}$. Ainsi nous obtenons la formule de changement de base

$$D_{ij}^k = \alpha_i^l \alpha_j^s C_{ls}^r \beta_r^k$$

Exemple. Toute algèbre A de dimension 2 dont la multiplication est antisymétrique est définie par sa multiplication μ dont les constantes de structure relatives à une base $\{e_1, e_2\}$ vérifient

$$\begin{cases} \mu(e_1, e_1) = \mu(e_2, e_2) = 0, \\ \mu(e_1, e_2) = -\mu(e_2, e_1) = C_{12}^1 e_1 + C_{12}^2 e_2. \end{cases}$$

Dans une nouvelle base $\{e'_1, e'_2\}$ avec

$$\begin{cases} e'_1 = ac_1 + be_2, \\ e'_2 = ce_1 + de_2 \end{cases}$$

on aura $\mu(e'_i, e'_i) = 0$ pour $i = 1, 2$ et

$$\mu(e'_1, e'_2) = \mu(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = (ad - bc)\mu(e_1, e_2) = (ad - bc)(C_{12}^1 e_1 + C_{12}^2 e_2).$$

Mais $P^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ d'où

$$\mu(e'_1, e'_2) = C_{12}^1(de'_1 - ce'_2) + C_{12}^2(-be'_1 + ae'_2) = (C_{12}^1 d - C_{12}^2 b)e'_1 + (-C_{12}^1 c + aC_{12}^2)e'_2.$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} D_{12}^1 \\ D_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{12}^1 \\ C_{12}^2 \end{pmatrix}.$$

On peut toujours choisir A, b, c, d tels que $ad - bc \neq 0$ et $D_{12}^1 = 1, D_{12}^2 = 0$. Ainsi la multiplication de A s'écrit dans la base $\{e'_1, e'_2\}$ correspondante

$$\begin{cases} \mu(e'_i, e'_i) = 0, \ i = 1, 2 \\ \mu(e'_1, e'_2) = -\mu(e'_2, e'_1) = e'_1 \end{cases}$$

6.2.2 Sur la classification des $\mathbb{K}$-algèbres sur $\mathbb{K}^n$

Soit $A = (E, \mu)$ une algèbre de dimension n. Soit $f : E \to \mathbb{K}^n$ un isomorphisme (non canonique) défini par exemple en se donnant une base $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ de E, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et $f(\varepsilon_i) = e_i$. Définissons sur $\mathbb{K}^n$ la multiplication

$$\widetilde{\mu}(v_1, v_2) = \mu(f^{-1}(v_1), f^{-1}(v_2))$$

avec $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$. On détermine ainsi une algèbre $\widetilde{A} = (\mathbb{K}^n, \widetilde{\mu})$ isomorphe à $A = (E, \mu)$. Comme nous nous intéressons dans ce paragraphe à la classification à isomorphisme près des $\mathbb{K}$-algèbres de dimension finie, nous pouvons nous limiter à la classe des $\mathbb{K}$-algèbres dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathbb{K}^n$.

Deux $\mathbb{K}$-algèbres $A_1 = (\mathbb{K}^n, \mu_1)$ et $A_2 = (\mathbb{K}^n, \mu_2)$ sont isomorphes s'il existe $f \in GL(n, \mathbb{K})$ tel que

$$\mu_2(f(v), f(w)) = f\mu_1(v, w)$$

pour tous $v, w \in \mathbb{K}^n$, $GL(n, \mathbb{K})$ désignantle groupe des isomorphismes linéaires de $\mathbb{K}^n$. Comme f est inversible, on déduit

$$\mu_1(v, w) = f^{-1}\mu_2(f(v), f(w)) \qquad (\star)$$

Soit $\mathcal{B}il(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ l'espace vectorieldes applications bilinéaires $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}^n$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. La relation $(\star)$ s'interprète comm une action du groupe $GL(n, \mathbb{K})$ sur $\mathcal{B}il(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$:

$$GL(n, \mathbb{K}) \times \mathcal{B}il(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \to \mathcal{B}il(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$$

donnée par

$$(f, \mu) \to f \star \mu$$

où $f \star \mu(v, w) = f^{-1}\mu(f(v), f(w))$ pour tous $v, w \in \mathbb{K}^n$.

Soit $\mu \in \mathcal{B}il(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. On note par $\mathcal{O}(\mu)$ son orbite sous l'action de $GL(n, \mathbb{K})$:

$$\mathcal{O}(\mu) = \{f \star \mu / f \in GL(n, \mathbb{K})\}.$$

Proposition 31 *Une $\mathbb{K}$-algèbre $A_1 = (\mathbb{K}^n, \mu_1)$ est isomorphe à $A = (\mathbb{K}^n, \mu)$ si et seulement si $\mu_1 \in \mathcal{O}(\mu)$.*

Démonstration. C'est une traduction directe de la notion d'isomorphisme.

Ainsi la classification à isomorphisme près des $\mathbb{K}^n$ est équivalente à la détermination de toutes les orbites de $\mathcal{B}il(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Ce problème est extrèmement difficile on n'a pas de réponse générale.

EXERCICE 3 Soit $\mathcal{A}lt(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ l'espace des applications alternées sur $\mathbb{K}^2$ à valeurs dans $\mathbb{K}^2$.

1. Montrer que si $\mu \in \mathcal{A}lt(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ alors $\mathcal{O}(\mu) \subset \mathcal{A}lt(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$.
2. Déterminer toutes les orbites.

EXERCICE 4 Soit $\mathcal{S}ym(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ l'espace des applications bilinéaires symétriques de $\mathbb{K}^2$ à valeurs dans $\mathbb{K}^2$.

1. Montrer que si $\mu \in \mathcal{S}ym(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ alors $\mathcal{O}(\mu) \subset \mathcal{S}ym(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$.
2. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{S}ym(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$ dont les éléments vérifient

$$\mu(\mu(v_1, v_2), v_3) = \mu(v_1, \mu(v_2, v_3))$$

pour tous $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^2$. Déterminer toutes les orbites $\mathcal{O}(\mu)$ pour $\mu \in F$.

6.2.3 Quelques classes remarquables d'algèbres

1. Les algèbres associatives

Une $\mathbb{K}$-algèbre $A = (E, \mu)$ est dite associative si la multiplication μ vérifie

$$\mu(\mu(v_1, v_2), v_3) = \mu(v_1, \mu(v_2, v_3))$$

pour tous $v_1, v_2, v_3 \in E$. En terme de comp-$_i$ opération, ceci se traduit par

$$\mu \circ_1 \mu - \mu \circ_2 \mu = 0.$$

Par exemple, l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'algèbre des polynômes sont des algèbres associatives.

EXERCICE 5 Soit G un groupe fini multiplicatif $G = \{e = g_0, g_1, \cdots, g_p\}$ où e est l'élément neutre de groupe. On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté $\mathbb{K}G$, dont une base est $\{e, g_1, \cdots, g_p\}$. On définit sur $\mathbb{K}G$ la multiplication μ dont les images des vecteurs de base sont

$$\mu(g_i, g_j) = g_i g_j$$

où $g_i g_j$ est le produit dans G.

1. Montrer que $(\mathbb{K}G, \mu)$ est une algèbre associative de dimension finie.
2. Soit $G = \Sigma_3$ le groupe symétrique de degré 3. Ecrire les constantes de structures de $(\mathbb{K}\Sigma_3, \mu)$.
3. Soit $I = \{\sum \alpha_i g_i / \sum \alpha_i = 0\}$. Est-ce un ideal de $(\mathbb{K}\Sigma_3, \mu)$.

Soit $(A = (E, \mu)$ une algèbre associative de dimension finie. Soit $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ une base de E. Les relations d'associativité

$$\mu(\mu(e_i, e_j)e_k) = \mu(e_i, \mu(e_j, e_k))$$

impliquent que les constantes de structures C_{ij}^k relatives à cette base vérifient le système d'équations

$$\sum_l \gamma_{ij}^l \gamma_{lk}^s = \sum_l \gamma_{il}^s \gamma_{jk}^l$$

pour tous $i, j, k, s \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

La classification à isomorphisme près des algèbres associatives réelles ou complexes n'est connue que pour les petites dimensions. La raison est que ce problème de classification est du point de vue calculatoire très difficile. Pour se faire une idée de ces difficultés, on pourra démontrer le résultat suivant :

Proposition 32 *Toute algèbre associative réelle commutative $A = (\mathbb{R}^2, \mu)$ sur $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres dont la multiplication est*

1. $\mu_1 = 0$ *(cas trivial)*
2. $\begin{cases} \mu_2(e_1, e_1) = e_1 \\ \mu_2(e_2, e_2) = e_2 \\ \mu_2(e_1, e_2) = \mu_2(e_2, e_1) = e_2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \mu_3(e_1, e_1) = e_1 \\ \mu_3(e_1, e_2) = \mu_3(e_2, e_1) = e_2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \mu_4(e_1, e_1) = e_2 \\ \mu_4(e_2, e_2) = -e_1 \\ \mu_4(e_1, e_2) = \mu_4(e_2, e_1) = e_2 \end{cases}$
5. $\{ \mu_5(e_2, e_1) = e_2$
6. $\{ \mu_6(e_1, e_1) = e_1$

où $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, les produits de vecteurs non écrits sont considérés comme nuls.

Il existe en dimension infinie une classe d'algèbres associatives, dite libres, permettant de retrouver toutes les algèbres associatives par passage au quotient. Soit X un ensemble dénombrable non vide. On regarde les éléments de X comme des lettres dans un alphabet. On forme des mots avec ces lettres. Ainsi un mot de longueur n est un n-uple ordonné d'éléments de X. On désigne par X^n l'ensemble des mots de longueur n et soit $X^* = \bigcup_{n \geq 1} X^n$. Soit A_X l'espce vectoriel sur $\mathbb{K}$ de base X^*. On définit sur A_X la multiplication suivante que l'on définit sur les éléments de base :

$$\mu(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_p) = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_p$$

(juxtaposition des mots). Il est clair que ce produit est associatif (et non commutatif). Si X est un ensemble fini contenant r éléments alors A_X est appelé l'algèbre libre associative sur $\mathbb{K}$ à r générateurs. Notons que si Y est aussi un ensemble fini à n éléments alors A_X est isomorphe à A_Y.

EXERCICE 6 Soit $X = \{a, b, c\}$.

1. Ecrire X^1, X^2, X^3.
2. Combien d'éléments a X^n ?
3. Soit A_X l'algèbre libre sur X. Montrer que
$$A_X = \oplus A_X^n$$
où A_X^n est l'espace vectoriel engendré par les mots de longueur n et que $A_X^n \cdot A_X^m \subset A_X^{n+m}$.

2. Les algèbres de Lie

Définition 38 *Une algèbre $A = (E, \mu)$ sur $\mathbb{K}$ est appelée algèbre de Lie si la multiplication μ véifie les deux conditions suivantes :*

1. $\mu(v, w) = -\mu(w, v)$ *pour tous* $v, w \in E$
2. $\mu(\mu(v_1, v_2), v_3) + \mu(\mu(v_2, v_3), v_1) + \mu(\mu(v_3, v_1), v_2) = 0$ *pour tous* $v_1, v_2, v_3 \in E$.

La condition 1 n'est autre que l'antisymétrie de μ. L'identité concernant la condition 2 est appelée l'identité de Jacobi. On note classiquement la multiplication $\mu(v, w)$ par le crochet $[v, w]$ appelé crochet de Lie.

Exemples

1. Si $\mu = 0$, l'algèbre de Lie $A = (E, 0)$ est dite algèbre de Lie abélienne sur E.
2. Soit M une variété différentielle. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}(M)$ des champs de vecteurs differentiables sur M, on définit le crochet de Lie $[X, Y]$ comme étant le champ de vecteurs vérifiant

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable. En particulier si $M = \mathbb{R}^n$ et si $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont deux champs de vecteurs sur M, alors

$$[X, Y] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(X_i \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Muni de ce crochet $\mathcal{T}(M)$ est une algèbre de Lie.

Proposition 33 *Soit $A = (E, \mu)$ une algèbre associative. Alors l'algèbre $A_L = (E, \mu_L)$ où la multiplication μ_L est définie par*

$$\mu_L(v, w) = \mu(v, w) - \mu(w, v)$$

est une algèbre de Lie, dite associée à l'algèbre associative A.

Démonstration. Il est clair que μ_L est antisymétrique. L'identité de Jacobi relative à μ_L se démontrera en exercice.

EXERCICE 7 Montrer que si μ est une multiplication associative, alors son antisymétrisé μ_L vérifie l'identité de Jacobi.

Exemple Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles. C'est une algèbre associative pour le produit

$$\mu(A, B) = AB.$$

Ainsi $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mu_L$ où $\mu_L(A, B) = [A, B] = AB - BA$ est une algèbre de Lie. On la note en général $gl(n, \mathbb{R})$.

Il serait toutefois faux de croire que toute algèbre de Lie se déduit d'une algèbre associative. On peut néanmoins construire à partir d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une algèbre associative de dimension infinie, appelée l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Comme sa construction est facilitée par l'usage du produit tensoriel, nous y reviendrons lorsque cette notion aura été développée. A titre d'exemple, si $E = \mathbb{K}$ et $\mathfrak{g} = (\mathbb{K}, \mu)$ est l'algèbre de Lie abélienne de dimension 1, alors son algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est isomorphe à l'algèbre associative $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit $\mathfrak{g} = (\mathbb{K}^n, \mu)$ une algèbre de Lie de dimension n sur $E = \mathbb{K}^n$. Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$,les constantes de structures C_{ij}^k définies par $\mu(e_i, e_j) = C_{ij}^k$, vérifiant

1. $C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \quad \forall i, j, k = 1, \cdots, n$
2. $\sum_{l=1}^n C_{ij}^l C_{lk}^s + C_{jk}^l C_{li}^s + C_{ki}^l C_{lj}^s = 0$ pour tous $i, j, k, s = 1, \cdots, n$

Ici aussi, la classification à isomorphisme près est un problème ardu. Il n'est résolu que pour les dimensions inférieures à 6. A titre d'exemple, on a les résultats suivants.

Proposition 34 *Toute algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^2, \mu)$ de dimension 2 est isomorphe à l'une des algèbres dont la multiplication est donnée dans la base $\{e_1, e_2\}$par*

1. $\mu_1(e_i, e_j) = 0$ *pour tous* $i, j = 1, 2$
2. $\mu_2(e_1, e_2) = e_1 = -\mu(e_2, e_1)$

Proposition 35 *Toute algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}^3, \mu)$ de dimension 3 est isomorphe à l'une des algèbres dont la multiplication est donnée dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par*

1. $\mu_1(e_i, e_j) = 0$ *pour tous* $i, j = 1, 2, 3$
2. $\left\{\begin{array}{l} \mu_2(e_1, e_2) = -\mu_2(e_2, e_1) = e_3, \\ \mu_2(e_1, e_3) = -\mu_2(e_3, e_1) = 0 \\ \mu_2(e_2, e_3) = -\mu_2(e_3, e_2) = 0. \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} \mu_3(e_1, e_2) = -\mu_3(e_2, e_1) = e_2, \\ \mu_3(e_1, e_3) = -\mu_3(e_3, e_1) = e_2 + e_3, \\ \mu_3(e_2, e_3) = -\mu_3(e_3, e_2) = 0. \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} \mu_4(e_1, e_2) = -\mu_4(e_2, e_1) = e_2, \\ \mu_4(e_1, e_3) = -\mu_4(e_3, e_1) = \alpha e_3 \quad \alpha \in [-1, 1], \\ \mu_4(e_2, e_3) = -\mu_4(e_3, e_2) = 0. \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{l} \mu_5(e_1, e_2) = -\mu_5(e_2, e_1) = 2e_2, \\ \mu_5(e_1, e_3) = -\mu_5(e_3, e_1) = -2e_3, \\ \mu_5(e_2, e_3) = -\mu_5(e_3, e_2) = e_1. \end{array}\right.$

Comme dans le cas associatif, il existe une notion d'algèbre de Lie libre sur $\mathbb{K}$ permettant de construire par passage au quotient toutes les algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$. Soit $\{a_1, \cdots, a_r\}$ un alphabet de r lettres et soit A l'algèbre associative libre à r générateurs construite sur X. On considère A_L l'algèbre de Lie associée à l'algèbre associative A. Soit L la sous-algèbre de A_L engendrée par X. Alors L est l'algèbre de Lie libre sur X à r générateurs. Les éléments de L sont appelés les polynômes de Lie sur X. Un telpolynôme est dit homogène si chacun de ses termes a la même degré. Par exemple, si $X = \{a_1, a_2\}$ alors les polynômes

$$a_1, a_2, [a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1, [a_1, [a_1, a_2]] = a_1 a_1 a_2 - 2a_1 a_2 a_1 + a_2 a_1 a_1$$

sont homogènes.

Si L_n est le sous-espace vectoriel de A_n constitué des polynômes de Lie de degré n, alors

$$L = \oplus L_n$$

et $[L_n, L_m \subset L_{n+m}]$.

La dimension de composantes L_n est donnée par la formule de Witt

$$\dim L_n = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \mu(d) r^{n/d}$$

où la somme est effectuée sur tous les diviseurs d de n et $\mu(d)$ est la fonction de Mobius

$$\mu(d) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } d = 1 \\ (-1)^k \text{ si } d = p_1 \cdots p_k \text{ les } p_i \text{ tous distincts} \\ 0 \text{ si } d \ \text{ a des facteurs carrés} \end{array} \right.$$

EXERCICE 8 Décrire l'algèbre libre à 1 générateur.

EXERCICE 9 A quelle condition le crochet de Lie est-il associatif.

3. Algèbres de Jordan

Définition 39 *Une algèbre $A = (E, \mu)$ est dite de Jordan si la multiplication μ vérifie*

1. $\mu(v, w) = \mu(w, v)$,
2. $\mu(v, \mu(w, \mu(v, v))) = \mu(\mu(v, w), \mu(v, v))$ *pour tous* $v, w \in E$.

Pour simplifier cette écriture, posons $v \cdot w = \mu(v, w)$. Alors les conditions de Jordan s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} v \cdot w = w \cdot v \\ v \cdot (w \cdot v^2) = (v \cdot w) \cdot v^2 \end{array} \right.$$

La seconde condition peut s'interpréter comme une condition d'associativité mais ne portant uniquement que sur les vecteurs v, w et v^2. Une algèbre de Jordan n'est donc pas en général associative.

Proposition 36 *Soit $A = (E, \mu)$ une $\mathbb{K}$-algèbre associative. Alors l'algèbre $J = (E, \mu_J)$ définie sur E par la multiplication μ_J donné par*

$$\mu_J(v, w) = \frac{1}{2}(\mu(v, w) + \mu(w, v))$$

est une $\mathbb{K}$-algèbre de Jordan.

Démonstration. La multiplication μ_J, qui est le symétrisé de μ est commutative. Posons pou simplifier $\mu(v, w) = vw$ et $\mu_J(v, w) = v \cdot w$. Alors $v \cdot w = \frac{1}{2}(vw + wv)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} v \cdot (w \cdot v^2) - (v \cdot w) \cdot v^2 = & \frac{1}{2}[v \cdot (wv^2 + v^2 w) - (vw + wv) \cdot v^2] \\ = & \frac{1}{4}[v(wv^2 + v^2 w) + (wv^2 + v^2 w)v - (vw + wv)v^2 - v^2(vw + wv)] \\ = & \frac{1}{4}[v(wv^2) + v(v^2 w) + (wv^2)v + (v^2 w)v \\ & \quad -(vw)v^2 + (wv)v^2 - v^2(vw) - v^2(wv)] \\ = & \frac{1}{4}[v(v^2 w) + (wv^2)v + (wv)v^2 - v^2(vw)] \end{array}$$

mais $v(v^2w) = (vv^2)w = v^3w = (v^2v)w = v^2(vw)$ et $(wv^2)v = wv^3 = w(vv^2) = (wv)v^2$. Ainsi $v \cdot (w \cdot v^2) - (v \cdot w) \cdot v^2 = 0$.

Exemple. Considérons l'algèbre associative $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$. C'est une algèbre associative pour le produit

$$\mu(A, B) = AB.$$

C'est aussi une algèbre de Jordan muni du produit

$$\mu_J(A, B) = \frac{1}{2}(AB + BA)$$

EXERCICE 9 Montrer que la relation $v \cdot (w \cdot v^2) - (v \cdot w) \cdot v^2$ est équivalente à sa polarisation

$$\begin{aligned} &((v_2 \cdot v_3) \cdot v_4) \cdot v_1 + ((v_3 \cdot v_1) \cdot v_4) \cdot v_2 + ((v_1 \cdot v_2) \cdot v_4) \cdot v_3 \\ &= (v_2 \cdot v_3) \cdot (v_4 \cdot v_1) + (v_3 \cdot v_1) \cdot (v_4 \cdot v_2) + (v_1 \cdot v_2) \cdot (v_4 \cdot v_3) \end{aligned}$$

EXERCICE 10 Soit $J = (E, \mu)$ une algèbre de Jordan. On dit qu'un élément $e \in E$ est un idempotent de J s'il vérifie $\mu(e, e) = e$. Soit $v \in E$ et soit R_v l'endomorphisme de E défini par

$$R_v w = \mu(w, v).$$

Montrer que R_e vérifie

$$2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0.$$

En déduire les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ de R_e. Soit $E = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ la décompostion de E en espaces caractéristiques de R_e. Calculer les produits $A_i \cdot A_j$ pour $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

Remarque. Comme pour les algèbres de Lie, il existe des algèbres de Jordan qui ne sont pas obtenues comme des symétrisées d'algèbres associatives.

6.2.4 Algèbres non associatives

Lorsqu'on parle d'algèbres non associatives on parle en général de classes d'algèbres dont l'associativité n'est pas nécessairement vérifiée.

Le terme non associatif n'est là que pour préciser que la muliplication de l'algèbre vérifie certaines relations plus générale que la notion d'associativité (et pouvant inclure la relation d'associativité).

Quelques classes particulièrement d'algèbres non associatives

1. **Les algèbres de Lie**
2. **Les algèbres de Jordan**
3. **Les algèbres G-associatives**. Considérons le groupe symétrique Σ_3 d'odre 3. Ses sous-groupes sont $G_1 = \{Id\}, G_2 = \{Id, \tau_{12}\}, G_3 = \{Id, \tau_{13}\}, G_4 = \{Id, \tau_{23}\}, G_5 = \{Id, c, c^2\}, G_6 = \Sigma_3$ où τ_{ij} est la transposition (ij) échangeant i et j, c le cycle (123) d'ordre 3 et $c^2 = (132)$. Soit μ une multiplication sur l'espace vectoriel E. On note par A_μ son associateur c'est-à-dire

$$A_\mu(a_1, a_2, a_3) = \mu(\mu(a_1, a_2), a_3) - \mu(a_1, \mu(a_2, a_3))$$

Définition 40 *L'algèbre $A = (E, \mu)$ est dite G-associative si*

$$\sum_{\sigma \in G} A_\mu(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) = 0$$

où G est un sous-groupe de Σ_3.

Notons que toutes ces algèbres G-associatives sont Lie-admissibles

Définition 41 *L'algèbre $A = (E, \mu)$ est dite Lie-admissible si $\mu_L(v, w) = \mu(v, w) - \mu(w, v)$ défini un crochet de Lie.*

4. **Les algèbres alternatives**

Définition 42 *L'algèbre $A = (E, \mu)$ est dite alternative si A_μ vérifie*

$$\begin{cases} A_\mu(v, v, w) = 0, \\ A_\mu(w, v, v) = 0. \end{cases}$$

5. **Les algèbres de Poisson**

Dans ce cas la loi μ vérifie :

$$3A_\mu(x, y, z) = \mu(\mu(x, z), y) + \mu(\mu(y, z), x) - \mu(\mu(y, x), z) - \mu(\mu(z, x), y). \tag{6.1}$$

Si $A = (E, \mu)$ est une algèbre de Poisson alors

$$\mu_{\mathcal{A}}(u, v) = \frac{1}{2}\left(\mu(u, v) - \mu(v, u)\right)$$

est une loi d'algèbre associative et

$$\mu_L(u, v) = \frac{1}{2}\left(\mu(u, v) - \mu(v, u)\right)$$

est une loi d'algèbre de Lie. Notons $u \bullet v = \mu_{\mathcal{A}}(u, v)$ le produit assocaitif et $[u, v] = \mu_L(u, v)$ le crochet de Lie. On peut vérifier que les produits associatif et de Lie vérifie la règle de Leibniz :

$$[u \bullet v, w] = u \bullet [v, w] + [u, w] \bullet v$$

pour tous $u, v, w \in E$.

On termine ici cette liste qui est loin d'être exhaustive.

6.3 Algèbres n-aires

La notion d'algèbre n-aire généralise celle d'algèbre, la multiplication agissant ici sur n arguments.

6.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une structure de $\mathbb{K}$-algèbre n-aire sur E est donnée par une multiplication n-aire c'est-à-dire une application n-linéaire

$$\mu : E^n \to E.$$

Comme pour le cas ordinaire des $\mathbb{K}$-algèbres sur E correspondant à $n = 2$ on notera par $A = (E, \mu)$ l'algèbre n-aire définie par la multiplication μ sur E.

Exemple. Soit $\mathcal{M}(n, m, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices d'ordre $n \times m$ avec $n \neq m$. Alors l'application trilinéaire

$$\mu : \mathcal{M}(n, m, \mathbb{K})^3 \to \mathcal{M}(n, m, \mathbb{K})$$

donnée par

$$\mu(A, B, C) = A\,{}^tBC$$

avec $A, B, C \in \mathcal{M}(n, m, \mathbb{K})$ et où ${}^tB$ désigne la transposée de la matrice B, définit sur $\mathcal{M}(n, m, \mathbb{K})$ une structure d'algèbre ternaire.

6.3.2 Quelques algèbres ternaires classiques

1. **L'algèbre de Lie ternaire de Filippov ou de Nambu.** Elle est définie par la multiplication ternaire $\mu : E^3 \to E$ satisfaisant
   (a) $\mu(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma)\mu(v_1, v_2, v_3)$ pour tout $\sigma \in \Sigma_3$, et où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.
   (b) $\mu(\mu(v_1, v_2, v_3), w_1, w_2) = \mu(\mu(v_1, w_1, w_2), v_2, v_3) + \mu(v_1, \mu(v_2, w_1, w_2), v_3) + \mu(v_1, v_2, \mu(v_3, w_1, w_2))$ pour tous $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 \in E$.

   La première identité signifie que μ est anticommutative, la deuxième identité est souvent appelée l'identité de Filippov-Jacobi.

   EXERCICE 11. Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soit $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de E. Montrer que la multiplication anticommutative ternaire sur E donnée par

$$\begin{cases} \mu(v_1, v_2, v_3) = -v_4 \\ \mu(v_1, v_2, v_4) = v_3 \\ \mu(v_1, v_3, v_4) = -v_2 \\ \mu(v_2, v_3, v_4) = v_1 \end{cases}$$

   munit E d'une structure d'algèbre ternaire de Filippov.

   EXERCICE 12. Soit $E = \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ l'espce vectoriel des polynômes à n-indéterminées sur $\mathbb{K}$. On considère le produit n-aire

$$\mu(P_1, \cdots, P_n) = Jac(P_1, \cdots, P_n)$$

   où $Jac(P_1, \cdots, P_n)$ est le déterminant de la matrice jacobienne des dérivées partielles d'odre 1 de $P_1, \cdots, P_n$.

   (a) Montrer que μ est antisymétrique.
   (b) Montrer que μ vérifie l'identité de Filippov-Jacobi

Le crochet de Nambu a relevé l'intérêt d'étudier ces algèbres pour généraliser certaines équations de la mécanique. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^3$. On considère dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ le produit ternaire

$$\mu(f_1, f_2, f_3) = Jac(f_1, f_2, f_") = det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Ce produit muni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ d'une structure d'algèbre ternaire de Filipov.

2. **Les 3-algèbres de Lie, appelées aussi les sh-3 algèbres de Lie** Cette notion généralise la précédente. Une algèbre ternaire $A = (E, \mu)$ est appelée une 3-algèbre de Lie de Lie si le produit ternaire vérifie
   (a) μ est antisymétrique.
   (b) $\sum_{\sigma \in \Sigma_5} \varepsilon(\sigma)\mu(\mu(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)})v_{\sigma(4)}, v_{\sigma(5)}) = 0$ où Σ_5 est le groupe syétrique de degré 5.

   EXERCICE 13. On appelle Shuffle-$(3, 2)$ le sous-ensemble noté $Sh(3, 2)$ de Σ_5 constitué des permutations vérifiant

   $$\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3) \text{et } \sigma(4) < \sigma(5).$$

   Montrer qu'une multiplication ternaire antisymétrique défini un produit de 3-algèbre de Lie si et seulement si

   $$\sum_{\sigma \in Sh(3,2)} \varepsilon(\sigma)\mu(\mu(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)})v_{\sigma(4)}, v_{\sigma(5)}) = 0$$

   pour tous $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in E$.

   EXERCICE 14. Montrer qu'une algèbre ternaire de Filippov est une 3-algèbre de Lie.

3. **Les algèbres partiellement et totallement associatives.** Une algèbre ternaire $A = (E, \mu)$ est dite partiellement associative si la multiplication ternaire μ vérifie

   $$\mu(\mu(v_1, v_2, v_3), v_4, v_5) + \mu(v_1, \mu(v_2, v_3, v_4), v_5) + \mu(v_1, v_2, \mu(v_3, v_4, v_5)) = 0$$

   pour tout v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dans E.
   L'algèbre A est dite totallement associative si

   $$\mu(\mu(v_1, v_2, v_3), v_4, v_5) = \mu(v_1, \mu(v_2, v_3, v_4), v_5) = \mu(v_1, v_2, \mu(v_3, v_4, v_5))$$

   pour tout v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dans E.

6.4 Coalgèbres : version allégée

Une structure d'algèbre sur un espace vectoriel est donnée par une application bilinéaire sur l'espace vectoriel E et à valeurs dans E. Une structure de cogèbre sera définie en quelque sorte d'une manière duale, mais ceci n'aura de sens que lorsque la notion de produit tensoriel sera présentée. Dans ce cas la donnée d'une application bilinéaire sur E sera équivalente à la donnée d'une application linéaire sur le produit tensoriel de E par E à valeurs dans E. On pourra alors dualiser cette application. Pour l'instant contentons nous de définir la notion de coalgèbre allégée par la donnée d'una application linéaire

$$\Delta : E \rightarrow E \times E.$$

On peut donc écrire

$$\Delta(v) = (\Delta_1(v), \Delta_2(v))$$

où chacune des applications Δ_i est un endomorphisme de E.

Au chapitre précédent, nous avons défini la notion de produit tensoriel d'applications multilinéaires. Utilisons la pour présenter la notion de coassociativité. La coalgèbre allégée $A = (E, \Delta)$ est dite coassociative si

1. On a $(Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta$,
2. Il existe une application linéaire $\epsilon : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$\epsilon(\Delta_1(v))\Delta_2(v) = \epsilon(\Delta_2(v))\Delta_1(v)$$

pour tout $v \in E$.

La première condition est donc équivalente à

$$(\Delta_1(v), \Delta_1 \circ \Delta_2(v), \Delta_2^2(v)) = (\Delta_1^2(v), \Delta_2 \circ \Delta_1(v), \Delta_2(v))$$

pour tout $v \in E$. Ainsi les endomorphismes Δ_1 et Δ_2 vérifient

$$\begin{cases} \Delta_1^2 = \Delta_1, \\ \Delta_2^2 = \Delta_2, \\ \Delta_1 \circ \Delta_2 = \Delta_2 \circ \Delta_1. \end{cases}$$

L'exemple le plus simple est donné en prenant $\Delta(v) = (v, v)$ et $\epsilon(v) = 1$. Supposons E de dimension finie. Les applications Δ_1 et Δ_2 sont simultanément diagonalisables car leurpolynôme minimal n'a que des racines simples et ces endomorphismes commutent. Considérons une base commune de vecteurs propres $\{e_1, \cdots, e_n\}$. On peut supposer, comme les valeurs propres sont 0 ou 1, que

$$\Delta_1(e_i) = e_i, \quad i = 1, \cdots, p, \quad \Delta_1(e_i) = 0, \ i = p = 1, \cdots, n.$$

Si nous supposons Δ_1 non nul, il existe bien un tel indice p, avec $1 \leq p \leq n$. Posons $\Delta_2(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i = 0$ ou 1. On a donc

$$\begin{cases} \Delta(e_i) = (e_i, \lambda_i e_i), \ i = 1, \cdots, p, \\ \Delta(e_i) = (0, \lambda_i e_i), \ i = p+1, \cdots, n. \end{cases}$$

La forme linéaire ϵ vérifie, pour $i = 1, \cdots, p$

$$\epsilon(\Delta_1(e_i))\Delta_2(e_i) = \lambda_i \epsilon(e_i) e_i = \epsilon(\Delta_2(v))\Delta_1(v) = \lambda_i \epsilon(e_i) e_i$$

ce qui est toujours vrai, et pour $i = p+1, \cdots, n$,

$$\epsilon(\Delta_1(e_i))\Delta_2(e_i) = 0 = \epsilon(\Delta_2(v))\Delta_1(v) = \lambda_i \epsilon(e_i) e_i$$

ce qui est aussi vérifié. On décrit ainsi toutes les coalgèbres allégées coassociatives de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Chapitre 7

Produit tensoriel de deux espaces vectoriels

7.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels

7.1.1 Définition du produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{K}} F$

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. On note $\mathbb{K}^{E\times F}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont une base est donnée par tous les couples (v, w) où $v \in E$ et $w \in F$. Ainsi

$$\mathbb{K}^{E\times F} = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_i(v_i, w_i), \quad v_i \in E,\ w_i \in F,\ a_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Si le corps $\mathbb{K}$ est infini et si E ou F est non nul, c'est un espace de dimension infinie qu'il ne faut pas confondre avec l'espace produit $E \times F$. Soit W le sous-espace de $\mathbb{K}^{E\times F}$ engendré par les vecteurs

$$\left\{ \begin{array}{l} (av + bv', w) - a(v, w) - b(v', w) \\ (v, aw + bw') - a(v, w) - b(v, w') \end{array} \right.$$

$a, b \in \mathbb{K}, v, v' \in E, w, w' \in F.$

Définition 43 *Le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ est l'espace vectoriel quotient*

$$E \otimes_{\mathbb{K}} F = \frac{\mathbb{K}^{E\times F}}{W}.$$

Soit

$$\pi : \mathbb{K}^{E\times F} \to E \otimes_{\mathbb{K}} F$$

la projection canonique qui à un vecteur $\sum_i a_i(v_i, w_i)$ de $\mathbb{K}^{E\times F}$ fait correspondre sa classe d'équivalence dans l'espace vectoriel quotient $E \otimes_{\mathbb{K}} F$. Comme π est une application linéaire, on a

$$\pi(\sum_i a_i(v_i, w_i)) = \sum_i a_i \pi(v_i, w_i)$$

et l'espace vectoriel quotient $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ est engendré par les classes $\pi(v \otimes w)$ avec $(v, w) \in E \times F$. On notera $v \otimes w$ la classe d'équivalence du couple (v, w). Ainsi

$$v \otimes w = \pi(v, w) = \{(v, w) + z,\ z \in W\}.$$

Ainsi tout vecteur de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ s'écrit comme une somme finie

$$\sum_{i \in I} a_i v_i \otimes w_i$$

avec $v_i \in E, w_i \in F$ et où I est un ensemble fini d'indices.

Exemple. Considérons le cas où $E = F = \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{2} \otimes 2 = 1 \otimes 1.$$

En effet le vecteur $\frac{1}{2}(1, 2) - (\frac{1}{2}, 2))$ est dans W. Donc

$$\pi(\frac{1}{2}, 2) = \pi((\frac{1}{2}, 2) + (\frac{1}{2}(1, 2) - (\frac{1}{2}, 2))) = \pi(\frac{1}{2}(1, 2)).$$

Comme le vecteur $(1, 2) - 2(1, 1)$ est dans W, on a

$$\pi(\frac{1}{2}, 2) = \pi(\frac{1}{2}(1, 2)) = \pi(\frac{1}{2}((1, 2) - (1, 2) + 2(1, 1))) = \pi(1, 1).$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \otimes 2 = 1 \otimes 1.$$

Soit

$$\pi : \mathbb{K}^{E\times F} \to E \otimes_{\mathbb{K}} F = \frac{\mathbb{K}^{E\times F}}{W}$$

la projection linéaire canonique et soit $i : E \times F \to \mathbb{K}^{E\times F}$ l'injection naturelle ensembliste (elle n'est pas linéaire). La composée

$$t = i \circ \pi : E \times F \to E \otimes_{\mathbb{K}} F$$

est définie par

$$t(v, w) = v \otimes w.$$

Elle est appelée application canonique.

Théorème 21 *L'application canonique*

$$t : E \times F \to E \otimes_{\mathbb{K}} F$$

définie par

$$t(v, w) = v \otimes w$$

est bilinéaire.

Démonstration. Calculons $t(av+bv',w)$. Par définition de t, on a

$$t(av+bv',w) = (av+bv')\otimes w = \pi(av+bv',w).$$

Mais

$$(av+bv',w) - a(v,w) - b(v',w) \in W.$$

Ainsi

$$\pi(av+bv',w) = \pi((av+bv',w) - (av+bv',w) + a(v,w) + b(v',w)) = \pi(a(v,w)+b(v',w)).$$

Ainsi

$$\pi(av+bv',w) = a\pi(v,w) + b\pi(v',w)$$

et

$$(av+bv')\otimes w = av\otimes w + bv'\otimes w.$$

On démontre de même que

$$v\otimes(aw+bw') = av\otimes w + bv\otimes w'$$

et le théorème s'en déduit. ♣

7.1.2 Propriété universelle du produit tensoriel

Pour simplifier l'écriture, nous noterons $E\otimes F$ à la place de $E\otimes_{\mathbb{K}} F$ si la précision du corps de base n'est pas utile.

Les théorèmes suivants sont la clef de ce chapitre. Ils montrent le caractère unique du produit tensoriel permettant de transposer les propriétés de bilinéarité dans la catégorie des espaces vectoriels et des applications linéaires.

Théorème 22 *Pour tout espace vectoriel M sur $\mathbb{K}$ et toute application bilinéaire*

$$\phi : E\times F \to M$$

il existe une unique application linéaire

$$f : E\otimes F \to M$$

telle que

$$\phi(v,w) = f(v\otimes w)$$

pour tout $v\in E$ et $w\in F$.

Nous traduisons cette propriété en disant que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E\times F \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "\phi"'] & E\otimes F \arrow[d, "f"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Montrons l'existence de f. Considérons l'application linéaire

$$g : \mathbb{K}^{E\times F} \to M$$

définie par

$$g(\sum a_i(v_i, w_i)) = \sum a_i \phi(v_i, w_i).$$

Comme ϕ est bilinéaire on a

$$W \subset \mathrm{Ker}(g).$$

En effet, comme ϕ est bilinéaire,

$$\begin{aligned} g((av + bv', w) - a(v, w) - b(v', w)) &= \phi(av + bv', w) - a\phi(v, w) - b\phi(v', w). \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, on a

$$g((v, aw + bw') - a(v, w) - b(v, w')) = 0.$$

Donc tous les générateurs de W sont dans $\mathrm{Ker} g$ et donc W est un sous espace vectoriel de $\mathrm{Ker} g$. Le théorème de factorisation implique qu'il existe une application linéaire f tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^{E\times F} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & E \otimes F \arrow[d, "f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

L'application linéaire f vérifie

$$f(v \otimes w) = g(v, w) = \phi(v, w).$$

On a donc démontré l'éxistence de f. L'unicité de f résulte directement de la formule

$$f(v \otimes w) = \phi(v, w)$$

et du fait que les vecteurs $v \otimes w$ engendrent $E \otimes F$. ♣

Théorème 23 (Propriété universelle du produit tensoriel) *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$t' : E \times F \to V$$

une application bilinéaire surjective. Supposons que pour toute application bilinéaire

$$\phi : E \times F \to M$$

on ait la factorisation

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "\phi"'] & V \arrow[d, "f'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

avec f' linéaire. Alors V est isomorphe au produit tensoriel $E \otimes F$.

Démonstration. Prenons pour M, dans le Théorème **??** , l'espace $E \otimes F$ et pour application bilinéaire ϕ, l'application t. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & V \arrow[d, "f'"] \\ & E \otimes F \end{tikzcd}$$

et donc $f'(t'(v,w)) = v \otimes w$. De même, en prenant pour M l'espace vectoriel V, on récupère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "t'"'] & E \otimes F \arrow[d, "f"''] \\ & V \end{tikzcd}$$

et $f"(v \otimes w) = t'(v,w)$. D'où $f'(f"(v \otimes w)) = v \otimes w$ et $f"(f'(t'(v,w)) = t'(v,w)$. Comme t' est surjective, on en déduit que $f" \circ f' = Id_V$. ♣

Conséquence. La détermination du produit tensoriel de deux espaces vectoriels peut donc se faire soit en utilisant la définition, soit en utilisant la propriété universelle.

EXERCICE 1. Montrer que $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}$.

EXERCICE 2. . Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que les espaces vectoriels $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ et $F \otimes_{\mathbb{K}} E$ sont isomorphes à E.

EXERCICE 3. Montrer que $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^m$ est isomorphe à l'espace des matrices réelles d'ordre $n \times m$.

Proposition 37 *Soient E,F, et M des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Il existe un isomorphisme linéaire*

$$\Psi : \mathcal{L}(E \otimes F, M) \to \mathcal{L}(E, F; M)$$

entre l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ à valeurs dans M et l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans M.

Démonstration. Cet isomorphisme résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "\phi"'] & E \otimes F \arrow[d, "f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Considérons une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E \otimes F, M)$. Posons

$$\Psi(f)(v,w) = f(t(v,w))$$

pour tout $(v,w) \in E \times F$. L'application $\Psi(f)$ est bilinéaire et le diagramme précédent montre que Ψ est surjective. Supposons $\Psi(f) = 0$. Alors $f(v \otimes w) = 0$ pour tout $(v,w) \in E \otimes F$. Comme les vecteurs $v \otimes w$ engendrent $E \otimes F$, on en déduit que f est l'application nulle. Ainsi Ψ est un isomorphisme. ♣

7.1.3 Ecriture d'un vecteur de $E \otimes F$

Nous avons vu que les vecteurs $v \otimes w$ de $E \otimes F$, $v \in E, w \in F$, engendraient l'espace $E \otimes F$. Ainsi, tout vecteur $z \in E \otimes F$ s'écrit :

$$z = \sum_{i \in I} v_i \otimes w_i$$

avec I fini. Nous pouvons toutefois simplifier cette écriture.

Proposition 38 *Soient v et w deux vecteurs non nuls de E et F respectivement. Alors $v \otimes w \neq 0$.*

Démonstration. En effet, comme v et w sont non nuls, il existe des formes linéaires non nulles, $f \in E^*$, $g \in F^*$, telles que

$$f(v) \neq 0, \quad g(w) \neq 0.$$

Soit $\phi : E \times F \to \mathbb{K}$ la forme bilinéaire

$$\phi(v, w) = f(v)g(w).$$

D'après le Théorème **??**, il existe une unique application linéaire

$$h : E \otimes_{\mathbb{K}} F \to \mathbb{K}$$

telle que

$$h(v \otimes w) = \phi(v, w) = f(v)g(w).$$

Comme $\phi(v, w) \neq 0$, on en déduit $h(v \otimes w) \neq 0$ et le vecteur $v \otimes w$ est non nul. ♣

Corollaire 6 *Soient les vecteurs $v \in E$ et $w \in F$. Alors l'équation*

$$v \otimes w = 0$$

implique $v = 0$ ou $w = 0$.

Proposition 39 *Tout vecteur $z \neq 0$ de $E \otimes F$ s'écrit sous le forme*

$$z = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$$

où les vecteurs $\{v_1, \cdots, v_r\}$ sont linéairement indépendants dans E et les vecteurs $\{w_1, \cdots, w_r\}$ sont linéairement indépendants dans F.

Démonstration. Choisissons une écriture de z, $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$, où r est minimal. Si $r = 1$,$z = v \otimes w$. Comme $z \neq 0$, d'après le Corollaire **??**, on a $v \neq 0$ et $w \neq 0$ et donc ces vecteurs sont libres. Supposons $r \geq 2$. Si la famille $\{v_1, \cdots, v_r\}$ est liée, il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs, que nous pouvons écrire sans restreindre la généralité :

$$v_r = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i v_i.$$

Ainsi

$$z = \sum_{i=1}^{r-1} v_i \otimes w_i + v_r \otimes y_r = \sum_{i=1}^{r-1} v_i \otimes w_i + \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i v_i \otimes w_r = \sum_{i=1}^{r-1} v_i \otimes (w_i - \alpha_i w_r).$$

et cette écriture contredit la minimalité de r. Ainsi les vecteurs $\{v_1, \cdots, v_r\}$ sont linéairement indépendants dans E. Supposons à présent que la famille de vecteurs de F, $\{w_1, \cdots, w_r\}$ soit liée. Un raisonnement analogue au précédent conduirait à une contradiction sur la minimalité de r. Ainsi la famille $\{w_1, \cdots, w_r\}$ est libre dans F. ♣

Remarque. Tout vecteur de la forme $z = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$, où les vecteurs $\{v_1, \cdots, v_r\}$ sont linéairement indépendants ainsi que les vecteurs $\{w_1, \cdots, w_r\}$, est non nul. En effet, supposons

$$z = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i = 0.$$

Comme les vecteurs $\{v_1, \cdots, v_r\}$ et $\{w_1, \cdots, w_r\}$ sont linéairement indépendants, il existe des formes linéaires $\{f_1, \cdots, f_r\}$ indépendantes sur E et des formes linéaires $\{g_1, \cdots, g_r\}$ indépendantes sur F telles que $f_j(v_i) = g_j(w_i) = \delta_i^j$. Considérons la forme bilinéaire

$$\psi : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

telle que

$$\psi(v, w) = \sum_{i=1}^{r} f_i(v) g_i(w).$$

D'après le Théorème **??**, cette application se factorise en une application linéaire $f : E \otimes F \to \mathbb{K}$ vérifiant

$$f(z) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} f_i(v_j) g_i(w_j).$$

Ainsi

$$f(z) = r.$$

Or $z = 0$ donc $r = 0$. La décomposition choisie du vecteur nul est donc impossible. On en déduit, en utilisant les résultats de l'exercice 1, que

$$0 = 0 \otimes w = v \otimes 0$$

sont les seules décompositions (réduites) de 0.

Proposition 40 *Soit $\{w_1, \cdots, w_r\}$ une famille libre de vecteurs de F. Alors l'équation dans $E \otimes F$:*

$$\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i = 0$$

avec $v_1, \cdots, v_r \in E$ est équivalente à $v_i = 0$, $i = 1, \cdots, r$.

Démonstration. Comme les vecteurs w_i sont indépendants, il existe des formes linéaires $\{g_1, \cdots, g_r\}$ sur F telles que

$$g_i(w_j) = \delta_i^j.$$

Soient $f_1, \cdots, f_r$ une famille de formes linéaires sur E. Considérons la forme bilinéaire ψ sur $E \times F$ donnée par

$$\psi(v, w) = \sum_{i=1}^{r} f_i(v) g_i(w),$$

avec $(v, w) \in E \times F$. D'après le heorème **??**, il existe une forme linéaire $h : E \otimes F \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $h(v \otimes w) = \psi(v, w)$. On a alors

$$h(\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i) = 0 = \sum_{i,j} f_j(v_i) g_j(w_i) = \sum_{i=1}^{r} f_i(v_i).$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{r} f_i(v_i) = 0$ quelles que soient les formes linéaires f_i. Considérons un indice i_0 et choisissons $f_i = 0$ pour tout $i \neq i_0$. On obtient $f_{i_0}(v_{i_0}) = 0$ quelle que soit la forme linéaire f_{i_0}. Ceci implique $v_{i_0} = 0$ pour tout indice i_0. Ainsi $v_i = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, r$. ♣

7.2 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels de dimension finie

7.2.1 Dimension de $E \otimes F$

On suppose dans tout ce paragraphe que les espaces vectoriels E et F sont de dimension finie.

Théorème 24 *Si E et F sont des espaces de dimension finie, il en est de même de $E \otimes F$ et l'on a*

$$dim E \otimes F = dim E . dim F.$$

Si $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une base de E et $\{f_j\}_{j=1,\ldots,m}$ une base de F alors $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1,..,n\ j=1,\ldots,m}$ est une base de $E \otimes F$.

Démonstration Soit M un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. D'après la Proposition **??**, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F; M)$ des applications bilinéaires de $E \times F$ dans M et l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E \otimes F; M)$ des applications linéaires de $E \otimes F$ dans M sont isomorphes. Comme la dimension de $\mathcal{L}(E, F; M)$ est égale à $\dim E. \dim F. \dim M$, on en déduit que $dim \mathcal{L}(E \otimes F; M) = \dim E. \dim F. \dim M$, d'où

$$\dim E \otimes F = \dim E. \dim F.$$

Considérons une base $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de E et une base $\{f_j\}_{j=1,\ldots,m}$ de F. Par définition du produit tensoriel les vecteurs $e_i \otimes f_j$ engendrent $E \otimes F$, comme il y en a autant que la dimension de $E \otimes F$, ils forment une base de cet espace. ♣

EXERCICE 4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 5. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$? Montrer que $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel complexe. Quelle est sa dimension ?

7.2.2 Isomorphisme entre $End(E)$ et $E^* \otimes E$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Notons $\mathcal{L}(E;F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. Considérons l'application

$$\psi : E^* \times F \to \mathcal{L}(E;F)$$

définie ainsi : soit $f \in E^*$, $v \in E$ et $w \in F$. Alors

$$\psi(f,w)(v) = f(v)w.$$

Cette application est bilinéaire. D'après le Théorème **??**, l'application ψ se factorise en une application linéaire

$$\psi_1 : E^* \otimes F \to \mathcal{L}(E;F)$$

définie par

$$\psi_1 : (f \otimes w) = f(v)w.$$

Soient $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E, $\{e^1, ..., e^n\}$ sa base duale et $\{v_1, ..., v_m\}$ une base de F. Alors $\psi(e^i, v_j)(e_k) = \delta^i_k v_j$. Ainsi ψ_1 envoie la base $\{e^i \otimes v_j\}$ de $E^* \otimes F$ dans la base $\{g_{ij},\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m\}$ de $\mathcal{L}(E;F)$ où g_{ij} est donnée par $g_{ij}(e_k) = \delta^k_i v_j$. Ainsi ψ_1 est un isomorphisme. On a donc montré

Théorème 25 *Soient E et F des espaces de dimension finie. Alors $E^* \otimes F$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E;F)$. En particulier*

$$E^* \otimes E = End(E).$$

EXERCICE 6. Soit En identifiant $E^* \otimes E$ à $End(E)$, comment s'écrit dans $E^* \otimes E$ l'application identique de $End(E)$? On considère la forme linéaire $tr : End(E) \to \mathbb{K}$ qui à un endomorphisme de E fait correspondre sa trace. Ecrire l'application linéaire correspondante $tr : E^* \otimes E \to \mathbb{K}$.

7.3 Sous-espaces et espaces quotients

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement du produit tensoriel par rapport aux sous-espaces vectoriels ou aus espaces vectoriels quotient.

7.3.1 Produit tensoriel de sous-espaces vectoriels

Soient E_1 et F_1 deux sous-espaces vectoriels respectivement de E et F. Les générateurs $v \otimes y$, $v \in E_1, w + ++ \in F_1$ de $E_1 \otimes F_1$ sont dans $E \otimes F$. On en déduit que $E_1 \otimes F_1$ est un sous-espace vectoriel de $E \otimes F$.

7.3.2 Produit tensoriel d'espaces vectoriels quotient

Considérons deux sous-espaces vectoriels $E_1 \subset E$ et $F_1 \subset F$ respectivement de E et F. Les produits tensoriels $E_1 \otimes F$ et $E \otimes F_1$ sont des sous-espaces vectoriels de $E \otimes F$.

Proposition 41 *Les espaces vectoriels* $\dfrac{E}{E_1} \otimes \dfrac{F}{F_1}$ *et* $\dfrac{E \otimes F}{E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1}$ *sont isomorphes.*

Démonstration. Considérons l'application bilinéaire

$$\psi : E \times F \to \frac{E \otimes F}{E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1}$$

donnée par

$$\psi(v, w) = \pi(v \otimes w)$$

où

$$\pi : E \otimes F \to \frac{E \otimes F}{E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1}$$

est la projection canonique. Il est clair que $\psi(v, w) = 0$ pour toutes les paires $(v_1, w) \in E_1 \times F$ et $(v, w_1) \in E \times F_1$. Ainsi ψ induit une application bilinéaire

$$\overline{\psi} : \frac{E}{E_1} \times \frac{F}{F_1} \to \frac{E \otimes F}{E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1}$$

donnée par

$$\overline{\psi}(\overline{v}, \overline{w}) = \psi(v, w)$$

où $\overline{v}$ et $\overline{w}$ désigne les classes des vecteurs v et w dans les espaces quotient respectifs $\dfrac{E}{E_1}$ et $\dfrac{F}{F_1}$. D'après le Théoreme **??**, il existe une application linéaire

$$f : \frac{E}{E_1} \otimes \frac{F}{F_1} \to \frac{E \otimes F}{E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1}$$

telle que

$$f(\overline{v} \otimes \overline{w}) = \overline{\psi}(\overline{v}, \overline{w}) = \psi(v, w).$$

D'après sa définition, ψ est surjective. On en déduit que f est surjective. Pour montrer que f est bijective, nous allons construire l'application inverse. Soit

$$\phi : E \times F \to \frac{E}{E_1} \otimes \frac{F}{F_1}$$

donnée par

$$\phi(v, w) = \overline{v} \otimes \overline{w}.$$

Comme elle est bilinéaire, il existe une application linéaire

$$h : E \otimes F \to \frac{E}{E_1} \otimes \frac{F}{F_1}$$

telle que $h(v \otimes w) = \phi(v, w)$. Comme $\phi(v, w) = 0$ pour toutes les paires $(v_1, w) \in E_1 \times F$ et $(v, w_1) \in E \times F_1$, on en déduit que

$$E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1 \subset \mathrm{Ker} h.$$

D'après le théorème de factorisation, il existe une application linéaire

$$\overline{h} : \frac{E \otimes F}{E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1} \to \frac{E}{E_1} \otimes \frac{F}{F_1}$$

telle que
$$\overline{h}(\overline{v \otimes w}) = h(v \otimes w) = \phi(v, w).$$
Comme on a
$$\overline{h}(f(\overline{v} \otimes \overline{w}) = \phi(\psi(v, w)) = \phi(\pi(v \otimes w)) = \overline{v} \otimes \overline{w}$$
et
$$f(\overline{h}(\overline{v \otimes w}) = \psi(\phi(v, w)) = \overline{v \otimes w}$$
on en déduit que $\overline{h}$ est l'application réciproque de f et f est bijective. ♣

Remarque. Considérons un vecteur de $\dfrac{E}{E_1} \otimes \dfrac{F}{F_1}$ de la forme $\overline{v} \otimes \overline{w}$. Si $f(\overline{v} \otimes \overline{w}) = 0$, alors
$$\overline{\psi}(\overline{v}, \overline{w}) = \psi(v, w) = \pi(v \otimes w) = 0$$
et $v \otimes w \in E_1 \otimes F \oplus E \otimes F_1$. Ainsi $\overline{v} \otimes \overline{w} = 0$. Mais ceci n'est pas suffisant pour conclure à l'injectivité de f car $\dfrac{E}{E_1} \otimes \dfrac{F}{F_1}$ ne possède pas à priori un système de générateurs du type $\overline{v} \otimes \overline{w}$.

EXERCICE 7. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe un isomorphisme
$$\frac{E}{E_1} \otimes \frac{E}{E_2} \simeq \frac{E_1 \otimes E_2}{E_{12} \otimes E_2 \oplus E_1 \otimes E_{12}}$$
où $E_{12} = E_1 \cap E_2$.

7.3.3 Produit tensoriel de sommes directes

Proposition 42 *Soient deux familles finies $(E_i)_{i\in I}$ et $(F_j)_{j\in J}$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors les espaces vectoriels suivants sont isomorphes*
$$(\bigoplus_{i\in I} E_i) \otimes (\bigoplus_{j\in J} F_j) \simeq \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (E_i \otimes F_j).$$

Démonstration. Rappelons que les vecteurs d'une somme directe externe $\bigoplus_{i\in I} E_i$ d'espaces vectoriels sont les suites finies $(v_i)_{i\in I}$ avec $v_i \in E_i$. L'application
$$\psi : (\bigoplus_{i\in I} E_i) \times (\bigoplus_{j\in J} F_j) \to \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (E_i \otimes F_j)$$
définie par
$$\psi((v_i)_{i\in I}, (w_j)_{j\in J}) = (v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$$
est bilinéaire et définit par factorisation une application linéaire
$$f : (\bigoplus_{i\in I} E_i) \otimes (\bigoplus_{j\in J} F_j) \to \bigoplus_{(i,j)\in I\times J} (E_i \otimes F_j)$$
telle que
$$f((v_i)_{i\in I} \otimes (w_j)_{j\in J}) = (v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}.$$

Cette application est surjective. Montrons qu'elle est injective. Si $(v_i)_{i\in I} \otimes (w_j)_{j\in J}$ est dans le noyau de f, alors $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J} = 0$. Supposons que l'un des w_j soit non nul. Alors $v_i = 0$ pour tout $i \in I$. Ainsi $(v_i)_{i\in I} \otimes (w_j)_{j\in J} = 0$ et f est injective. L'application f définit l'isomorphisme cherché. ♣

EXERCICE 8. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de F.

1. Montrer que
$$(E_1 \otimes F) \cap (E_2 \otimes F) = (E_1 \cap E_2) \otimes F.$$
2. Montrer que
$$(E_1 \otimes F) \cap (E \otimes F_1) = E_1 \otimes F_1.$$
3. Montrer que
$$(E_1 \otimes F_1) \cap (E_2 \otimes F_2) = (E_1 \cap E_2) \otimes (F_1 \cap F_2).$$

7.4 Les produits tensoriels $E \otimes F$ et $F \otimes E$

Etant donnés deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, on peut construire les espaces produit tensoriel $E \otimes F$ et $F \otimes E$. Ils ne sont évidemment pas égaux. Toutefois, on a le résultat suivant :

Théorème 26 *Etant donnés deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$, les espaces $E \otimes F$ et $F \otimes E$. sont isomorphes. L'application linéaire*
$$\tau : E \otimes F \to F \otimes E$$
défini par
$$\tau(v \otimes w) = w \otimes v$$
pour tout $v \in E$ et $w \in F$ est un isomorphisme.

Démonstration. L'application
$$\psi : E \times F \to F \otimes E$$
donnée par
$$\psi(v, w) = w \otimes v$$
est bilinéaire. Elle induit une application linéaire
$$\tau : E \otimes F \to F \otimes E$$
vérifiant
$$\tau(v \otimes w) = w \otimes v.$$
Cette application admet une application inverse
$$\phi : F \otimes E \to E \otimes F$$

donnée par
$$\phi(w \otimes v) = v \otimes w.$$
Ainsi τ est l'isomorphisme cherché. ♣

7.5 Produit tensoriel d'applications linéaires

7.5.1 Définition

Soient E_1, E_2, F_1 et F_2 des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Considérons des applications linéaires
$$\begin{array}{c} f_1 : E_1 \to F_1 \\ f_2 : E_2 \to F_2. \end{array}$$
L'application
$$\psi : E_1 \times E_2 \to F_1 \otimes f_2$$
définie par
$$\psi(v_1, v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$$
est bilinéaire. D'après le Théorème **??**, il existe une unique application linéaire $g : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ définie par
$$g(v_1 \otimes v_2) = \psi(v_1, v_2) = f_1(v_1) \otimes f(v_2).$$

Définition 44 *Etant données des applications linéaires*
$$f_1 : E_1 \to F_1 \text{ et } f_2 : E_2 \to F_2,$$
on appelle produit tensoriel de f_1 et f_2, que l'on note $f_1 \otimes f_2$, l'application linéaire
$$f_1 \otimes f_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$$
définie par $(f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$ pour tout $v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$.

Remarque. Cette définition pose, à priori, un problème par rapport à la définition d'un produit tensoriel de deux vecteurs. Si $(v, w) \in E \times F$, nous avons posé
$$v \otimes w = \pi(v, w)$$
la classe du couple (v, w) dans $E \otimes F$. Si $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$, suivant cette définition, $f_1 \otimes f_2$ est la classe du couple (f_1, f_2) dans l'espace $\mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2)$. La Définition **??** présente plutôt $f_1 \otimes f_2$ comme un élément de $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$. Les propositions suivantes vont lever cette ambigüité.

Nous avons défini en début de paragraphe l'application linéaire
$$\begin{array}{rcl} g : E_1 \otimes E_2 & \to & F_1 \otimes F_2 \\ (v_1 \otimes v_2) & \mapsto & f_1(v_1) \otimes f_2(v_2). \end{array}$$

Comme g est définie par les applications linéaires f_1 et f_2, nous allons la noter g_{f_1,f_2}. Soit

$$\Psi : \mathcal{L}(E_1, F_1) \times \mathcal{L}(E_2, F_2) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$$

l'application bilinéaire donnée par

$$\Psi(f_1, f_2) = g_{f_1,f_2}.$$

D'après le Théorème **??**, il existe une application linéaire

$$h : \mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$$

qui est défini par $h(f_1 \otimes f_2) = g_{f_1,f_2}$.

Proposition 43 *L'application linéaire*

$$h : \mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$$

est injective.

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2)$ un vecteur de Ker$h$. Le vecteur U s'écrit comme une combinaison linéaire finie de vecteurs générateurs du produit tensoriel :

$$U = \sum_{i=1}^{p} l_i^1 \otimes l_i^2$$

où $l_i^1 \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ et $l_i^2 \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$. D'après la Proposition **??** , nous pouvons supposer que les applications $\{l_1^1, \cdots, l_p^1\}$ sont indépendantes dans $\mathcal{L}(E_1, F_1)$ et $\{l_1^2, \cdots, l_p^2\}$ indépendantes dans $\mathcal{L}(E_2, F_2)$. Alors

$$h(U) = \sum_{i=1}^{p} h(l_i^1 \otimes l_i^2) = \sum_{i=1}^{p} g_{l_i^1,l_i^2}.$$

Comme $h(U) = 0$, l'application linéaire $\sum_{i=1}^{p} g_{l_i^1,l_i^2}$ est nulle. Donc pour tout $(v_1 \otimes v_2) \in E_1 \otimes E_2$

$$\sum_{i=1}^{p} g_{l_i^1,l_i^2}(v_1 \otimes v_2) = 0.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{p} f_i^1(v_1) \otimes f_i^2(v_2) = 0.$$

Supposons $U \neq 0$. Considérons la famille de F_1 constituée des vecteurs

$$\{l_1^1(v_1), \cdots, l_p^1(v_1)\}.$$

Nous pouvons supposer que v_1 a été choisi tel que au moins l'un des vecteurs $l_i^1(v_1)$ soit non nul. De la famille $\{l_i^1(v_1)\}_{i \in I}$ nous pouvons extraire une famille libre maximale. Supposons que cette famille soit

$$\{l_1^1(v_1), \cdots, l_r^1(v_1)\}.$$

Alors $l_i^1(v_1) = \sum_{j=1}^r a_i^j l_j^1(v_1),\ i = r+1, \cdots, p$. Ainsi

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^p l_i^1(v_1) \otimes l_i^2(v_2) &= \textstyle\sum_{i=1}^r l_i^1(v_1) \otimes l_i^2(v_2) + \sum_{i=r+1}^p l_i^1(v_1) \otimes l_i^2(v_2) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^r l_i^1(v_1) \otimes l_i^2(v_2) + \sum_{i=r+1}^p (\sum_{j=1}^r a_i^j l_j^1(v_1)) \otimes l_i^2(v_2) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^r l_i^1(v_1) \otimes (l_i^2(v_2) + \sum_{k=r+1}^p a_k^i l_k^2(v_2)).\end{aligned}$$

Comme $h(U) = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^r l_i^1(v_1) \otimes (l_i^2(v_2) + \sum_{k=r+1}^p a_k^i l_k^2(v_2)) = 0.$$

Mais la famille $\{l_1^1(v_1), \cdots, l_r^1(v_1)\}$ est libre. Donc, d'après la Proposition **??** on a pour $i = 1, \cdots, r$:

$$l_i^2(v_2) + \sum_{k=r+1}^p a_k^i l_k^2(v_2) = 0$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur $v_2 \in E_2$, les applications linéaires suivantes sont nulles :

$$l_i^2 + \sum_{k=r+1}^p a_k^i l_k^2 = 0.$$

Mais nous avons supposé que les applications linéaires $l_1^1, \cdots, l_p^2$ étaient indépendants. Nous avons donc une contradiction et l'hypothèse de départ $U \neq 0$ ne peut être faite. Ainsi $U = 0$ et l'application h est injective.

Proposition 44 *Si les espaces vectoriels E_1, E_2, F_1, F_2 sont de dimension finie, alors h est un isomorphisme.*

Démonstration. En effet

$$h : \mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2).$$

Or

$$\dim(\mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2)) = \dim E_1 \dim F_1 \dim E_2 \dim F_2$$

et

$$\dim \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2) = \dim E_1 \dim F_1 \dim E_2 \dim F_2.$$

Les deux espaces ont même diemsnion. Comme h est injective, elle est donc bijective.

Corollaire 7 *Sous les hypothèses de la Proposition* **??** *, on peut identifier les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2)$ et $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$. Dans ce cas, le produit tensoriel $f_1 \otimes f_2$ des applications linéaires défini comme un vecteur de $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$ peut être considéré comme un vecteur de $\mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2)$.*

Dans ce cas l'abus de langage est justifié. Si en enlève l'hypothèse de la dimension finie, l'application injective h n'est pas en général surjective et $\mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2, F_2)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$. Dans ce cas il faudra faire très attention à cet abus.

7.5.2 Quelques propriétés

Proposition 45 *Soient les applications linéaires*

$$\begin{array}{ll} f_1 : E_1 \to F_1; & g_1 : F_1 \to G_1 \\ f_2 : E_2 \to F_2; & g_2 : F_2 \to G_2 \end{array}$$

où $E_1, E_2, F_1, F_2, G_1, G_2$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors

$$(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2).$$

Démonstration. Ceci découle directement de la définition du produit tensoriel d'applications linéaires. Soient $v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$. Alors

$$\begin{aligned} (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)(v_1 \otimes v_2) &= (g_1 \circ f_1)(v_1) \otimes (g_2 \circ f_2)(v_2) \\ &= g_1(f_1(v_1)) \otimes g_2(f_2(v_2)) \\ &= (g_1 \otimes g_2)(f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)) \\ &= (g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2) \end{aligned}$$

Les deux applications linéaires $(g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$ et $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2)$ coincident sur des vecteurs générateurs de $E_1 \otimes E_2$. Elles sont donc égales.

EXERCICE 9.

1. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Montrer que φ est injective si et seulement s'il existe une application linéaire $\varphi_1 : F \to E$ telle que $\varphi_1 \circ \varphi = id_E$.
2. En déduire que si les applications linéaires $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ soient injectives alors $f_1 \otimes f_2$ est aussi injective.

Proposition 46 *Soient E_1, E_2, F_1, F_2 des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ des applications linéaires. On a alors*

1. $\mathrm{Im}(f_1 \otimes f_2) = \mathrm{Im} f_1 \otimes \mathrm{Im} f_2$
2. $\mathrm{Ker}(f_1 \otimes f_2) = \mathrm{Ker} f_1 \otimes F_2 + E_1 \otimes \mathrm{Ker} f_2$

Démonstration.

1. Soit v un vecteur de $\mathrm{Im}(f_1 \otimes f_2)$. Il existe un vecteur $u \in E \otimes F$ tel que

$$(f_1 \otimes f_2)(u) = v$$

Or $u = \sum_{i=1}^{p} v_i \otimes w_i$ avec $v_i \in E_1$ et $w_i \in E_2$. Ainsi

$$(f_1 \otimes f_2)(u) = \sum_{i=1}^{p} (f_1 \otimes f_2)(v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{p} f_1(v_i) \otimes f_2(w_i)$$

et ce dernier vecteur appartient à $\mathrm{Im} f_1 \otimes \mathrm{Im} f_2$. Réciproquement si $v \in \mathrm{Im} f_1 \otimes \mathrm{Im} f_2$, alors v se décompose

$$v = \sum_{i=1}^{s} f_1(v_i) \otimes f_2(w_i) = \sum_{i=1}^{s} (f_1 \otimes f_2)(v_i \otimes w_i) = (f_1 \otimes f_2)(\sum_{i=1}^{s} v_i \otimes w_i).$$

et$v \in \mathrm{Im} f_1 \otimes f_2$.

2. Soient π_1 et π_2 les projections canoniques

$$\begin{array}{l} \pi_1 : E_1 \to E_1/\mathrm{Ker} f_1 \\ \pi_2 : E_2 \to E_2/\mathrm{Ker} f_2 \end{array}$$

Les applications linéaires f_1 et f_2 se factorisent

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & F_1 \\ E_1/\mathrm{Ker} f_1 \arrow[ur, "\bar{f}_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_2 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & F_2 \\ E_2/\mathrm{Ker} f_2 \arrow[ur, "\bar{f}_2"'] & \end{tikzcd}$$

et les applications linéaires $\bar{f}_1$ et $\bar{f}_2$ vérifient

$$\begin{array}{l} \bar{f}_1(\pi_1(v_1)) = f_1(v_1) \\ \bar{f}_2(\pi_2(v_2)) = f_2(v_2) \end{array}$$

avec $v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$, et sont injectives. D'après l'exercice **??**, on endéduit que

$$\bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2 : \frac{E_1}{\mathrm{Ker} f_1} \otimes \frac{E_2}{\mathrm{Ker} f_2} \to F_1 \otimes F_2$$

est aussi une application linéaire injective.

Proposition 47 *Soient E_1', E_2' des sous-espaces vectoriels respectivement des espaces E_1 et E_2. Alors l'application linéaire*

$$h : \frac{E_1}{E_1'} \otimes \frac{E_2}{E_2'} \to \frac{E_1 \otimes E_2}{E_1 \otimes E_2' + E_1' \otimes E_2}$$

donnée par $h : \pi_1(v_1) \otimes \pi_2(v_2) = \pi_3(v_1 \otimes v_2)$ où $\pi_1 : E_1 \to E_1/E_1'$, $\pi_2 : E_2 \to E_2/E_2'$, $\pi_3 : E_1 \otimes E_2 \to \frac{E_1 \otimes E_2}{E_1 \otimes E_2' + E_1' \otimes E_2}$ sont les projections canoniques, est un isomorphisme.

On en déduit donc de ce lemme que

$$h : \frac{E_1}{\mathrm{Ker} f_1} \otimes \frac{E_2}{\mathrm{Ker} f_2} \to \frac{E_1 \otimes E_2}{E_1 \otimes \mathrm{Ker} f_2 + \mathrm{Ker} f_1 \otimes E_2}$$

donnée par $h(\pi(v_1) \otimes \pi_2(v_2)) = \pi_3(v_1 \otimes v_2)$ est un isomorphisme. Considérons l'application linéaire

$$g : \frac{E_1 \otimes E_2}{E_1 \otimes \mathrm{Ker} f_2 + \mathrm{Ker} f_1 \otimes E_2} \to F_1 \otimes F_2$$

défini par $g(\pi_3(v_1 \otimes v_2)) = (\bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2) \circ h^{-1}(\pi_3(v_1 \otimes v_2))$. On a alors

$$\begin{array}{ll} g(\pi_3(v_1 \otimes v_2)) & = (\bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2)(h^{-1}(h(\pi_1(v_1) \otimes \pi_2(v_2)) \\ & = \bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2(\pi_1(v_1) \otimes \pi_2(v_2)) \\ & = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \\ & = (f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2.) \end{array}$$

Ainsi $g \circ \pi_3 = f_1 \otimes f_2$. Mais g est injective, donc

$$\mathrm{Ker} f_1 \otimes f_2 = \mathrm{Ker}\pi_3 = E_1 \otimes \mathrm{Ker} f_2 + \mathrm{Ker} f_1 \otimes E_2.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme. On laisse ceci en exercice.

EXERCICE 10. Démontrer le lemme **??**.

7.5.3 Les espaces $E_1^* \otimes E_2^*$ et $(E_1 \otimes E_2)^*$

Considérons le cas particulier $F_1 = F_2 = \mathbb{K}$. Ainsi $\mathcal{L}(E_1, F_1) = E_1^*$ et $\mathcal{L}(E_2, F_2) = E_2^*$. La Proposition **??** s'énonce alors

Proposition 48 *Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors l'application linéaire*

$$h : E_1^* \otimes E_2^* \to (E_1 \otimes E_2)^*$$

définie par $h(f_1, f_2)(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$ est un isomorphisme.

Supposons à présent que $E_1 = E_2 = E$. Alors si E est de dimension finie les espaces $E^* \otimes E^*$ et $(E \otimes E)^*$ sont isomorphes. Lorsque E est de dimension infinie nous savons qu'en général l'application h n'est pas bijective, mais elle est toutefois injective et $h(E^* \otimes E^*)$ est un sous-espace vectoriel de $(E \otimes E)^*$.

Soit $\varphi \in (E \otimes E)^*$ une forme linéaire sur $E \otimes E$ non nulle. Notons par E_φ le sous-espace vectoriel de E défini par

$$E_\varphi = \{v \in E \ / \ \varphi(v \otimes w) = 0, \ \forall w \in E\}.$$

Supposons que φ appartienne à $\mathrm{Im} h = h(E^* \otimes E^*)$. Il existe des formes linéaires f_i et g_i sur E telles que

$$\varphi = h(\sum_{i=1}^{p} f_i \otimes g_i).$$

Si v est un vecteur vérifiant

$$f_i(v) = 0, \ i = 1, \cdots, p$$

c'est-à-dire si $v \in \cap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker} f_i$ alors

$$\varphi(v \otimes w) = h(\sum_{i=1}^{p} f_i \otimes g_i)(v \otimes w) = \sum_{i=1}^{p} f_i(v) \otimes g_i(w) = 0$$

pour tout $w \in E$. Ainsi $v \in E_\varphi$ ce qui montre que, dans ce cas,

$$\cap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker} f_i \subset E_\varphi.$$

On en déduit alors

$$\dim \frac{E}{E_\varphi} \leq p.$$

Proposition 49 *Il existe une forme linéaire ψ sur $E \otimes E$ n'appartenant pas à* $\mathrm{Im} h$.

Considérons une base $\{e_i\}_{i\in I}$ de E (I étant un ensemble d'indices infini). Soient $v, w \in E$. Ils se désomposent de manière unique

$$v = x^i e_i,\ w = y^i e_i.$$

Soit ψ la forme linéaire sur $E \otimes E$ définie par

$$\psi(v \otimes w) = \sum x^i y^i,$$

cette somme est bien entendu finie. Pour cette forme, on a

$$E_\psi = \{v \in E \ / \ \psi(v \otimes w) = 0 \ \forall w \in E\} = \{0\},$$

ce qui implique $\dim \frac{E}{E_\psi} = \infty$. Or pour les formes φ de $h(E^* \otimes E^*)$ on a $\dim \frac{E}{E_\psi} < \infty$. Ainsi $\psi \notin h(E^* \otimes E^*)$.

7.5.4 Cas de la dimension finie. Produit tensoriel de matrices

Supposons à présent que les espaces vectoriels E_1, E_2, F_1, F_2 soient de dimension finie. Posons

$$n_1 = \dim E_1, n_2 = \dim E_2, p_1 = \dim F_1; p_2 = \dim F_2.$$

Nous savons que $\dim E_1 \otimes E_2 = n_1 n_2$ et $\dim F_1 \otimes F_2 = p_1 p_2$. On en déduit que

$$\begin{array}{l}\dim \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2) = (n_1 n_2)(p_1 p_2)\\ \dim \mathcal{L}(E_1 F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2 \otimes F_2) = (n_1 p_1)(n_2 p_2).\end{array}$$

Les deux espaces vectoriels $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)$ et $\mathcal{L}(E_1 F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2 \otimes F_2)$ sont donc de même dimension. On en déduit que l'application injective, définie dans la Proposition **??** est bijective. Il n'y a pas lieu de distinguer $f_1 \otimes f_2$ comme application linéaire de $E_1 \otimes E_2$ à valeurs dans $F_1 \otimes F_2$ du produit tensoriel des vecteurs f_1 et f_2, avec $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$. Comme toutes les applications linéaires opèrent sur des espaces vectoriels de dimension finie, nous pouvons développer le calcul matriciel associé.

Soient $\{e_1, \cdots, e_{n_1}\}$ une base de E_1, $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n_2}\}$ une base de E_2, $\{e'_1, \cdots, e'_{p_1}\}$ une base de F_1, $\{\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_{p_2}\}$ une base de F_2. Une base de $E_1 \otimes E_2$ est alors donnée par la famille $\mathcal{B}_1 = \{e_i \otimes \varepsilon_j\}_{i=1,\cdots,n_1; j=1,\cdots,n_2}$ et une base de $F_1 \otimes F_2$ est donnée par la famille $\mathcal{B}_2 = \{e'_i \otimes \varepsilon'_j\}_{i=1,\cdots,p_1; j=1,\cdots,p_2}$. Pour écrire la matrice de l'application linéaire $f_1 \otimes f_2$ il est nécessaire de choisir un ordre dans l'écriture des vecteurs de base. Rappelons qu'il n'y a pas dans $\mathbb{R}^2$ (ou dans $\mathbb{Z}^2$) des relations d'ordre homogène par rapport aux deux coordonnées, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'ordre privilégié. Nous allons donc choisir un ordre, l'ordre lexicographique, que nous adopterons pour tout calcul matriciel relatif à des produits tensoriels d'applications linéaires. Ordonnons donc la base de $E_1 \otimes E_2$ sous forme lexicographique :

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1 \otimes \varepsilon_1, e_1 \otimes \varepsilon_2, \cdots e_1 \otimes \varepsilon_{n_2}, e_2 \otimes \varepsilon_1, \cdots e_2 \otimes \varepsilon_{n_2}, e_{n_1} \otimes \varepsilon_1, \cdots, e_{n_1} \otimes \varepsilon_{n_2}\}$$

et ordonnons de même la base $\mathcal{B}_2$ de $F_1 \otimes F_2$:

$$\mathcal{B}_2 = \{e'_1 \otimes \varepsilon'_1, e'_1 \otimes \varepsilon'_2, \cdots e'_1 \otimes \varepsilon'_{p_2}, e'_2 \otimes \varepsilon'_1, \cdots e'_2 \otimes \varepsilon'_{p_2}, e'_{p_1} \otimes \varepsilon'_1, \cdots, e'_{p_1} \otimes \varepsilon'_{p_2}\}.$$

Soit $A_1 = (a^j_i))$ la matrice de f_2 relative aux bases $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n_2}\}$ et $\{\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_{p_2}\}$ soit

$$f_2(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{p_2} b^k_j \varepsilon'_k.$$

On a alors

$$\begin{array}{ll} f_1 \otimes f_2(e_i \otimes \varepsilon_j) & = f_1(e_i) \otimes f_2(\varepsilon_j) \\ & = \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{l=1}^{p_2} a_i^k b_j^l e'_k \otimes \varepsilon'_l. \end{array}$$

Ainsi les composantes du vecteur $f_1 \otimes f_2(e_i \otimes \varepsilon_j)$ dans la base ordonnée $\mathcal{B}_2$ est le vecteur :

$$(a_i^1 b_j^1, a_i^1 b_j^2, \cdots, a_i^1 b_j^{p_2}, a_i^2 b_j^1, \cdots, a_i^2 b_j^{p_2}, \cdots, a_i^{p_1} b_j^1, \cdots, a_i^{p_1} b_j^{p_2}).$$

On en déduit la matrice de $f_1 \otimes f_2$ relatives aux bases ordonnées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 b_1^1 & a_1^1 b_2^1 & \cdots & a_1^1 b_{n_2}^1 & \cdots & a_{n_1}^1 b_1^1 & a_{n_1}^1 b_2^1 & \cdots & a_{n_1}^1 b_{n_2}^1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_1^1 b_1^{p_2} & a_1^1 b_2^{p_2} & \cdots & a_1^1 b_{n_1}^{p_2} & \cdots & a_{n_1}^1 b_1^{p_2} & a_{n_1}^1 b_2^{p_2} & \cdots & a_{n_1}^1 b_{n_2}^{p_2} \\ a_1^2 b_1^1 & a_1^2 b_2^1 & \cdots & a_1^2 b_{n_2}^1 & \cdots & a_{n_1}^2 b_1^1 & a_{n_1}^2 b_2^1 & \cdots & a_{n_1}^2 b_{n_2}^1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_1^2 b_1^{p_2} & a_1^2 b_2^{p_2} & \cdots & a_1^2 b_{n_2}^{p_2} & \cdots & a_{n_1}^2 b_1^{p_2} & a_{n_1}^2 b_2^{p_2} & \cdots & a_{n_1}^2 b_{n_2}^{p_2} \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_1^{p_1} b_1^1 & a_1^{p_1} b_2^1 & \cdots & a_1^{p_1} b_{n_2}^1 & \cdots & a_{n_1}^{p_1} b_1^1 & a_{n_1}^{p_1} b_2^1 & \cdots & a_{n_1}^{p_1} b_{n_2}^1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_1^{p_1} b_1^{p_2} & a_1^{p_1} b_2^{p_2} & \cdots & a_1^{p_1} b_{n_2}^{p_2} & \cdots & a_{n_1}^{p_1} b_1^{p_2} & a_{n_1}^{p_1} b_2^{p_2} & \cdots & a_{n_1}^{p_1} b_{n_2}^{p_2} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice peut s'écrire symboliquement

$$\begin{pmatrix} a_1^1 B & a_2^1 B & \cdots & a_{n_1}^1 B \\ a_1^2 B & a_2^2 B & \cdots & a_{n_1}^2 B \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_1^{p_1} B & a_2^{p_1} B & \cdots & a_{n_1}^{p_1} B \end{pmatrix}.$$

Nous noterons cette matrice $A \otimes B$.

EXERCICE 11 Soit $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires suivantes

$$\begin{array}{l} f_1(x,y) = (x+y, 2x-y) \\ f_2(x,y) = (x-y, x+2y, 3x). \end{array}$$

Soient A_1 et A_2 les matrices de f_1 et f_2 relatives aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{R}^3$. Calculer $A_1 \otimes A_2$.

EXERCICE 12
On considère dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $E_1 \otimes E_2$ et $F_1 \otimes F_2$ l'ordre lexicographique inverse

$$(n_1, n_2), (1, 1).$$

Ecrire la matrice de f_1, f_2 relative aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ainsi ordonnées.

Proposition 50 *Le produit tensoriel $A \otimes B$ des matrices A et B vérifient*

1. ${}^t(A \otimes B) = {}^tA \otimes {}^tB$
2. $(A \otimes B)\dot{(}C \otimes D) = AC \otimes BD$ *(on suppose que les produits sont bien définis).*

Démonstration.

1. Si $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & \cdots & a_{n_1}^1 B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{p_1} B & \cdots & a_{n_1}^{p_1} B \end{pmatrix}$ alors ${}^t(A \otimes B) = \begin{pmatrix} a_1^1\ {}^tB & \cdots & a_1^{p_1}\ {}^tB \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_1}^1\ {}^tB & \cdots & a_{n_1}^{p_1}\ {}^tB \end{pmatrix}$ et donc
$$ {}^t(A \otimes B) = {}^tA \otimes {}^tB. $$

2. Soient $f_1 : E_1 \to F_2, f_1 : E_2 \to F_2, f_3 : F_1 \to G_1, f_4 : F_2 \to G_2$ des applications linéaires correspondant aux matrices A_1, A_2, A_3, A_4. Nous savons que
$$ (f_3 \otimes f_4) \circ (f_1 \otimes f_2) = (f_3 \circ f_1) \otimes (f_4 \circ f_2) $$
On en déduit l'écriture matricielle
$$ (A_3 \otimes A_4) \cdot (A_1 \otimes A_2) = A_3 A_1 \otimes A_4 A_2. $$

Corollaire 8 *1. Si A et B sont des matrices inversibles, alors $A \otimes B$ est inversible et*
$$ (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. $$
2. Si A et B sont des matrices orthogonales, alors $A \otimes B$ est aussi une matrice orthogonale.

Démonstration.

1. Supposons que les matrices A et B sont des matrices carrées d'ordre respectivement n et p et inversibles. D'après la proposition précédente
$$ (A \otimes B) \cdot (A^{-1} \otimes B^{-1}) = AA^{-1} \otimes BB^{-1} = I_n \otimes I_p = I_{np}. $$
De même $(A^{-1} \otimes B^{-1}) \cdot (A \otimes B) = I_{np}$. On en déduit $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.
2. Les matrices A et B étant orthogonales, elles vérifient ${}^tA = A^{-1}, {}^tB = B^{-1}$. Comme
$$ {}^t(A \otimes B) = {}^tA \otimes {}^tB \text{ et } (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} $$
on en déduit
$$ {}^t(A \otimes B) = {}^tA \otimes {}^tB = A^{-1} \otimes B^{-1} = (A \otimes B)^{-1} $$
et $A \otimes B$ est aussi orthogonale.

Proposition 51 *Soient A et B des matrices carrées complexes d'ordre n et p respectivement. Soient $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ les valeurs propres de A et $\{\rho_1, \cdots, \rho_p\}$ celles de B. Alors*

1. les valeurs propres de $A \otimes B$ sont les produits $\{\lambda_i \rho_j\}, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, p$, des valeurs propres de Aet de B

2. les valeurs propres de $A \otimes I_p + I_n \otimes B$ sont les sommes $\{\lambda_i + \rho_j\}$.

Démonstration.

1. Comme toute matrice complexe peut se réduire sous forme triangulaire, il existe une matrice inversible P d'ordre n et une matrice inversible Q d'ordre p telle que les matrices
$$A' = P^{-1}AP, B' = Q^{-1}BQ$$
soient des matrices triangulaires supérieures. Alors
$$A' \otimes B' = P^{-1}AP \otimes Q^{-1}BQ = (P^{-1} \otimes Q^{-1}) \cdot (AP \otimes BQ) = (P^{-1} \otimes Q^{-1}) \cdot (A \otimes B) \cdot (P \otimes Q)$$
et donc
$$A' \otimes B' = (P \otimes Q)^{-1} \cdot (A \otimes B) \cdot (P \otimes Q).$$
La matrice $A' \otimes B'$ est donc semblable à $A \otimes B$. Mais
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_n^{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} \rho_1 & d_2^1 & \cdots & d_p^1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_p^{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \rho_p \end{pmatrix}$$
D'où
$$A' \otimes B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 B' & c_2^1 B' & \cdots & c_n^1 B' \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_n^{n-1} B' \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n B' \end{pmatrix}$$
Comme
$$\lambda_i B' = \begin{pmatrix} \lambda_i \rho_1 & \lambda_i d_2^1 & \cdots & \lambda_i d_p^1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_i d_p^{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \rho_p \end{pmatrix}$$
la matrice $A' \otimes B'$ est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont les éléments
$$\{\lambda_1\rho_1 \cdots \lambda_1\rho_p, \cdots \lambda_n\rho_1, \cdots, \lambda_n\rho_p\}$$
de la diagonale.
2. On a également
$$\begin{array}{ll} A' \otimes I_p + I_n \otimes B' & = (P^{-1}AP) \otimes I_p + I_n \otimes (Q^{-1}BQ) \\ & (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}I_pQ) + (P^{-1}I_nP) \otimes (Q^{-1}BQ) \\ & (P \otimes Q)^{-1}) \cdot (A \otimes I_p + I_n \otimes B) \cdot (P \otimes Q), \end{array}$$
et $A' \otimes I_p + I_n \otimes B$ est semblable à $A \otimes I_p + I_n \otimes B$ et ces matrices ont les mêmes valeurs propres. Mais
$$A' \otimes I_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_p & c_2^1 I_p & \cdots & c_n^1 I_p \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_n^{n-1} I_p \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n I_p \end{pmatrix}, \ I_n \otimes B' = \begin{pmatrix} B' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B' \end{pmatrix}$$

et donc $A'\otimes I_p + I_n \otimes B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_p + B' & c_2^1 I_p & \cdots & c_n^1 I_p \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_n^{n-1} I_p \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n I_p + B' \end{pmatrix}$.

Comme $\lambda_i I_p + B' = \begin{pmatrix} \lambda_i + \rho_1 & d_2^1 & \cdots & d_p^1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_p^{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \rho_p \end{pmatrix}$, les valeurs propres de $A'\otimes I_p + I_n \otimes B'$ sont les sommes $\{\lambda_i + \rho_j\}$.

Corollaire 9 *Pour toutes matrices carrées A et B réelles ou complexes d'ordre respectif n et p, on a*

$$det(A\otimes B) = (detA)^p (detB)^n.$$

Démonstration. Considérons, dans tous les cas A et B comme des matrices complexes. Soient $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ les valeurs propres de A et $\{\rho_1, \cdots, \rho_p\}$ celles de B. On sait que

$$detA = \lambda_1 \cdots \lambda_n, \ detB = \rho_1 \cdots \rho_p.$$

Les valeurs propres de $A\otimes B$ étant les produits $\lambda_i \rho_j, \ i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, p$, on a alors

$$\begin{aligned} det(A\otimes B) &= \Pi_{i=1}^n \Pi_{j=1}^p \lambda_i \rho_j = (\Pi_{i=1}^n \lambda_i)^p (\Pi_{j=1}^p \rho_j)^n \\ &= (detA)^p \cdot (detB)^n. \end{aligned}$$

EXERCICE 13 Soient A, B et C des matrices carrées d'ordre n. On se propose de résoudre l'équation matricielle

$$AX - XB = C.$$

1. Montrer que $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ est isomorphe à $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^n$. En déduire que toute équation du type
$$MXN = P$$
où M, N, P sont des matrices carrrées d'ordre n est équivalent à
$$(N^* \otimes M)X = P.$$
2. Montrer que l'équation $AX - XB = C$ est équivalente à
$$(I\otimes A - B \otimes I)X = C.$$
3. On suppose que les valeurs propres de A et B existent et que A et B n'ont pas de valeurs propres communes. Résoudre alors l'équation $AX - XB = C$.

Chapitre 8

Produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels

8.1 Le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$

On suppose dans tout ce paragraphe que chaque E_i, $i = 1, \cdots, k$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

8.1.1 Définition

Soit $V = \mathbb{K}^{E_1 \times \cdots \times E_k}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dont une base est donnée par tous les k-uples $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ où $v_i \in E_i$. Un élément de V s'écrit donc sous la forme d'une somme finie

$$\sum_{\text{finie}} a_{i_1 i_2 \cdots i_k}(v_{i_1}, \cdots, v_{i_k}).$$

Considérons le sous espace W de V engendré par les vecteurs de la forme

$$\begin{cases} (v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i + v_i', v_{i+1}, \cdots, v_k) - (v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_k) - (v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \cdots, v_k), \\ (v_1, \cdots, v_{i-1}, av_i, v_{i+1}, \cdots, v_k) - a(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_k) \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{K}$ et $v_i, v_i' \in E_i$ et ceci pour $i = 1, \cdots, k$.

Notons, que comme $\mathbb{K}$ est un corps infini et si l'un des espaces vectoriels E_i n'est pas de dimension zéro, alors V est un espace vectoriel de dimension infinie.

Définition 45 *Le produit tensoriel $E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1, \cdots, E_k$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel V/W.*

On notera $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ la classe d'équivalence, dans V/W de $(v_1, \cdots, v_k)$ c'est-à-dire si

$$\pi : V = \mathbb{K}^{E_1 \times \cdots \times E_k} \to V/W$$

est la projection linéaire canonique, alors

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = \pi(v_1, \cdots, v_k).$$

Comme la famille des $(v_1, \cdots, v_k)$ est une base de V, les vecteurs $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ engendrent le produit tensoriel $V/W = E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$. Ainsi tout vecteur de $E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$ s'écrit comme une somme finie :

$$X = \sum_{\text{finie}} \lambda_{i_1 \cdots i_k} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}.$$

Un vecteur du type $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ sera dit factorisable.

> **EXERCICE 1** On dit qu'une fonction
>
> $$f : E_1 \times \cdots \times E_k \to \mathbb{K}$$
>
> est à support fini si elle est nulle sur tous les éléments $(v_1, \cdots, v_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ sauf sur un nombre fini d'entre eux. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces fonctions.
>
> 1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
> 2. Montrer qu'une base consiste de toutes les fonctions
>
> $$\delta_{v_1, \cdots, v_k}$$
>
>   égale à 1 au point $(v_1, \cdots, v_k)$ et 0 ailleurs.
> 3. Montrer que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $V = \mathbb{K}^{E_1 \times \cdots \times E_k}$.
> 4. Montrer que si $\mathbb{K}$ est infini et si l'un des espaces E_i est non nul, alor $\mathcal{M}$ est de dimension infini.

8.1.2 Propriété caractéristique du produit tensoriel

Notons

$$t : E_1 \times \cdots \times E_k \to E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$$

l'application linéaire composée de l'injection linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_k$ dans V et de la projection linéaire canonique $\pi : V \to V/W$. Cette application vérifie

$$t(v_1, \cdots, v_k) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

pour tout $(v_1, \cdots, v_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$. Il est clair que les vecteurs $\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k\}$ lorsque $(v_1, \cdots, v_k)$ parcourent l'espace vectoriel produit $(v_1, \cdots, v_k)$, engendrent le produit vectoriel $E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$ mais sont en général liés.

Proposition 52 *L'application*

$$t : E_1 \times \cdots \times E_k \to E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$$

définie par

$$t(v_1, \cdots, v_k) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

est k-linéaire

Démonstration. On a, pour tout $v_i, v_i' \in E_i$ et $a, b \in \mathbb{K}$:

$$t(v_1, ., v_{i-1}, av_i + bv_i', v_{i+1}, .., v_k) = \pi(v_1, ., v_{i-1}, av_i + bv_i', v_{i+1}, .., v_k)$$

D'après la définition de W :

$$\begin{aligned} \pi(v_1, ., v_{i-1}, av_i + bv_i', v_{i+1}, .., v_k) &= \pi(a(v_1, ., v_i, .., v_k) + b(v_1, ., v_i', .., v_k)) \\ &= a\pi(v_1, ., v_i, .., v_k) + b\pi(v_1, ., v_i', .., v_k) \\ &= at(v_1, ., v_i, .., v_k) + bt(v_1, ., v_i', .., v_k) \end{aligned}$$

et donc

$$t(v_1, ., v_{i-1}, av_i + bv_i', v_{i+1}, .., v_k) = at(v_1, ., v_i, .., v_k) + bt(v_1, ., v_i', .., v_k)$$

ce qui montre que t est k-linéaire. ♣

Théorème 27 *Pour tout espace vectoriel M sur $\mathbb{K}$ et toute application multilinéaire*

$$\phi : E_1 \times \cdots \times E_k \to M,$$

il existe une unique application linéaire

$$\psi : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \to M$$

telle que

$$\phi = \psi \circ t.$$

Ceci se traduit en disant que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_k \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "\phi"'] & E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \arrow[d, "\psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Démonstration. Considérons l'application linéaire

$$g : V \to M$$

définie par $g(v_1, \cdots, v_k) = \phi(v_1, \cdots, v_k)$. Cette application linéaire est bien définie car on connait sa valeur sur tous les vecteurs de base de V. Comme ϕ est multilinéaire, on voit facilement que

$$W \subset Ker(g).$$

Ainsi g induit une application linéaire h sur l'espace quotient :

$$h : V/W \to M$$

telle que $h(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = g(v_1, \cdots, v_k)$. D'où le théorème. ♣

EXERCICE 2 Notons $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; M)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires de $E_1 \times \cdots \times E_k$ dans M et $\mathcal{L}(V; M)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V dans M où E_i, M, V sont des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Montrer que l'on a l'identification

$$\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; M) = \mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k; M).$$

EXERCICE 3 Montrer que si $v_i = 0$ alors $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = 0$. Montrer que si $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k = 0$ alors l'un des v_i est nul. Pour montrer ce dernier résultat on pourra supposer que tous les vecteurs $v_i \in E_i$ sont non nuls, considérer des éléments $f_i^* \in E_i^*$ vérifiant $f_i(v_i) = 1$ et utiliser l'application $\phi \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; \mathbb{K})$ donnée par $\phi(v_1, \cdots, v_k) = f_1(v_1) \cdots f_k(v_k)$.

8.1.3 Propriété universelle du produit tensoriel

Théorème 28 *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$t' : E_1 \times \cdots \times E_k \to V$$

une application k-linéaire surjective. Supposons que pour toute application k-linéaire

$$\phi : E_1 \times \cdots \times E_k \to M$$

on ait la factorisation

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_k \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "\phi"'] & V \arrow[d, "f'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

avec f' linéaire. Alors V est isomorphe au produit tensoriel $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$.

Démonstration. Si $M = E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ et si ϕ est l'application k-linéaire t, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_k \arrow[r, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & V \arrow[d, "f'"] \\ & E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \end{tikzcd}$$

et donc $f'(t'(v_1, \cdots, v_k)) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$. De même, en prenant pour M l'espace vectoriel V, on récupère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_k \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "t'"'] & E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \arrow[d, "f\text{''}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

et $f\text{''}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = t'(v_1, \cdots, v_k)$. D'où

$$f'(f\text{''}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

et

$$f\text{''}(f'(t'(v_1, \cdots, v_k).$$

D'où

$$f'(f\text{''}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) = t'(v_1, \cdots, v_k).$$

D'où

$$f'(f\text{''}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k).$$

Comme t' est surjective, on en déduit que $f\text{''} \circ f' = Id_V$. ♣

8.2 Cas de la dimension finie

Nous allons étudier dans ce paragraphe, le produit tensoriel d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

Théorème 29 *Si chacun des espaces vectoriels E_i est de dimension finie, alors $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ est aussi de dimension finie et l'on a :*

$$\dim(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k) = \dim(E_1) \cdot \dim(E_2) \cdots \dim(E_k).$$

Démonstration. Si l'un des espaces E_i est réduit à $\{0\}$, alors , d'après l'exercice 3, le produit tensoriel $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ est nul. Le théorème est dans ce cas démontré. Supposons donc que chacun des espaces E_i soit non nul. D'après l'identification

$$\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; M) = \mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k; M)$$

qui est vraie pour tout espace vectoriel M, on déduit en particulier

$$\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k; \mathbb{K})$$

soit

$$\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; \mathbb{K}) = (E_1 \otimes \cdots \otimes E_k)^*.$$

Nous avons vu au chapitre 2 que

$$\dim(\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_k; \mathbb{K}) = \dim(E_1) \cdots \dim(E_k) \dim(\mathbb{K}) = \dim(E_1) \cdots \dim(E_k).$$

Comme $\dim(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k)^* = \dim(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k)$, on en déduit le résultat. ♣

Proposition 53 *Soit* $\{v_1^i, v_2^i, \cdots, v_{n_i}^i\}$ *une base de* E_i *pour* $i = 1, \cdots, k$. *Alorsla famille*

$$\{v_{i_1}^1 \otimes v_{i_2}^2 \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^k, \quad i_j = 1, \cdots, n_j, \ j = 1, \cdots, k\}$$

est une base de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$.

Démonstration Il est clair que, d'après la multilinéarité de l'application t définie dans la Proposition **??**, la famille $\{v_{i_1}^1 \otimes v_{i_2}^2 \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^k\}$ engendre $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$. Comme la cardinalité de cette famille est égale à la dimension du produit tensoriel, on en déduit le résultat. ♣.

EXERCICE 4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie au moins égale à 4. Soit $\{e_i\}$ une base de E. Montrer que le vecteur de $E \otimes E$ égal à $e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_4$ n'est pas factorisable.

EXERCICE 5 Soient $X_1, \cdots, X_k$ des ensembles finis. On note $F(X_i)$ l'espace vectoriel des applications sur X_i à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$. Montrer que

$$F(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k) = F(X_1) \otimes F(X_2) \otimes \cdots \otimes F(X_k).$$

8.3 Les produits tensoriels $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$, $E_1(\otimes E_2 \otimes E_3)$ et $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$

Nous avons défini en début de chapitre, le produit tensoriel de trois espaces vectoriels $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$. Mais en utilisant la définition du produit tensoriel de deux espaces vectoriels, nous pouvons construire aussi l'espace vectoriel $E_1 \otimes E_2$ et ensuite le produit tensoriel de cet espace par E_3, c'est-à-dire l'espace $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$. Nous pouvons également construire $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il existe des isomorphismes canoniques entre ces différents espaces vectoriels.

8.3.1 L' isomorphisme $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$

Théorème 30 *Les espaces vectoriels* $E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$ *et* $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ *sont canoniquement isomophes, l'isomorphisme étant donné par*

$$f(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$$

pour tout $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2, v_3 \in E_3$.

Démonstration L'application

$$t : E_2 \times E_3 \to E_2 \otimes E_3$$

définie par $t(v_2, v_3) = v_2 \otimes v_3$ est bilinéaire. Il s'en suit que l'application

$$t' : E_1 \times E_2 \times E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

définie par $t'(v_1, v_2, v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ est trilinéaire. Cette application se factorise en une application linéaire

$$g : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

définie par

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3).$$

Inversement, pour chaque vecteur $v_1 \in E_1$, considérons l'application

$$\phi_{v_1} : E_2 \times E_2 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

définie par

$$\phi_{v_1}(v_2, v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$$

pour tout $v_2 \in E_2$ et $v_3 \in E_3$. Cette application ϕ_{v_1} est bilinéaire. Elle se factorise en une application linéaire

$$f_{v_1} : E_2 \otimes E_3 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

vérifiant

$$f_{v_1}(v_2 \otimes v_3) = \phi_{v_1}(v_2, v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

Considérons présent l'application

$$\psi : E_1 \times (E_2 \otimes E_3) \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

définie par

$$\psi(v_1, X) = f_{v_1}(X)$$

pour tout $v_1 \in E_1$ et $X \in E_2 \otimes E_3$. Elle est linéaire sur chaque argument, elle est donc bilinéaire. Elle se factorise en une application linéaire

$$f : E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

vérifiant

$$f(v_1 \otimes X) = \psi(v_1, X) = f_{v_1}(X).$$

En particulier, on a

$$f(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = f_{v_1}(v_2 \otimes v_3)) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

On en déduit

$$f \circ g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = f(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

Ainsi $f \circ g$ coïncide avec l'identité de $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ sur les vecteurs générateurs de $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$. On a donc $f \circ g = Id$. De même

$$g \circ f(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$$

ce qui implique $g \circ f = Id$. Ainsi f est l'isomorphisme cherché. ♣

8.3.2 L' isomorphisme $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$

De manière identique, on montre

Théorème 31 *Les espaces vectoriels $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ et $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ sont canoniquement isomophes, l'isomorphisme étant donné par*

$$h((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$$

pour tout $v_1 \in E_1, v_2 \in E_2, v_3 \in E_3$.

Conséquences.

1. Les isomorphismes précédents permettent en fait d'éliminer les parenthèses et on écrira
$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 = E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$
car l'identification des isomorphismes f et h définis dans les théorèsmes précédents, aux applications identités, ne posent en général aucun problème.
2. Cette identification se translate dans l'écriture du produit tensoriel des vecteurs. C'est ainsi que l'on aura
$$v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3.$$

La proposition précédente se généralise facilement : tous les produit $(E_1 \otimes E_2) \otimes (E_3 \cdots \otimes E_k)$ ou bien avec n'importe quel arrangement des parenthèses sera identifié avec $E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_k$, simplement en omettant les parenthèses.

8.4 Les produits tensoriels $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ et $E_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\sigma(k)}$

Soit Σ_k le groupe symétrique de degré k (le groupe des permutations de $\{1, \cdots, k\}$).

Proposition 54 *Pour chaque permutation $\sigma \in \Sigma_k$, l'application linéaire*

$$f_\sigma : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \to E_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\sigma(k)}$$

définie par

$$f_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

pour tout $v_i \in E_i,\ i = 1, \cdots k$, est un isomorphisme.

Démonstration. Considérons l'application

$$\psi_\sigma : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \to E_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\sigma(k)}$$

donnée par

$$\psi_\sigma(v_1, \cdots, v_k) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Elle est k-linéaire. D'après le Théorème **??**, ψ se factorise en une application linéaire : il existe une application linéaire
$$f_\sigma : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \to E_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\sigma(k)}$$
vérifiant
$$f_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \psi_\sigma(v_1, \cdots, v_k) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$
De même, l'application
$$\psi'_{\sigma^{-1}} : E_{\sigma(1)} \times \cdots \times E_{\sigma(1)} \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$$
étant k-linéaire, il existe une application linéaire
$$g_{\sigma^{-1}} : E_{\sigma(1)} \times \cdots \times E_{\sigma(1)} \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$$
telle que
$$g_{\sigma^{-1}}(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k.$$
Les applications f_σ et $g_{\sigma^{-1}}$ sont inverses l'une de l'autre, on en déduit que ce sont des isomorphismes.

EXERCICE 6 En définissant correctement la composition $f_\sigma \circ f_\tau$ pour $\sigma, \tau \in \Sigma_k$, montrer que l'on a
$$f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma\tau}.$$

Remarque. Contrairement au cas précédent, où l'identification des isomorphismes à l'identité se résumait à supprimer les parenthèses, on prendra garde de ne pas écrire $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k = E_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\sigma(k)}$. Cette écriture peut amener à des confusions désastreuses si certains facteurs sont égaux.

8.5 Produit tensoriel d'applications multilinéaires

Dans le chapitre précédent nous avons défini le produit tensoriel de deux applications linéaires. Nous allons généraliser en considérant le produit tensoriel d'un nombre quelconque d'applications linéaires ainsi que le produit tensoriel d'applications bilinéaires ou multilinéaires.

8.5.1 Produit tensoriel d'applications linéaires

Considérons les applications linéaires
$$f_i : E_i \to F_i$$
pour $i = 1, \cdots, n$ où E_i et F_i sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'application
$$\psi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F_1 \otimes \cdots \otimes F_n$$
donnée par
$$\psi(v_1, \cdots, v_n) = \varphi_1(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(v_n)$$
est n-linéaire. Par factorisation on en déduit qu'il existe une application linéaire notée $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ et définie par
$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)$$

Notons que cette application linéaire $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ est dans l'espace $\mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n; F_1 \otimes \cdots \otimes F_n)$ et non, comme la notation pourrait le suggérer, dans le produit tensoriel $\mathcal{L}(E_1; F_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(E_n; F_n)$. Mais comme pour le cas $n = 2$ on montre qu'il existe une application linéaire injective :

$$i : \mathcal{L}(E_1; F_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(E_n; F_n) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n; F_1 \otimes \cdots \otimes F_n).$$

Mais si tous les espaces E_i, F_i sont de dimension finie, alors les deux espaces $\mathcal{L}(E_1; F_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(E_n; F_n)$ et $\mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n; F_1 \otimes \cdots \otimes F_n)$ sont de même dimension l'injection i est un isomorphisme. Dans ce cas la confusion disparaît.

EXERCICE 7 Soient E_i, F_i, G_i $i = 1 \cdots, n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient, pour $i = 1 \cdots, n$ des applications linéaires $f_i : E_i \to F_i$, $g_i : F_i \to G_i$ des applications linéaires.

1. Montrer que $(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) \circ (f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (g_1 \circ f_1) \otimes \cdots \otimes (g_n \circ f_n)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \mathrm{Im} f_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Im} f_n$.
3. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \sum_{i=1}^{n} E_1 \otimes \cdots \otimes E_{i-1} \otimes \mathrm{Ker} f_i \otimes E_{i+1} \otimes \cdots \otimes E_n.$$

EXERCICE 8 Soient E_1, E_2, F_1, F_2 des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f_i : E_i \to F_i$ des applications linéaires pour $i = 1$ et 2. On note par $f_i^* : F_i^* \to E_i^*$ les applications duales. Montrer que :

$$(f_1 \otimes f_2)^* = f_1^* \otimes f_2^*.$$

8.5.2 Produit tensoriel d'applications bilinéaires

Considérons deux applications bilinéaires $\varphi_1 : E_1 \times E_2 \to G_1$ et $\varphi_2 : F_1 \times F_2 \to G_2$ où $E_1, E_2, F_1, F_2, G_1, G_2$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Proposition 55 *Il existe une application bilinéaire notée $\varphi_1 \otimes \varphi_2$:*

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : (E_1 \otimes F_1) \times (E_2 \otimes F_2) \to (G_1 \otimes G_2)$$

vérifiant $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) = \varphi_1(v_1, v_2) \otimes \varphi_2(w_1, w_2)$ pour tous $v_i \in E_i, w_i \in F_i, i = 1, 2$. Cette application est appelée le produit tensoriel de φ_1 par φ_2.

Démonstration. Comme φ_1 et φ_2 sont des applications bilinéaires, d'après le Théorème **??** il existe deux applications linéaires

$$f_1 : E_1 \otimes E_2 \to G_1, \ \ f_2 : F_1 \otimes F_2 \to G_2$$

vérifiant $f_1(v_1 \otimes v_2) = \varphi_1(v_1, v_2)$ et $f_2(w_1 \otimes w_2) = \varphi_2(w_1, w_2)$. Le produit tensoriel $f_1 \otimes f_2)$ est une application linéaire :

$$f_1 \otimes f_2 : (E_1 \otimes E_2) \otimes (F_1 \otimes F_2) \to G_1 \otimes G_2.$$

Mais les espaces $(E_1 \otimes E_2) \otimes (F_1 \otimes F_2), E_1 \otimes E_2 \otimes F_1 \otimes F_2, E_1 \otimes F_1 \otimes E_2 \otimes F_2, (E_1 \otimes F_1) \otimes (E_2 \otimes F_2)$ sont d'après le paragraphe précédent tous isomorphes. Soit l'isomorphisme $h : (E_1 \otimes F_1) \otimes (E_2 \otimes F_2) \rightarrow (E_1 \otimes E_2) \otimes (F_1 \otimes F_2)$ il vérifie en particulier :

$$h((v_1 \otimes w_1) \otimes (v_2 \otimes w_2)) = (v_1 \otimes v_2) \otimes (w_1 \otimes w_2).$$

Posons

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 = (f_1 \otimes f_2) \circ h$$

Cette application vérifie bien $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) = \varphi_1(v_1, v_2) \otimes \varphi_2(w_1, w_2)$ pour tous $v_i \in E_i, w_i \in F_i, i = 1, 2.$♣

EXERCICE 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini et soient φ_1 et φ_2 deux formes bilinéaires sur E. Montrer que $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ est non dégénérée si φ_1 et φ_2 sont aussi non dégénérées.

EXERCICE 10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un isomorphisme canonique

$$E^* \otimes E^* \otimes \cdots \otimes E^* \rightarrow (E \otimes E \otimes \cdots \otimes E)^*.$$

EXERCICE 11 Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. On considère trois espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3.

1. Montrer que $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, E_3)$ coïncide avec l'espace $\mathcal{L}(E_1, E_2; E_3)$ des applications bilinéaires $E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$.
2. Montrer qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, E_3) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, E_3)).$$

Chapitre 9

L'algèbre tensorielle $T(E)$

9.1 L'algèbre tensorielle $T(E)$ attachée à un espace vectoriel E

9.1.1 L'espace vectoriel gradué $T(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Posons, pour simplifier les écritures, dès que $n > 1$

$$E^{\otimes^n} = E \otimes \cdots \otimes E$$

le produit tensoriel de n exemplaires de E. Par convention, nous poserons aussi :

$$E^{\otimes^0} = \mathbb{K} \text{ et } E^{\otimes^1} = E.$$

Nous pouvons considérer la somme directe externe notée $T(E)$ de tous ces espaces vectoriels

$$T(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E^{\otimes^n}$$

Définition 46 *On appelle tenseur sur E, les vecteurs X de $T(E)$. S'il existe k tel que $X \in E^{\otimes^k}$, le tenseur X est dit homogène de degré k. Si X est un tenseur homogère de degré k du type $X = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, alors X est dit homogène de degré k décomposable ou factorisable.*

Ainsi tout tenseur X est une somme finie de tenseurs homogènes

$$X = X_0 + \cdots + X_k$$

avec $X_i \in E^{\otimes^i}$, $i = 1, \cdots, k$. Le plus grand indice k tel que $X_k \neq 0$ dans la décomposition de X, est appelé le degré de X. De plus, chaque X_i s'écrit comme une somme finie de tenseurs factorisables

$$X_i = \sum_{finie} a_{j_1 \cdots j_i} v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_i}$$

où $v_{j_k} \in E$.

Rappelons brièvement la notion d'espace vectoriel gradué par un groupe abélien.

Définition 47 *Soit Γ un groupe abélien (noté additivement). Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est dit Γ-gradué, si pour chaque $\gamma \in \Gamma$, il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V_γ tel que V soit la somme directe externe*

$$V = \sum_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma.$$

D'après la définition de la somme directe externe, V s'identifie à l'ensemble des fonctions sur Γ vérifiant

$$f(\gamma) \in V_\gamma, \ \forall \gamma \in \Gamma$$

et $f(\gamma) = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments $\gamma \in \Gamma$. Si $V = \sum_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ est un espace vectoriel Γ-gradué, on appelle support de la graduation le sous-ensemble de Γ

$$\text{Supp } \Gamma = \{\gamma \in \Gamma \ / \ V_j \neq \{0\}\}.$$

En général le support n'est pas un sous-groupe de Γ.

Proposition 56 *Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. L'espace vectoriel*

$$T(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E^{\otimes^n}$$

est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué dont le support est égal $\mathbb{N}$.

Démonstration. Posons $E^{\otimes^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$. Alors $T(E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E^{\otimes^n}$ ce qui donne la $\mathbb{Z}$-graduation. Si l'espace vectoriel E n'est pas trivial, alors les produits tensoriels $E^{\otimes^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont non nuls et le support de la graduation coïncide avec $\mathbb{N}$.

9.1.2 Homomorphismes graduées

Si $V = \sum_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ est un espace vectoriel gradué, il existe un ensemble naturel d'automorphismes linéaires de V défini par le dual Γ^* du groupe Γ. Rappelons que Γ^* est l'ensemble des caractères de Γ, c'est-à-dire des morphismes

$$\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$$

à valeurs dans le groupe $\mathbb{C}^*$. Comme Γ est supposé abélien fini, Γ^* est un groupe isomorphe à Γ. Supposons que V soit un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Alors si χ est un élément de Γ^*, l'application linéaire $\widetilde{\chi}$

$$\widetilde{\chi} : V \to V$$

définie par

$$\widetilde{\chi}(X_\gamma) = \chi(\gamma) X_\gamma$$

pour tout vecteur homogène X_γ est un automorphisme de V. Cet automorphisme a la propriété suivante : l'image d'une composant homogène est contenue dans une composante homogène. Plus généralement, un endomorphisme $f : V = \sum_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma \to V = \sum_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ est dit homogène s'il existe un automorphisme φ du groupe Γ tel que $f(V_\gamma) \subset V_{\varphi(\gamma)}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. S'il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\varphi(\gamma) = \gamma\gamma_0$ pour tout γ alors f est dit homogène de degré γ_0. Cette définition prend tout son sens lorsque $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $\varphi(\gamma) = \varphi + k$ (ici la loi de Γ est notée additivement).

Par exemple, dans l'espace vectoriel gradué $T(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E^{\otimes^n}$, fixons un vecteur $v_0 \in E$ et soit f l'application linéaire

$$f : T(E) \to T(E)$$

définie par

$$f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_0 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

pour tout $v_1, \cdots, v_n \in E$. Comme f est linéaire et définie sur les vecteurs générateurs des composantes homogènes, f est bien définie. Par définition

$$f(E^{\otimes n}) \subset f(E^{\otimes n+1}) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Si $n = 0$, alors $E^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ et nous poserons

$$f(\alpha) = \alpha \otimes v_0 = \alpha v_0.$$

Ainsi f est un endomorphisme gradué de $T(E)$ de degré 1.

9.1.3 Cas de la dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base de E. Nous avons vu, dans le chapitre 10, que dans ce cas $E^{\otimes k}$ est de dimension p^k et une base de $E^{\otimes k}$ est donnée par la famille de vecteurs factorisables

$$\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}, i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, p\}\}.$$

Comme $T(E)$ est la somme directe externe des espaces $E^{\otimes^k}$, on en déduit que $T(E)$ est un espace vectoriel, de dimension infinie, mais admettant comme base la famille

$$\{\{1\}, \{e_1, \cdots, e_p\}, \cdots \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}_{i_1,\cdots,i_k\in\{1,\cdots,p\}}, \cdots\}.$$

Ainsi tout tenseur $X \in T(E)$ est une combinaison linéaire finie de ces vecteurs :

$$X = \alpha + \sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \cdots + \sum_{i_1,\cdots,i_k\in\{1,\cdots,p\}} a_{i_1\cdots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}.$$

Les coefficients $\alpha, a_1, \cdots, a_p, \cdots, a_{i_1\cdots i_k}$ sont appelés es coefficients de X dans cette base.

9.1.4 L'algèbre tensorielle $T(E)$

Rappelons qu'une structure d'algèbre est donnée par un couple (A, μ) où A est un espace vectoriel et μ une application bilinéaire $\mu : A \times A \to A$ appelée la multiplication de A.

Proposition 57 *Il existe sur l'espace vectoriel $T(E)$ une unique structure d'algèbre défini par l'application bilinéaire μ*

$$\mu_{T(E)} : T(E) \times T(E) \to T(E)$$

telle que

$$\mu_{T(E)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l$$

pour tous $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in E^{\otimes^k}$ et $v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l \in E^{\otimes^l}$ et tout couple (k,l). Munie de cette structure $T(E)$ est appelée l'algèbre tensorielle de E.

Démonstration. Fixons des vecteurs $v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l$ dans E. L'application

$$\psi_{v'_1,\cdots,v'_l;k} : E^k \to T(E)$$

définie par

$$\psi_{v'_1,\cdots,v'_l;k}(v_1, \cdots, v_k) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l$$

est k-linéaire. Il existe donc une application linéaire

$$f_{v'_1,\cdots,v'_l;k} : E^{\otimes^k} \to T(E)$$

vérifiant

$$f_{v'_1,\cdots,v'_l;k}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \psi_{v'_1,\cdots\otimes,v'_l;k}(v_1, \cdots, v_k).$$

Pour $k = 0$, cette application est donnée par

$$f_{v'_1,\cdots,v'_l;0}(a) = av'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l$$

pour $a \in \mathbb{K}$ (on a identifié $E^{\otimes^0}$ à $\mathbb{K}$). Cette suite d'applications linéaires indexée par k définit une application linéaire graduée (de degré l)

$$h_{v'_1,\cdots,v'_l} : T(E) \to T(E)$$

telle que la restriction à chaque composante homogène $E^{\otimes^k}$ coïncide avec $f_{v'_1,\cdots,v'_l;k}$. Considérons à présent l'application

$$\rho_l : E^l \to \mathcal{L}(T(E))$$

à valeurs dans l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel $T(E)$ définie par

$$\rho_l(v'_1, \cdots, v'_l) = h_{v'_1,\cdots,v'_l}.$$

Cette application étant l-linéaire, elle se factorise en une application linéaire

$$g_l : E^{\otimes^l} \to \mathcal{L}(T(E))$$

vérifiant $g_l(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l) = h_{v'_1,\cdots,v'_l}$. Cette suite g_l définie une application linéaire

$$g : T(E) \to \mathcal{L}(T(E))$$

telle que la restriction à $E^{\otimes^l}$ soit égale à g_l. On définit alors la multiplication dans $T(E)$ par l'application bilinéaire

$$\mu : T(E) \times T(E) \to T(E)$$

définie par $\mu(X,Y) = g(Y)(X)$. Par construction

$$\begin{aligned}\mu(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k, v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l) &= g_l(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\\ &= h_{v'_1,\cdots,v'_l}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\\ &= f_{v'_1,\cdots,v'_l;k}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)\\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l\end{aligned}$$

qui correspond à la condition demandée. Cette application μ étant connue sur les générateurs de $T(E)$, elle est donc unique.

Proposition 58 *L'algèbre tensorielle $(T(E), \mu_{T(E)})$ est associative unitaire.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la relation d'associativité sur les tenseurs factorisables qui engendrent $T(E)$. Dans ce cas l'associativité découle directement de la définition de $\mu_{T(E)}$. Quant à l'unité, nous avons posé dans la démonstration précédente

$$f_{v'_1,\cdots,v'_l;0}(a) = av'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l$$

en particulier $f_{v'_1,\cdots,v'_l;0}(1) = v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l$ ce qui implique

$$\mu_{T(E)}(1, v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k.$$

Proposition 59 *L'algèbre associative unitaire $(T(E), \mu_{T(E)})$ est $\mathbb{Z}$-graduée.*

Dire que l'algèbre $(T(E), \mu_{T(E)})$ est une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée signifie que, en tant qu'espace vectoriel, $T(E)$ est un espace $\mathbb{Z}$-gradué

$$T(E) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} E^{\otimes^n}$$

(dont le support est $\mathbb{N}$), et que l'on a pour tout couple (k,l) d'entiers dans $\mathbb{N}$:

$$\mu_{T(E)}(E^{\otimes^k}, E^{\otimes^l}) \subset E^{\otimes^{k+l}}.$$

Cette dernière relation se déduit directement de la définition de $\mu_{T(E)}$.

9.2 Représentations de l'algèbre $T(E)$

9.2.1 Cas où E est de dimension 1

Dans ce cas $E^{\otimes^n}$ est de dimension 1 pour tout $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Si $\{e\}$ est une base de E, alors $E^{\otimes^n}$ admet pour base $\{e \otimes \cdots \otimes e\}$. Tout tenseur appartenant à $T(E)$ s'écrit donc de manière unique

$$X = a_0 1 + a_1 e \otimes e + \cdots a_l e \otimes e \otimes \cdots \otimes e$$

dès que X est de degré l.

Proposition 60 *L'algèbre tensorielle $(T(E), \mu_{T(E)})$ d'un espace vectoriel de dimension 1 est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{K}[U]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Soit $f : T(E) \to \mathbb{K}[\chi]$ l'application linéaire définie sur la base de $T(E)$ par

$$\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(e) = U \end{array}$$

et plus généralement si $e^{\otimes^k} = e \otimes \cdots \otimes e$ est la base de $E^{\otimes^k}$,

$$f(e^{\otimes^k}) = U^k.$$

Cette application linéaire est un isomorphisme car son image de la base $\{1, e, \cdots, e^{\otimes^k}, \cdots\}$ de $T(E)$ est la base $\{1, U, \cdots, U^K, \cdots\}$ de $\mathbb{K}[U]$. On a alors

$$\begin{array}{ll} f(\mu_{T(E)}(e^{\otimes^k}, e^{\otimes^l})) & = f(e^{\otimes^{k+l}}) = U^{k+l} \\ & = U^k \cdot U^l \\ & = f(e^{\otimes^k}) \cdot f(e^{\otimes^l}). \end{array}$$

Ainsi f est un homomorphisme d'algèbre et les algèbres $T(E)$ et $\mathbb{K}[U]$ sont isomorphes.

Notons que dans ce cas $(T(E), \mu_{T(E)})$ est une algèbre commutative.

9.2.2 Cas où E est de dimension 2

Supposons que E soit de dimension 2. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de E. Alors $E^{\otimes^n}$ est de dimension 2^n. Par exemple $E^{\otimes^2}$ admet comme base $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$. Ceci montre, en particulier, que dans ce cas $T(E)$ est une algèbre non commutative. Considérons l'ensemble A formé de deux lettres $\{a, b\}$, c'est-à-dire que A est un alphabet formé de deux lettres. On appelle mot de longueur n construit sur l'alphabet A tout mot (ou toute suite) comportant n lettres issues de l'alphabet A. Ainsi les mots de longueur 1 sont a, b, les mots de longueur 2 sont aa, ab, ba, bb ceux de longueur 3 sont $aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb$. Par convention, on écrit $\mathbb{1}$ le mot vide. Notons $M_n(a, b)$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des mots de longueur n. C'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2^n. Soit

$$M(a, b) = \sum_{n \geq 0} M_n(a, b)$$

la somme directe externe des espaces $M_n(a, b)$. C'est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué de support $\mathbb{N}$. On définit une multiplication sur $M(a, b)$ par concaténation des mots : si $m_1(a, b)$ et $m_2(a, b)$ sont deux mots alors $\mu(m_1(a, b), m_2(a, b))$ est le mot $m_1(a, b)m_2(a, b)$ dont la longueur est la somme des longueurs des mots $m_1(a, b)$ et $m_2(a, b)$. L'algèbre $(M(a, b), \mu)$ est appelé l'algèbre associative non commutative unitaire libre basée sur $A = \{a, b\}$.

Proposition 61 *L'algèbre tensorielle $(T(E), \mu_{T(E)})$ sur un espace vectoriel de dimension 2 est isomorphe à l'algèbre associative non commutative unitaire libre basée sur un ensemble A de cardinalité 2.*

Démonstration. Soit $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}, i_j \in \{1, 2\}$ un vecteur de base de $E^{\otimes^k}$. Faisons lui correspondre le mot de longueur k obtenu à partir de $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ en remplaçant e_1 par a et e_2 par b. Cette application définie l'isomorphisme cherché.

Remarque. On montre de manière analogue que l'algèbre tensorielle $T(E)$ sur un espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à l'algèbre libre associative unitaire basée sur un ensemble A de cardinalité n.

9.3 Propriété universelle de l'algèbre tensorielle $T(E)$

Considérons une algèbre associative unitaire A et une application linéaire $f : E \to A$. Le résultat suivant montre que l'on peut "étendre" l'application linéaire f en un morphisme d'algèbre de $T(E)$ dans A afin de prendre en compte la structure d'algèbre de A.

Théorème 32 *Pour toute algèbre associative unitaire A et toute application linéaire $f : E \to A$ il existe un unique homomorphisme d'algèbre*

$$\widetilde{f} : T(E) \to A$$

tel que

$$\widetilde{f} \circ i_E = f$$

où $i_E : E \to T(E)$ est l'injection linéaire canonique $i_E(E) = E^{\otimes^1}$.

Ceci signifie que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_E"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & A \\ T(E) \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Considérons l'application k-linéaire ($k \geq 2$)

$$\varphi_k : E \times \cdots \times E \to A$$

définie par $\varphi_k(v_1, \cdots, v_k) = f(v_1) \cdot f(v_2) \cdot \cdots \cdot f(v_k)$ où le produit dans A est noté $x \cdot y$.

Il existe donc une application linéaire

$$h_k : E^{\otimes^k} \to A$$

telle que

$$h_k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \varphi_k(v_1, \cdots, v_k) = f(v_1) \cdot f(v_2) \cdot \cdots \cdot f(v_k)$$

pour tous $v_1, \cdots, v_k \in E$.

Si $k = 1$, on pose $h_1(v_1) = f(v_1)$ et si $k = 0$ on pose $h_0(a) = a \cdot 1_A$ où 1_A est l'unité de A. On définit alors une application linéaire

$$\widetilde{f} : T(E) \to A$$

de la manière suivante. Soit $X \in T(E)$ et soit $X = \sum_{k=0}^{l} X_k$ sa décomposition en composantes homogènes où l est le degré de X. Alors

$$\widetilde{f}(X) = \sum_{k=0}^{l} h_k(X_k).$$

Montrons que $\widetilde{f}$ est un homomorphisme d'algèbres. Soient X et Y deux tenseurs de $T(E)$. Ils s'expriment comme combinaisons linéaires de tenseurs factorisables. Nous pouvons donc supposer, comme $\widetilde{f}$ est linéaire, que X et Y sont factorisables c'est-à-dire $X = v_1 \otimes \cdots \otimes v_l$ et $Y = v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_p$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(X \otimes Y) &= h_{l+p}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_p) \\
&= f(v_1) \cdot \cdots \cdot f(v_l) \cdot f(v'_1) \cdot \cdots \cdot f(v'_p) \\
&= h_l(v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) \cdot h_p(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_p) \\
&= \widetilde{f}(X) \cdot \widetilde{f}(Y).
\end{aligned}$$

Ainsi $\widetilde{f}$ est un homomorphisme d'algèbres. Il vérifie bien

$$\widetilde{f}(v) = f(v)$$

c'est-à-dire $\widetilde{f} \circ i_E = f$.

Il ne reste qu'à démontrer l'unicité d'un tel homomorphisme. Si $\widetilde{f}'$ est un autre homomorphisme vérifiant

$$\begin{cases} \widetilde{f}'(a) = a \cdot 1_A, \forall a \in \mathbb{K} \\ \widetilde{f}'(v) = f(v), \forall v \in E \end{cases}$$

alors $\widetilde{f}'$ et $\widetilde{f}$ coincident sur $\mathbb{K} \otimes E^{\otimes^1}$. Mais en tant qu'algèbre $T(E)$ est engendrée par $\mathbb{K}$ et $E^{\otimes^1}$. Ainsi $\widetilde{f}'$ et $\widetilde{f}$ coincident sur les générateurs de l'algèbre $T(E)$. Ils sont donc égaux. ♣

Corollaire 10 *Il existe une bijection entre l'ensemble $\mathcal{L}(E, A)$ des applications linéaires de E dans A et l'ensemble des homomorphismes d'algèbres de $T(E)$ dans A.*

9.4 Les homomorphismes $T(f)$ et $D(f)$

9.4.1 Définition de $T(f)$

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit

$$f : E \to F$$

une application linéaire. Alors f s'étend naturellement en une application linéaire à valeurs dans l'algèbre tensorielle de F

$$f_1 : E \to T(F)$$

en considérant l'injection naturelle

$$\begin{array}{rcl} i_F : F & \to & T(F) \\ w & \mapsto & i_F(w) = w \in F^{\otimes^1} \end{array}$$

et

$$f_1(v) = i_F(f(v))$$

pour tout $v \in E$. D'après le théorème **??**, il existe un homomorphisme d'algèbre $\widetilde{f_1} : T(E) \to T(F)$ tel que $\widetilde{f_1} \circ i_E = f_1$.

On notera $T(f)$ cet homomorphisme. Il vérifie donc

$$T(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = f(v_1) \otimes f(v_2) \otimes \cdots \otimes f(v_p)$$

pour tous $v_1, \cdots, v_p \in E$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$. On en déduit en particulier que l'image par $T(f)$ de la composante homogène $E^{\otimes^p}$ de degré p est contenue dans la composante homogène $F^{\otimes^p}$ de même degré p de $T(F)$. Ainsi $T(f)$ est une application linéaire graduée de degré 0.

Proposition 62 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires alors*

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que cette identité sur les tenseurs homogènes factorisables.

Soient $v_1, \cdots, v_p \in E$, alors

$$\begin{aligned} T(g \circ f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) &= (f \circ g)(v_1) \otimes \cdots \otimes (f \circ g)(v_p) \\ &= f(g(v_1)) \otimes cdots \otimes f(g(v_p)) \\ &= T(f)(g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_p)) \\ &= T(f) \circ T(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p). \end{aligned}$$

On en déduit la proposition.

Proposition 63 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

1. *$T(f)$ est injective si et seulement si f est injective.*
2. *$T(f)$ est surjective si et seulement si f est surjective.*

Démonstration.

1. Supposons que $f : E \to F$ soit une application injective. Il existe alors une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f : E \to E$ soit l'application identique. Ainsi

$$T(g \circ f) = T(id_E) = T(g) \circ T(f).$$

   Mais $T(id_E) = id_{T(E)}$. Ceci montre que $T(f)$ est aussi injective. Inversement, si $T(f)$ est injective, alors comme $T(f)$ est graduée de degré 0, sa restriction à la composante homogène de degré 1 est injective. Mais cette restriction $T(f)|_{E^{\otimes 1}}$ vérifie $T(f)|_{E^{\otimes 1}} \circ i_E = f$ où $i_E : E \to T(E)$ est l'injection naturelle. Donc f est injective.

2. Comme $T(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_p)$ pour tous vecteur $v_1, \cdots, v_p \in E$, on en déduit que $\mathrm{Im}T(f)$ coïncide avec l'algèbre tensorielle $T(\mathrm{Im}(f))$ de $\mathrm{Im}f$. Ainsi, si f est surjective, $\mathrm{Im}(f) = E$ et $\mathrm{Im}(T(f)) = T(F)$ et $T(f)$ est surjective. La réciproqie est identique.

9.4.2 Définition de $D(f)$ pour $f \in \mathcal{E}nd(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Nous avons construit ci-dessus un homomorphisme d'algèbres $T(f) : T(E) \to T(E)$ c'est-à-dire une application linéaire vérifiant

$$T(f \otimes g) = T(f) \otimes T(g).$$

En particulier si f est un isomorphisme de E, alors $T(f)$ est un automorphisme de l'algèbre $T(E)$. Nous allons à présent associer à l'application linéaire f, un autre type d'endomorphismes de $T(f)$ correspondant en gros à une linéarisation d'automorphisme, et que l'on appelle une dérivation d'algèbre.

Définition 48 *Soit (A, μ) une $\mathbb{K}$-algèbre dont la multiplication est donnée par l'application bilinéaire μ. Un endomorphisme linéaire*

$$f : A \to A$$

est applée une dérivation de l'algèbre A s'il vérifie

$$\mu(f(x), y) + \mu(x, f(y)) = f(\mu(x, y))$$

pour tous $x, y \in A$.

Par exemple, supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et soit g un endomorphisme linéaire de A tel que $I_A + tg$ soit un automorphisme de l'algèbre A pour tout t appartenant à un intervalle J non vide de $\mathbb{R}$ où I_A désigne l'application identité de A. Alors la condition

$$\mu((I_A + tg)(x), (I_A + tg)(y)) = (I_A + tg)(\mu(x, y))$$

est équivalente à

$$\mu(x, y) + t\mu(g(x), y) + t\mu(x, g(y)) + t^2\mu(g(x), g(y)) = \mu(x, y) + tg(\mu(x, y))$$

pour tous $x, y \in A$ et pour tout $t \in J$. On en déduit que sa partie linéaire est nulle, soit

$$\mu(g(x), y) + \mu(x, g(y)) = g(\mu(x, y))$$

et g est une dérivation de A.

Ceci étant considérons l'algèbre tensorielle $(T(E), \bullet)$. Nous allons construire des dérivations de cette algèbre. Soit f un endomorphisme de E. Il définit une application k-linéaire

$$\varphi_k(f) : E \times \cdots \times E \to T(E)$$

par $\varphi_k(f)(v_1, \cdots, v_k) = \sum_{i=1}^{k} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{l-1} \otimes f(v_l) \otimes v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_k$.

D'après le théorème de factorisation, il existe une application linéaire $D_k(f) : E^{\otimes^k} \to T(E)$ vérifiant

$$D_k(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \varphi_k(v_1, \cdots, v_k).$$

Posons pour $k = 0, D_0(f) = 0$ et pour $k = 1, D_1(f) = f$. Alors la suite $(D_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ définie une application linéaire

$$D(f) : T(E) \to T(E)$$

telle que $D(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = D_k(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$ pour tout k.

Montrons que $D(f)$ est une dérivation de $(T(E), \bullet)$.

Soient X et Y deux vecteurs de $T(E)$. Montrer que

$$D(f)(X \bullet Y) = D(f)(X) \bullet Y + X \bullet D(f)(Y).$$

Comme $D(f)$ est linéaire, il suffit de montrer cette relation sur les vecteurs factorisables homogènes

$$X = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k,\ Y = v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l$$

pour $k, l \geq 1$ et pour X ou $Y \in T_0(E) = \mathbb{K}$. Dans le premier cas, on a

$$\begin{array}{ll} D(f)(x \bullet Y) & = D(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l) \\ & = \sum_{i=1}^k v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes f(v_i) \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_l \\ & \ + \sum_{i=1}^l v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_{i-1} \otimes f(v'_i) \otimes v'_{i+1} \otimes \cdots \otimes v'_l \\ & = D(f)(X) \bullet Y + X \bullet D(f)(Y). \end{array}$$

Si $X, Y \in mathbbK$ alors

$$D(f)(X \bullet Y) = D(f)(XY) = 0 = D(f)(X)Y + XD(f)(Y).$$

Si $X \in \mathbb{K}$ et $Y \in E^{\otimes^l}$ avec $l \geq 1$, alors

$$D(f)(X \bullet Y) = D(f)(XY) = XD(f)(Y) = D(f)(X)Y + XD(f)(Y)$$

car $D(f)(X) = 0$. Il en est de même si $X \in E^{\otimes^k}$ avec $k \geq 1$ et $Y \in \mathbb{K}$. On en déduit que $D(f)$ est une dérivation de l'algèbre $(T(E), \bullet)$.

EXERCICE 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que l'algèbre $T(E)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes $\mathbb{K}[U]$ à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.
2. Décrire la dérivation de $\mathbb{K}[U]$ définie par $D(f)$.

Chapitre 10

Tenseurs covariants et contravariants

10.1 L'algèbre tensorielle mixte $T(E, E^*)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit E^* son espace dual. Nous utiliserons dans ce chapitre la convention d'Einstein. Nous noterons donc par v_i, l'indice en bas, les vecteurs de E et par v^i, l'indice en exposant, les formes linéaires de E^*.

10.1.1 L'espace vectoriel $T_p^q(E, E^*)$

Pour tout couple d'entiers (p, q) tels que $p, q \geq 1$, on note par $T_p^q(E, E^*)$ l'espace vectoriel défini comme le produit tensoriel de p exemplaires de E et de q exemplaires de E^* :

$$T_p^q(E, E^*) = E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}.$$

Définition 49 *On appelle tenseur mixte sur l'espace vectoriel E, p-fois contravariant et q-fois covariant, les vecteurs de l'espace $T_p^q(E, E^*)$.*

Pour simplifier l'écriture, les tenseurs p-fois contravariants et q-fois covariants seront appelés les tenseurs d'ordre (p, q). Un tenseur d'ordre (p, q) du type

$$X = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'^1 \otimes \cdots \otimes v'^q$$

avec $v_1, \cdots, v_p \in E$ et $v'^1, \cdots, v'^q \in E^*$ seront dits décomposables. Afin de définir les espaces $T_p^q(E, E^*)$ pour toute paire d'entiers positifs ou nuls, nous poserons

$$T_0^0(E, E^*) = \mathbb{K},\ T_0^q(E, E^*) = (E^*)^{\otimes q} \text{ pour } q \geq 1,\ T_p^0(E, E^*) = E^{\otimes p} \text{ pour } p \geq 1.$$

Ainsi les vecteurs de E s'identifient aux tenseurs de type $(1, 0)$ c'est-à-dire 1 fois contravariant et 0-fois covariant. De même les formes linéaires sur E s'identifient aux tenseurs de type $(0, 1)$ c'est-à-dire 0-fois contravariant et une fois covariant. Plus généralement, les tenseurs de type $(p, 0)$ sont les vecteurs appartenant à $E^{\otimes p}$. Les tenseurs contravariants de type $(p, 0)$ s'identifient donc aux tenseurs de $E^{\otimes p}$. Les tenseurs covariants de type $(0, q)$ s'identifient aux tenseurs de degré q basés sur l'espace dual E^*.

10.1.2 L'espace vectoriel $T(E, E^*)$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, posons
$$T_k(E, E^*) = \sum_{p+q=k} T_p^q(E, E^*).$$
Tout tenseur X de $T_k(E, E^*)$ s'écrit sous la forme
$$X = X_{(0,k)} + X_{(1,k-1)} + \cdots + X_{(p,k-p)} + \cdots + X_{(k,0)}$$
où $X_{(p,k-p)}$ est un tenseur p-fois contravariant et $(k-p)$-fois covariant. Pour $k = 0$, on posera $T_0(E, E^*) = \mathbb{K}$. Considérons à présent l'espace vectoriel
$$T(E, E^*) = \sum_{k \geq 0} T_k(E, E^*).$$
C'est un espace vectoriel, de dimension infinie dès que E n'est pas réduit à $\{0\}$, $\mathbb{Z}$-gradué de support $\mathbb{N}$.

10.1.3 L'algèbre tensorielle mixte $T(E, E^*)$

Une multiplication dans $T(E, E^*)$ étant définie par une application bilinéaire sur $T(E, E^*)$ à valeurs dans cet espace, elle sera entièrement déterminée par les images des tenseurs décomposables de chacun des sous espaces $T_p^q(E, E^*)$ pour tout couple (p, q) d'entiers. Considérons l'application bilinéaire
$$\mu_{T(E,E^*)} : T(E, E^*) \times T(E, E^*) \to T(E, E^*)$$
définie par
$$\begin{aligned}\mu_{T(E,E^*)}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'^1 \otimes \cdots \otimes v'^q, w_1 \otimes \cdots \otimes w_r \otimes w'^1 \otimes \cdots \otimes w'^s)\\ = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_r \otimes v'^1 \otimes \cdots \otimes v'^q \otimes w'^1 \otimes \cdots \otimes w'^s\end{aligned}$$
pour tout $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'^1 \otimes \cdots \otimes v'^q \in T_p^q(E, E^*)$ et pour tout $w_1 \otimes \cdots \otimes w_r \otimes w'^1 \otimes \cdots \otimes w'^s \in T_r^s(E, E^*)$, et ceci pour tout couple d'entiers (p, q) et (r, s).

Proposition 64 *L'algèbre $(T(E, E^*), \mu_{T(E,E^*)})$, appelée l'algèbre tensorielle mixte sur E, est une algèbre associative unitaire, et si* $\dim E \geq 1$, *non commutative.*

EXERCICE 1 Soit E un espace vectoriel. Considérons deux entiers p et q non nuls et soient $X \in T_p^0(E, E^*)$ et $Y \in T_0^q(E, E^*)$.

1. Montrer que
$$\mu_{T(E,E^*)}(X, Y) = \mu_{T(E,E^*)}(Y, X).$$
2. En déduire que $T(E)$ et $T(E^*)$ sont deux sous-algèbres de $T(E, E^*)$ qui commutent.
3. Montrer que $T(E, E^*) = T(E) \otimes T(E^*)$.

10.2 Tenseurs d'ordre (p,q) sur un espace vectoriel de dimension finie

10.2.1 Décomposition dans une base

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, alors $E^{\otimes p}$ est de dimension n^p et si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E, alors la famille

$$\{e_{i_1 i_2 \cdots i_p} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}\}$$

où chaque $i_j \in \{1, \cdots, n\}$ est une base de $E^{\otimes p}$. Ainsi, si $v_{(1)}, v_{(2)}, \cdots, v_{(p)}$ désignent p vecteurs de E, alors

$$v_{(1)} \otimes v_{(2)} \otimes \cdots \otimes v_{(p)} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_p}_{(p)} e_{i_1 i_2 \cdots i_p}.$$

La notation $v_{(i)}$ est ici utilisée pour ne pas confondre un numéro de vecteur avec un indice. Si $\{e^1, \cdots, e^n\}$ est la base duale de $\{e_1, \cdots, e_n\}$, alors la famille

$$\{e^{i_1 i_2 \cdots i_q} = e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_q}\}$$

où chaque $i_j \in \{1, \cdots, n\}$ est une base de $E^{\otimes q}$. On en déduit que la famille

$$\{e^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}\}$$

où chaque $i_l, j_s \in \{1, \cdots, n\}$ est une base de $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q} = T^q_p(E, E^*)$. Considérons un tenseur $T \in T^q_p(E, E^*)$. En respectant la convention d'Einstein, un tel tenseur se décompose dans la base précédente

$$T = t^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} e^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p}.$$

Les indices $i_1, i_2, \cdots, i_p$ sont appelés les indices contravariants alors que les indices $j_1, j_2, \cdots, j_q$ sont appelés les indices covariants.

Considérons à présent une nouvelle base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ de E et soit $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n\}$ sa base duale. Soit $P = (\alpha^j_i)$ la matrice de passage de la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ à la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$:

$$\varepsilon_i = \alpha^j_i e_j.$$

Si $Q = (\beta^j_i)$ désigne la matrice de passage de la base duale $\{e^1, \cdots, e^n\}$ à la base duale $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n\}$, nous avons vu que

$$Q = (\beta^j_i) = {}^tP^{-1}.$$

La famille $\{\varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \varepsilon_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_q}\}$ est une base de $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}$. Le tenseur $T = t^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} e^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ s'écrit dans la nouvelle base

$$T = u^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p}.$$

Cherchons les relations de passage des anciennes composantes $t^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ aux nouvelles composantes $u^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$. On a

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p} &= \varepsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_q} \\
&= \alpha^{l_1}_{i_1} e_{l_1} \otimes \cdots \alpha^{l_p}_{i_p} e_{l_p} \otimes \beta^{j_1}_{s_1} e^{s_1} \otimes \cdots \otimes \beta^{j_q}_{s_q} e^{s_q} \\
&= \alpha^{l_1}_{i_1} \cdots \alpha^{l_p}_{i_p} \beta^{j_1}_{s_1} \cdots \beta^{j_q}_{s_q} e_{l_1} \otimes \cdots e_{l_p} \otimes e^{s_1} \otimes \cdots \otimes e^{s_q} \\
&= \alpha^{l_1}_{i_1} \cdots \alpha^{l_p}_{i_p} \beta^{j_1}_{s_1} \cdots \beta^{j_q}_{s_q} e^{s_1 \cdots s_q}_{l_1 \cdots l_p}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} T &= u^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \cdots i_p} \\ &= u^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \alpha^{l_1}_{i_1} \cdots \alpha^{l_p}_{i_p} \beta^{j_1}_{s_1} \cdots \beta^{j_q}_{s_q} e^{s_1 \cdots s_q}_{l_1 \cdots l_p} \\ &= t^{l_1 \cdots l_p}_{s_1 \cdots s_q} e^{s_1 \cdots s_q}_{l_1 \cdots l_p}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$t^{l_1 \cdots l_p}_{s_1 \cdots s_q} = u^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \alpha^{l_1}_{i_1} \cdots \alpha^{l_p}_{i_p} \beta^{j_1}_{s_1} \cdots \beta^{j_q}_{s_q}. \tag{10.1}$$

EXERCICE 11

1. Ecrire les formules de changement de bases por les tenseurs de type $(p,0)$.
2. Ecrire les formules de changement de bases por les tenseurs de type $(0,q)$.
3. Refaire en détaillant la démonstration précédente pour les tenseurs de type $(2,1)$ et $(1,2)$.

Dans de nombreux ouvrages, par exemple des ouvrages de physique traitant de l'élasticité, la notion de tenseur est introduite à partir de la formule (**??**).

Définition 50 *Autre définition d'un tenseur. On appelle tenseur de type (p,q) attaché à unespace vectoriel E de dimension n toute application T qui associe à une base donnée de E une famile de n^{p+q} composantes, les scalaires $t^{l_1 \cdots l_p}_{s_1 \cdots s_q}$, cette correspondance étant telle que pour tout chagement de base associé à une matrice $P = (\alpha^j_i)$ et sa matrice inverse $Q = (\beta^j_i)$ les nouvelles composantes sont données par la formule (**??**).*

10.2.2 Construction de tenseur à l'aide des composantes

La définition précédente montre qu'en général une expression du type

$$T = t^{l_1 \cdots l_p}_{s_1 \cdots s_q} e^{s_1 \cdots s_q}_{l_1 \cdots l_p}$$

ne représente pas nécessairement un tenseur. Un condition nécessaire et suffisante est que (**??**) soit satisfaite.

EXERCICE 11 Soit Eun espace vectoriel de dimension n.

1. Montrer que toute expression $T = a^i e_i$ est un tenseur de type $(1,0)$.
2. Est-ce que toute expression $T = \alpha^{ij} e_{ij}$ est un tenseur de type $(2,0)$?
3. Est-ce que toute expression $T = \alpha^i_j e^j_i$ est un tenseur de type $(1,1)$? Montrer que l'espace des tenseurs de type $(1,1)$ sur E correspond à l'espace des endomorphismes de E.

Proposition 65 *Pour qu'un système de n^q composantes $t_{s_1\cdots s_q}$ attaché à la base $e^{s_1\cdots s_q} = e^{s_1} \otimes \cdots \otimes e^{s_q}$ de $(E^*)^{\otimes q}$ soit un tenseur covariant de type $(0,q)$, il faut et il suffit que quels que soient les q vecteurs $v_{(1)} = (x^i_{(1)}), \cdots, v_{(q)} = (x^i_{(q)})$ de E la quantité*

$$t_{s_1\cdots s_q} x^{s_1}_{(1)} x^{s_2}_{(2)} \cdots x^{s_q}_{(q)} \tag{10.2}$$

soit invariante par changement de base.

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. Si les $(t_{s_1\cdots s_q})$ sont les composantes d'un tenseur covariant, alors d'après (**??**) ces composantes se transforment dans une autre base associée à une matrice de passage $P = (\alpha^j_i)$ par

$$t_{s_1\cdots s_q} = u_{j_1 j_2\cdots j_q} \beta^{j_1}_{s_1} \cdots \beta^{j_q}_{s_q}$$

où $Q = (\beta^j_i) = P^{-1}$. Si $(y^i_{(1)}), \cdots, (y^i_{(q)})$ sont les nouvelles composantes des vecteurs $v_{(1)}, \cdots, v_{(q)}$, alors les changements de coordonnées s'expriment par la formule symbolique $X = PY$ c'est-à-dire

$$x^k_l = \alpha^k_r y^r_l$$

pour tout $l = 1, \cdots, q$ et pour tout $k = 1, \cdots, n$. On en déduit

$$\begin{aligned} t_{s_1\cdots s_q} x^{s_1}_{(1)} x^{s_2}_{(2)} \cdots x^{s_q}_{(q)} &= u_{j_1 j_2\cdots j_q} \beta^{j_1}_{s_1} \cdots \beta^{j_q}_{s_q} \alpha^{r_1}_{s_1} y^{s_1}_{(1)} \alpha^{r_2}_{s_2} y^{s_2}_{(2)} \cdots \alpha^{r_q}_{s_q} y^{s_q}_{(q)} \\ &= \beta^{j_1}_{s_1} \cdots \beta^{j_q}_{s_q} \alpha^{r_1}_{s_1} \alpha^{r_2}_{s_2} \cdots \alpha^{r_q}_{s_q} u_{j_1 j_2\cdots j_q} y^{s_1}_{(1)} y^{s_2}_{(2)} \cdots y^{s_q}_{(q)}. \end{aligned}$$

Mais comme P et Q sont inverses l'une de l'autre

$$\alpha^j_i \beta^i_k = \delta^j_k.$$

Il en résulte

$$t_{s_1\cdots s_q} x^{s_1}_{(1)} x^{s_2}_{(2)} \cdots x^{s_q}_{(q)} = u_{j_1 j_2\cdots j_q} y^{j_1}_{(1)} y^{j_2}_{(2)} \cdots y^{j_q}_{(q)}.$$

Réciproquement, supposons que (**??**) soit satisfaite. quels que soient les vecteurs $v_{(1)} = (x^i_{(1)}), \cdots, v_{(q)} = (x^i_{(q)})$ de E. Les formules de changement de composantes s'écrivent

$$x^k_1 = \alpha^k_{r_1} y^{r_1}_1,\ x^k_2 = \alpha^k_{r_2} y^{r_2}_2, \cdots, x^k_q = \alpha^k_{r_q} y^{r_q}_q.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} t_{s_1\cdots s_q} x^{s_1}_{(1)} x^{s_2}_{(2)} \cdots x^{s_q}_{(q)} &= t_{s_1\cdots s_q} \alpha^{s_1}_{r_1} \cdots \alpha^{s_q}_{r_q} y^{r_1}_{s_1} \cdots y^{r_q}_{s_q} \\ &= u_{r_1 r_2\cdots r_q} y^{r_1}_{(1)} y^{r_2}_{(2)} \cdots y^{r_q}_{(q)} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$u_{r_1 r_2\cdots r_q} = t_{s_1\cdots s_q} \alpha^{s_1}_{r_1} \cdots \alpha^{s_q}_{r_q}.$$

Ainsi les $t_{s_1\cdots s_q}$ se transforment selon (**??**) ce qui démontre le théorème.

10.2.3 Multiplication tensorielle

Commençons par noter

$$\mathcal{T}_p^q(E)$$

l'espace des tenseurs de type (p,q) sur E. Comme $\mathcal{T}_p^q(E)$ est par définition un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de tenseurs de type (p,q) est un tenseur du même type. En termes de composantes, si

$$T = t_{s_1\cdots s_q}^{l_1\cdots l_p} e_{l_1\cdots l_p}^{s_1\cdots s_q},\ V = v_{s_1\cdots s_q}^{l_1\cdots l_p} e_{l_1\cdots l_p}^{s_1\cdots s_q} \in \mathcal{T}_p^q(E),$$

alors

$$T + V = (t_{s_1\cdots s_q}^{l_1\cdots l_p} + v_{s_1\cdots s_q}^{l_1\cdots l_p}) e_{l_1\cdots l_p}^{s_1\cdots s_q}.$$

Il existe une autre opération naturelle, appelée multiplication tensorielle

$$\otimes : \mathcal{T}_p^q(E) \otimes \mathcal{T}_r^l(E) \longrightarrow \mathcal{T}_{p+r}^{q+l}(E)$$

définie ainsi : si

$$T = t_{s_1\cdots s_q}^{l_1\cdots l_p} e_{l_1\cdots l_p}^{s_1\cdots s_q} \in \mathcal{T}_p^q(E), \quad V = v_{t_1\cdots t_l}^{m_1\cdots m_r} e_{m_1\cdots m_r}^{t_1\cdots t_l}$$

alors

$$T \otimes V = (t_{s_1\cdots s_q}^{l_1\cdots l_p} \cdot v_{s_1\cdots s_l}^{l_1\cdots l_r}) e_{l_1\cdots l_p \cdot m_1\cdots m_r}^{s_1\cdots s_q \cdot t_1\cdots t_l}.$$

Cette multiplication n'est pas interne dans chacun des espaces $\mathcal{T}_p^q(E)$. Par contre, si on considère la somme directe externe

$$\mathcal{T}(E) = \oplus_{p,q\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_p^q(E)$$

alors la multiplication tensorielle y est interne (Notons que par convention $\mathcal{T}_0^0(E) = \mathbb{K}$). On obtient ainsi une algb̀re, que l'on étudiera plus loin, appelée l'algèbre tensorielle de E.

10.2.4 Contraction des indices

Tout tenseur $T \in \mathcal{T}_p^q(E)$ de type (p,q) sera dite d'ordre $p+q$. Nous allons définir une autrre opération qui à un tenseur d'ordre $p+q$ fait correspondre un tenseur d'ordre $p+q-2$. Commençons par un tenseur d'ordre 2 de type $(1,1)$. Il s'écrit

$$T = t_j^i e_i^j.$$

Considérons le tenseur d'ordre 0, c'est-à-dire le scalaire obtenu en donnant des valeurs égales aux indices covariants et contravariants en en additionnant toutes les composantes obtenues :

$$T' = t_1^1 + t_2^2 + \cdots + t_n^n.$$

EXERCICE 2 Montrer que T' est bien un tenseur d'ordre 0.

Considérons à présent un tenseur d'ordre $p+q$. Il s'écrit

$$T = t_{s_1\cdots s_q}^{l_1\cdots l_p} e_{l_1\cdots l_p}^{s_1\cdots s_q}.$$

Choisissons deux indices, l'un covariant et l'autre contravariant. Nous pouvons, pour simplifier les notations, choisir le premier indice covariant et le premier indice contravariant. Considérons la nouvelle expression d'ordre $p+q-2$ obtenue en égalant ces deux indices à un indice i et en ajoutant par rapport à i toutes les scalaires obtenus :

$$T' = (t_{1\cdots s_q}^{1\cdots l_p} + \cdots + t_{n\cdots s_q}^{n\cdots l_p})\ e_{l_2\cdots l_p}^{s_2\cdots s_q}.$$

Cette nouvelle expression vérifie la condition (**??**) et est donc un tenseur d'ordre $p+q-2$.

10.3 Quelques tenseurs particuliers en dimension finie dimension finie

Dans tout ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

10.3.1 Rappels sur les isomorphismes canoniques

1. $E \otimes E^*$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E,E)$ =End(E), l'isomorphisme φ étant défini par
$$\varphi(v \otimes f)(w) = f(w)v$$
pour tout $v, w \in E$ et $f \in E^*$.
2. $E^* \otimes F^*$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(E,F;\mathbb{K})$ des formes bilinéaires sur $E \times F$, l'isomorphisme ψ étant défini par
$$\psi(f \otimes g)(v,w) = f(v)g(w)$$
pour tout $v \in E$, $w \in F$, $f \in E^*$ et $g \in F^*$. En particulier $E^* \otimes E^*$ qui est isomorphe à $(E \otimes E)^*$ s'identifie aux formes bilinéaires sur E.
3. $E^* \otimes E^*$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E^{**},E^*) = \mathcal{L}(E,E^*)$, l'isomorphisme ϕ est définie par
$$\phi(f,g)(v) = f(v)g$$
pour tout $f, g \in E^*$ et $v \in E$.

10.3.2 Tenseurs d'ordre 1

Nous avons identifié l'espace vectoriel E à $T_1^0(E)$ et le dual E^* à $T_0^1(E)$. Ainsi les vecteurs de E correspondent aux tenseurs 1-contravarianats et les formes linéaires f sur E aux tenseurs 1-covariants sur E.

10.3.3 Tenseurs 1-contravariants et 1-covariants

Considérons un tenseur $T \in T_1^1(E) = E \otimes E^*$. D'après les isomorphismes classiques, un tel tenseur s'identifie à un endomorphisme de E. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et soit $\{e^1, \cdots, e^n\}$ la base duale. La famille de tenseurs $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1,\cdots,n}$ est une base de $T_1^1(E)$. Les coordonnées de T relatives à cette base sont
$$T = t^i_j e_i \otimes e^j.$$
L'endomorphisme f_T associé à T est l'endomorphisme dont la matrice relative à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E estla matrice $M = (t^i_j)$.

Exemple : Le tenseur de Kronecker. Ce tenseur est le vecteur de $T_1^1(E)$ qui dans la base $\{e_i \otimes e^j\}_{i,j=1,\cdots,n}$ s'écrit
$$\delta = e_i \otimes e^i.$$
L'endomorphisme correspondant T_δ est donc l'application identité de E.

EXERCICE 3 Soit δ le tenseur de Kronecker sur E. Montrer que si $\{e'_1 \cdots, e'_n\}$ est une base quelconque de E, alors
$$\delta = e'_i \otimes e'^i$$
et donc cette écriture ne dépend pas de la base choisie.

10.3.4 Tenseurs 2-contravariants

Soit T un tenseur 2-contravariant et 0-covariant. C'est donc un vecteur de $T_2^0(E) = E^{\otimes^2}$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Les coordonnées de T relatives à la base $\{e_i \otimes e_j\}$ de $T_2^0(E)$ sont

$$T = t^{ij} e_i \otimes e_j.$$

Soit $\{e'_1 \cdots, e'_n\}$ une autre base de E et soit $P = (\alpha_j^i)$ la matrice de passage associée :

$$e'_j = \alpha_j^i e_i.$$

Si

$$T = u^{ij} e'_i \otimes e'_j$$

est l'expression du tenseur T dans la nouvelle base, alors

$$T = u^{ij} \alpha_i^k \alpha_j^l e_k \otimes e_l$$

et donc

$$t^{kl} = u^{ij} \alpha_i^k \alpha_j^l.$$

Nous avons vu que, quels que soient les espaces E et F, $E^* \otimes F^*$ était isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ des formes bilinéaires sur $E \times F$. On en déduit dans notre cas que $E \otimes E$ qui est égal à $E^{**} \otimes E^{**}$ est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires sur E^*. La forme bilinéaire est donnée par

$$\theta(e^i, e^j) = t^{ij}.$$

Le changement de coordonnées de T correspond alors à la formule de changement de bases de θ dans E^*.

10.3.5 Tenseurs 2-covariants

Soit T un tenseur 2-covariant et 0-contravariant. C'est donc un vecteur de $T_0^2(E) = (E^*)^{\otimes^2}$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{e^1, \cdots, e^n\}$ sa base duale. Les coordonnées de T relatives à la base $\{e^i \otimes e^j\}$ de $T_0^2(E)$ sont

$$T = t_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Soit $\{e'_1 \cdots, e'_n\}$ une autre base de E et soit $P = (\alpha_j^i)$ la matrice de passage associée, alors :

$$e'^j = \beta_i^j e^i$$

où $Q = (\beta_i^j) = {}^tP^{-1}$. Si

$$T = u_{ij} e'^i \otimes e'^j$$

est l'expression du tenseur T dans la nouvelle base, alors

$$T = u^{ij} \alpha_i^k \alpha_j^l e_k \otimes e_l$$

et donc

$$t^{kl} = u_{ij} \beta_i^k \beta_j^l.$$

Mais $E^* \otimes E^*$ est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires sur E. La forme bilinéaire est donnée par

$$\vartheta(e_i, e_j) = t_{ij}.$$

Le changement de coordonnées de T correspond alors à la formule de changement de bases de ϑ dans E.

10.3.6 Tenseurs 1-contravariants et 1-covariants

Soit T un tenseur 1-contravariant et 1-covariant. C'est donc un vecteur de $T_1^1(E) = E \otimes E^*$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{e^1, \cdots, e^n\}$ sa base duale. Les coordonnées de T relatives à la base $\{e_i \otimes e^j\}$ de $T_1^1(E)$ sont

$$T = t_j^i e_i \otimes e^j.$$

Soit $\{e'_1 \cdots, e'_n\}$ une autre base de E et soit $P = (\alpha_j^i)$ la matrice de passage associée, et $Q = (\beta_i^j) = {}^t P^{-1}$. Si

$$T = u_j^i e'_i \otimes e'^j$$

est l'expression du tenseur T dans la nouvelle base, alors

$$T = u_j^i \alpha_i^k \beta_l^j e_k \otimes e^l$$

et donc

$$t_l^k = u_j^i \alpha_i^k \beta_l^j.$$

Mais $E \otimes E^*$ est isomorphe à l'espace des endomorphismes de E. L'endomorphisme est donné par

$$f(e_i) = t_i^j e_j.$$

Le changement de coordonnées de T correspond alors à la formule de changement de bases

$$M = PM'P^{-1}.$$

10.3.7 Tenseurs 1-contravariants et 2-covariants

Un tel tenseur T appartient à l'espace $T_2^1(E) = E \otimes E^* \otimes E^*$. Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E, alors la famille $\{e_i \otimes e^j \otimes e^k\}$ avec $i, j, k = 1, \cdots, n$ est une base de $T_2^1(E)$. La décomposition de T dans cette base s'écrit

$$T = t_{jk}^i e_i \otimes e^j \otimes e^k.$$

Proposition 66 *L'espace $T_2^1(E) = E \otimes E^* \otimes E^*$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(E, E; E)$ des applications bilinéaires sur E à valeurs dans E.*

Démonstration. En effet, l'espace $\mathcal{L}(E, E; E)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(E \otimes E; E)$ des applications linéaires de $E \otimes E$ à valeurs dans E. Or, d'après les isomorphismes canoniques, $\mathcal{L}(E \otimes E; E)$ est isomorphe à $(E \otimes E)^* \otimes E$. Mais $(E \otimes E)^*$ est isomorphe à $E^* \otimes E^*$. Ainsi $\mathcal{L}(E, E; E)$ est isomorphe à $(E^* \otimes E^*) \otimes E$ qui est isomorphe à $E^* \otimes E^* \otimes E$ et à $T_2^1(E)$.

Au tenseur T est donc associée une application bilinéaire

$$\mu_T : E \times E \to E$$

vérifiant

$$\mu_T(e_j, e_k) = t_{jk}^i e_i.$$

Or une telle application bilinéaire définit sur E une structure d'algèbre. Nous pouvons donc considérer une algèbre comme un couple (E,T) formé d'un espace vectoriel et d'un tenseur appartenant à $T_2^1(E)$. Nous reprendrons, dans le prochain chapitre, ce point de vue.

EXERCICE 4 Soit T un tenseur contravariant d'ordre 2. Il s'écrit dans une base déterminée

$$T = t^{ij}e_{ij}.$$

C tenseur est dit symétrique si

$$t^{ij} = t^{ji}$$

et il est dit antisymétrique si

$$t^{ij} = -t^{ji}.$$

1. Montrer que ces deux relations ne dépendent pas de la base choisie.
2. Soit $\mathcal{S}_2^0(E)$ l'ensemble des tenseurs symétriques de $\mathcal{T}_2^0(E)$. Montrer que $\mathcal{S}_2^0(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}_2^0(E)$. Calculer sa dimension.
3. Définir la notion de tenseur symétrique de $\mathcal{T}_p^0(E)$
4. Montrer que la multiplication tensorielle s'applique aux espaces $\mathcal{S}_p^0$.

10.4 Cas des espaces pseudo-euclidiens

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie n et muni d'un produit scalaire pseudo-euclidien, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique φ non dégénérée.

10.4.1 Cordonnées contravariantes et covariantes dans n espace pseudo-euclidien

Nous avons vu, qu'en général, un espae vectoriel de dimension finie était non canoniquement isomorphe à son dual, l'isomorphisme entre ce deux espaces étant dit non canonique car il dépend d'une base de E choisie. Par contre, le produit scalaire pseudo euclidien permet de définir un isomorphisme canonique entre E et E^*. En effet, à tout vecteur $v \in E$, on associe la forme linéaire $\widetilde{v}$ sur E vérifiant

$$\widetilde{v}(w) = \varphi(v,w).$$

Définition 51 *Soit E un espace pseudo euclidien et soient $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{e^1, \cdots, e^n\}$ sa base duale. Si*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$$

est un vecteur de E, alors les coordonnées $\{x^1, \cdots, x^n\}$ sont appelées les composantes contravariantes de v relative à la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Les coordonnées $\{x_1, \cdots, x_n\}$ de la forme linéaire $\widetilde{v}$ relative à la base duale $\{e^1, \cdots, e^n\}$

$$\widetilde{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$$

sont appelées les composantes covariantes du vecteur v relative à $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ou à $\{e^1, \cdots, e^n\}$.

Les coordonnées contravariantes et covariantes de v sont données par

$$x^i = e^i(v)$$

et

$$x_i = \varphi(v, e_i).$$

10.4.2 Le tenseur métrique

Comme le produit scalaire pseudo-euclidien sur E est donné par une forme bilinéaire symétrique φ non dégénérée, on peut faire correspondre à cette forme bilinéaire une application linéaire

$$h_\varphi : E \otimes E \to \mathbb{R}$$

telle que $h_\varphi(v_1 \otimes v_2) = \varphi(v_1, v_2)$. Mais l'espace $\mathcal{L}(E \otimes E; \mathbb{R})$ est isomorphe à l'espace $\mathbb{R} \otimes (E \otimes E)^*$ qui est aussi isomorphe, car la dimension de E est finie, à $\mathbb{R} \otimes E^* \otimes E^* = E^* \otimes E^*$. Ainsi $\mathcal{L}(E \otimes E; \mathbb{R})$ est isomorphe à $T_2^0(E)$. Notons par g_φ ou plus simplement g le tenseur 2-covariant, appelé tenseur métrique associé à φ. Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E et $\{e^1, \cdots, e^n\}$ sa base duale, et si

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j$$

alors

$$g_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

et les composantes du tenseur g coïncident avec les composantes de la matrice de Gram du produit scalaire φ.

Exemple Supposons que φ soit un produit scalaire euclidien. Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base φ-orthonormée de E, alors le tenseur métrique s'écrit dans la base $\{e^i \otimes e^j\}$ de $E^* \otimes E^*$:

$$g = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e^i.$$

Définition 52 *Soit $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ un tenseur métrique sur E. On appelle tenseur dual de g, le tenseur $\widehat{g}$ de $T_0^2(E) = E \otimes E$ défini par*

$$\widehat{g} = g^{ij} e_i \otimes e_j$$

avec

$$g^{ij} = \varphi(\widehat{e^i}, \widehat{e^j})$$

où $\widehat{f}$ désigne le vecteur de E tel que $\widetilde{\widehat{f}} = f$ pour tout $f \in E^*$.

Déterminons les composantes contravariantes et covariantes du vecteur $\widehat{e^i}$. Si

$$\widehat{e^i} = x_i^k e_k$$

alors

$$\varphi(\widehat{e^i}, e_j) = e^i(e_j).$$

Ainsi
$$x_i^k g^{kj} = \delta_j^i.$$
Notons par (β_{kj}) la matrice inverse de la matrice de Gram $G = (g^{kj})$ de φ. L'identité précédente s'écrivant
$$^tG. \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \cdots \\ x_i^i \\ \cdots \\ x_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
on en déduit
$$\begin{pmatrix} x_i^1 \\ \cdots \\ x_i^i \\ \cdots \\ x_i^n \end{pmatrix} =^t G^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{pmatrix} x_i^1 \\ \cdots \\ x_i^i \\ \cdots \\ x_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \cdots \\ \beta_{ii} \\ \cdots \\ \beta_{in} \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$x_i^j = \beta_{ij}.$$
Le tenseur dual a comme composantes
$$g = g^{ij} e_i \otimes e_j = \varphi(\widehat{e^i}, \widehat{e^j}) e_i \otimes e_j.$$
Mais
$$\varphi(\widehat{e^i}, \widehat{e^j}) = x_i^k x_j^l g_{kl}.$$
On en déduit
$$g^{ij} = \beta_{ik}\beta_{jl}g_{kl}$$
et donc
$$g^{ij} = \beta_{ij}.$$

Proposition 67 *Les composantes du vecteur dual*
$$\widehat{g} = g^{ij} e_i \otimes e_j$$
du tenseur métrique
$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j$$
sont les composantes de G^{-1} où $G = (g_{ij})$ est la matrice de Gram du produit scalaire φ déterminant le tenseur métrique g.

10.4.3 Coordonnées contravariantes et covariantes d'une forme linéaire

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E et $\mathcal{B}^*$ la base duale, et si

$$v = x^i e_i$$

est un vecteur de E, nous avons appelé coodonnées contravariantes de v relatives à $\mathcal{B}$, le système $\{x^1, \cdots, x^n\}$. Soit $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ un tenseur métrique associée au produit scalaire pseudo-euclidien φ. Les coordonnées covariantes du vecteur v, notées $\{x_1, cdots, x_n\}$ sont données par

$$x_i = \varphi(v, e_i).$$

Proposition 68 *Si $\{x^1, \cdots, x^n\}$ et $\{x_1, cdots, x_n\}$ sont les sytèmes de coordonnées contravariantes et covariantes d'un vecteur $v \in E$ relatives à une base $\mathcal{B}$ de E, alors ces coordonnées sont relies par*

$$x_i = g_{ij} x^j$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Démonstration. On a en effet

$$x_i = \varphi(v, e_i) = x_i = \varphi(x^j e_j, e_i) = x^j \varphi(e_j, e_i) = x^j g_{ji}.$$

Considérons à présent une forme linéaire α non nulle sur E. Elle se décompose sur la base duale

$$\alpha = \alpha_i e^i.$$

Comme le produit scalaire définit un isomorphisme canonique ente E et son dual, il existe un unique vecteur v_α de E correspondant à α, c'est-à-dire

$$\alpha(w) = \varphi(v_\alpha, w)$$

pour tout $w \in E$.

Définition 53 *On appelle coordonnées contravariantes et covariantes de la forme linéaire α sur E relative à une base $\mathcal{B}$ de E, les coordonnées contravariantes et covariantes du vecteur v_α relatives à $\mathcal{B}$.*

EXERCICE 5 Montrer que pour les formes duales e^i de la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$, on a

$$v_{e^i} = \widehat{e^i},$$

le vecteur $\widehat{e^i}$ étant défini dans la Définition **??**. En déduire les composantes contravariantes et convariantes des formes e^i.

Notons par $\{y^1, \cdots, y^n\}$ et par $\{y_1, \cdots, y_n\}$ respectivement les coordonnées contravariantes et covariantes de v_α et donc de α. On a

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_i e^i, \\ v_\alpha = y^i e_i \end{cases}$$

On a donc
$$y_i = \alpha_i$$
pour tout $i = 1, \cdots, n$. Calculons les coordonnées contrvariantes. On a
$$\alpha(e_i) = \alpha_i = \varphi(v_\alpha, e_i) = y^j \varphi(e_j, e_i) = y^j g_{ji}.$$

Proposition 69 *Les coordonnées contravariantes* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *et covariantes* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *de la forme linéaire* α *sont reliées par*
$$y_i = g_{ij} y^j$$
pour tout $i = 1, \cdots, n$.

EXERCICE 6 On considère dans $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire donné par sa forme quadratique
$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z^2 - xy).$$

1. Ecrire le tenseur métrique et son dual relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées covariantes des vecteurs de la base canonique.
3. Calculer les coordonnées contravariantes et covariantes des éléments de la base duale.
4. Soit α la forme linéaire
$$\alpha(x, y, z) = z^2 - xy.$$
Calculer ses coordonnées contravariantes et covariantes.
5. Calculer une base orthonormée $\mathcal{B}$ pour ce produit scalaire.
6. Reprendre tous les calculs précédents mais relativement à la base $\mathcal{B}$.

Chapitre 11

Algèbres sur $\mathbb{K}$. Point de vue tensoriel

11.1 $\mathbb{K}$-algèbres

11.1.1 Définition tensorielle d'une $\mathbb{K}$-algèbre

Dans le chapitre **??** nous avons défini la notion de $\mathbb{K}$-algèbres comme un couple (E,μ) formé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et d'une application bilinéaire

$$\mu : E \times E \to E$$

à valeurs dans E. Or nous avons vu que l'espace $\mathcal{L}(E,E;E)$ des formes bilinéaires sr E à valeurs dans E était isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(E\otimes E;E)$ des applications linéaires de $E\otimes E$ à valeurs dans E. On a donc la définition équivalente d'une $\mathbb{K}$-algèbre :

Définition 54 *On appelle $\mathbb{K}$-algèbre tout couple $A=(E,T)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et T une application linéaire*

$$\mu : E\otimes E \to E.$$

Remarque. Lorsque E est de dimension finie, l'espace $\mathcal{L}(E,E;E)$ des applications bilinéaires sur E à valeurs dans E est isomorphe à l'espace vectoriel $T_1^2(E)$ des tenseur 1-contravariants et 2-covariants sur E. Dans ce cas, une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie est défini comme un couple $A=(E,T)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et T un tenseur de $T_1^2(E)$ appelé tenseur de structure de A. Cette définition est bien équivalente à la Définition **??**. Si E est de dimension infinie, $\mathcal{L}(E,E;E)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(E\otimes E;E)$ des applications linéaires de $E\otimes E$ à valeurs dans E. Mais lorsque F et G sont des espaces de dimension infinie, alors $F^*\otimes G$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(F,G)$. En effet considérons l'application bilinéaire

$$\varphi : F^* \times G \to \mathcal{L}(F;G)$$

définie par $\varphi(f,w)(v)=f(v)w$. Elle se factorise en une application linéaire $h : F^*\otimes G \to \mathcal{L}(F;G)$ injective (cf Proposition 43). En revenant à notre structure, on en déduit que $(E\otimes E)^*\otimes E$ est un sous-espace de

$\mathcal{L}(E \otimes E; E)$. Mais $E^* \otimes E^*$ est aussi un sous-espace de $(E \otimes E)^*$. Ainsi, si la dimension de E est infinie, tout tenseur de type $(1,2)$ peut être considéré comme une application bilinéaire sur E à valeurs dans E, mais la réciproque peut ne pas être vraie.

11.1.2 Algèbres unitaires

Rappelons que l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{K}; E)$ des applications linéaires de $\mathbb{K}$ dans E est canoniquement isomorphe à E. En effet, considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & \mathcal{L}(\mathbb{K}; E) \\ v & \mapsto & \varphi(v) \end{array}$$

où $\varphi(v)$ est définie par

$$\varphi(v)(a) = av.$$

Il est clair que φ est linéaire. Montrons que φ est un isomorphisme. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; E)$. On a, pour tout $a \in \mathbb{K}$

$$f(a) = f(a \cdot 1) = af(1).$$

Posons $v = f(1)$, alors $f(a) = av$ et $f = \varphi(v)$. Donc φ est surjective. Si $v \in \ker \varphi$, alors

$$\varphi(v) = 0 \text{ et } \varphi(v)(a) = av = 0 \text{ pour tous } a \in \mathbb{K}.$$

Ainsi $av = 0$ pour tout a et donc $v = 0$. Nous pouvons donc identifier les espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{K}; E)$ et E

Définition 55 *On dira que l'algèbre $A = (E, T)$ est unitaire s'il existe une application $\eta \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; E)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes E \arrow[r, "\eta \otimes id_E"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & E \otimes E \arrow[d, "\tau"] \arrow[dl, phantom, "*"] \arrow[dr, phantom, "*"] & E \otimes \mathbb{K} \arrow[l, "id_E \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\varphi_1"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

où φ_1 et φ_2 sont les isomorphismes canoniques.

Ce diagramme se traduit donc par

$$T(\eta(a) \otimes v) = T(v \otimes \eta(a)) = \varphi_2(a \otimes v) = av = \varphi_1(v \otimes a).$$

Ainsi l'élément $\eta(1)$ de E est une unité pour le tenseur T.

11.1.3 Algèbres abéliennes ou commutatives

Considérons l'application linéaire

$$\tau_E : E \otimes E \to E \otimes E$$

définie par

$$\tau_E(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$$

pour tous $v_1, v_2 \in E$. Cette application est souvent appelée la permutation des facteurs de $E \otimes E$.

Définition 56 *L'algèbre $A = (E, T)$ est commutative si le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} E \otimes E \arrow[r, "\tau_E"] \arrow[dr, "T"'] & E \otimes E \arrow[d, "\tau"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Ceci se traduit par $T(v_1 \otimes v_2) = T(v_2 \otimes v_1)$ pour tous $v_1, v_2 \in E$ et correspond bien à la notion de commutativitité donnée à partir de multiplications bilinéaires.

11.1.4 Homomorphisme d'algèbres

Soient $A_1 = (E_1, T_1)$ et $A_2 = (E_2, T_2)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres.

Définition 57 *Une application linéaire*

$$f : E_1 \to E_2$$

est appelée un morphisme d'algèbres entre A_1 et A_2 si elle vérifie

$$T_2 \circ (f \otimes f) = f \circ T_1.$$

Si A_1 et A_2 sont des algèbres unitaires correspondant aux applications

$$\eta_i : \mathbb{K} \to A_i,\ i = 1, 2$$

alors f sera appelé morphisme d'algèbres unitaires si

$$f \circ \eta_1 = \eta_2.$$

Ces identités se traduisent sur les vecteurs décomposables par

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2(f(v_1) \otimes f(v_2)) = f(T_1(v_1 \otimes v_2)), \\ f(\eta_1(1)) = \eta_2(1) \end{array} \right.$$

11.1.5 Quelques exemples d'algèbres classiques

Nous allons reprendre en termes tensoriels les identités des algèbres classiques, telles que les algèbres associatives, de Lie, de Jordan. Auparavant, nous allons introduire des endomorphismes sur $E^{\otimes^n}$ dont le rôle est de permuter les facteurs et qui généralisent l'application τ permutant deux facteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\Sigma_n$le groupe symétrique de dégré n. Si $\mathbb{K}[\Sigma_n]$ désigne l'espace vectoriel de dimension $n!$ dont une base est constituée des éléments de Σ_n, alors tout vecteur de $\mathbb{K}[\Sigma_n]$ s'écrit

$$\Lambda = \sum_{\sigma \in \sum_n} a_\sigma \sigma$$

avec $a_\sigma \in \mathbb{K}$. On peut munir l'espace vectoriel $\mathbb{K}[\Sigma_n]$ d'une structure d'algèbre associative, non commutative dès que $n \geq 3$, en définissant la multiplication sur les vecteurs de base :

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2$$

qui correspond à la loi du groupe Σ_n.

Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, soit $\Phi_\sigma^{n,E}$ l'endomorphisme de $E^{\otimes^n}$ défini sur les vecteurs générateurs $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ par :

$$\Phi_\sigma^{n,E}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Cette application linéaire est bijective :

$$(\Phi_\sigma^{n,E})^{-1} = \Phi_{\sigma^{-1}}^{n,E}.$$

Si $\Lambda = \sum_{\sigma \in \sum_n} a_\sigma \sigma$ est un vecteur de $\mathbb{K}[\Sigma_n]$, nous poserons alors

$$\Phi_\Lambda^{n,E} = \sum_{\sigma \in \sum_n} a_\sigma \Phi_\sigma^{n,E}.$$

Les applications $\Phi_\Lambda^{n,E}$ sont des endomorphismes de $E^{\otimes^n}$, mais ne sont pas en général des automorphismes dès que Λ n'a pas d'inverse dans $\mathbb{K}[\Sigma_n]$.

Algèbres de Lie. Une algèbre $A = (E, T)$ est une algèbre de Lie si l'application linéaire T vérifie

$$\begin{cases} T \circ \Phi_{\tau_{12}}^{2,E} = -T, \\ T \circ (T \otimes Id) \circ \Phi_{1+c+c^2}^{3,E} = 0 \end{cases}$$

où τ_{ij} désigne la transposition des indices i et j et c le cycle $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Algèbres associatives. Une algèbre $A = (E, T)$ est une algèbre associative si l'application linéaire T vérifie

$$T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T) = 0.$$

Algèbres associatives commutatives. Une algèbre $A = (E, T)$ est une algèbre associative commutative si l'application linéaire T vérifie

$$\begin{cases} T \circ \Phi_{\tau_{12}}^{2,E} = T, \\ T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T) = 0. \end{cases}$$

Notons que la première identité s'écrit aussi

$$T \circ \Phi_{I-\tau_{12}}^{2,E} = 0$$

où I est l'identité de Σ_2.

Algèbres G_i-associatives. Le groupe Σ_3 admet 6 sous groupes :

$$\begin{cases} G_1 = \{I\}, \\ G_2 = \{I, \tau_{12}\}, \\ G_3 = \{I, \tau_{13}\}, \\ G_4 = \{I, \tau_{23}\}, \\ G_5 = \{I, c, c^2\}, \\ G_6 = \Sigma_3. \end{cases}$$

Associons à chacun de ces 6 groupes l'endomorphisme de $E^{\otimes^3}$:

$$\Phi_{G_i}^{3,E} = \Sigma_{\sigma \in G_i} \epsilon(\sigma)\sigma$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ. Par exemple

$$\Phi_{G_1}^{3,E} = Id$$

et

$$\Phi_{G_6}^{3,E} = \Phi_{I-\tau_{12}-\tau_{13}-\tau_{23}+c+c^2}^{3,E}.$$

Une algèbre $A = (E, T)$ est une algèbre G_i-associative si l'application linéaire T vérifie

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi_{G_i}^{3,E} = 0.$$

En particulier

- Une algèbre G_1-associative est une algèbre associative.
- Une algèbre G_2-associative est une algèbre symétrique à gauche (ou Pré Lie). Elle correspond à l'identité

$$T(T(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) - T(v_1 \otimes T(v_2 \otimes v_3)) = T(T(v_2 \otimes v_1) \otimes v_3) - T(v_2 \otimes T(v_1 \otimes v_3)).$$

- Une algèbre G_3-associative est une algèbre symétrique à droite (ou de Vinberg). Elle correspond à l'identité

$$T(T(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) - T(v_1 \otimes T(v_2 \otimes v_3)) = T(T(v_1 \otimes v_) \otimes v_2) - T(v_1 \otimes T(v_3 \otimes v_2)).$$

- Une algèbre G_6-associative est une algèbre Lie admissible. Elle correspond à l'identité

$$\begin{array}{l} T(T(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) - T(v_1 \otimes T(v_2 \otimes v_3)) - T(T(v_2 \otimes v_1) \otimes v_3) + T(v_2 \otimes T(v_1 \otimes v_3)) \\ -T(T(v_1 \otimes v_3) \otimes v_2) + T(v_1 \otimes T(v_3 \otimes v_2)) - T(T(v_3 \otimes v_2) \otimes v_1) + T(v_3 \otimes T(v_2 \otimes v_1)) \\ +T(T(v_2 \otimes v_3) \otimes v_1) - T(v_2 \otimes T(v_3 \otimes v_1)) + T(T(v_3 \otimes v_1) \otimes v_2) - T(v_3 \otimes T(v_1 \otimes v_2)) = 0 \end{array}$$

EXERCICE 1

1. Montrer que si $A = (E, T)$ est une algèbre Lie admissible, alors l'algèbre $A_1 = (E, T_1)$ où T_1 est l'application linéaire définie par

$$T_1 = T \circ \Phi_{I-\tau_{12}}^{2,E}$$

   est une algèbre de Lie.
2. Montrer que toute algèbre G_i-associative est une algèbre Lie admissible.

Algèbres à puissance associative.

Une algèbre $A = (E, T)$ est dite à puissance associative, si toute sous algèbre engendrée par un élément est associative. Ceci implique en particulier

$$T(T(v, v), v) = T(v, T(v, v))$$

pour tout $v \in E$. La puissance associativité implique égalemement que pour tout n la puissance n-ième d'un vecteur v est obtenue en multipliant n exemplaires de ce vecteur sans tenir compte du parenthésage. Concrètement, si l'on note plus simplement $T(v, v) = v \cdot v = v^2$, alors

$$v^3 = v^2 \cdot v = v \cdot v^2.$$

Par récurrence, en partant de $v^1 = v$, on a

$$v^n = v^{n-1} \cdot v = v^i \cdot v^{n-i}.$$

Définition 58 *Une $\mathbb{K}$-algèbre $A = (E, T)$ est dite à puissance 3 associative si l'application linéaire T vérifie*

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{12}+\tau_{13}+\tau_{23}+c+c^2} = 0.$$

EXERCICE 2

1. Montrer que la condition de puissance 3 associative est équivalente à

$$T(T(v \otimes v) \otimes v) = T(v \otimes (v \otimes v))$$

pour tout $v \in E$.

2. Montrer que toute algèbre à puissance associative est à puissance 3 associative. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 3 Montrer qu'une algèbre $A = (E, T)$ est Lie-admissible et à puissance 3 associative si et seulement si elle est G_5-associative.

Algèbres alternatives.

Définition 59 *Une $\mathbb{K}$-algèbre $A = (E, T)$ est dite alternative si l'application linéaire T vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{l} (T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{12}} = 0, \\ (T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{23}} = 0. \end{array} \right.$$

Proposition 70 *Les algèbres alternatives sont à puissance 3-associative.*

Démonstration. Considérons la première identité :

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{12}} = 0.$$

Comme l'application linéaire $\Phi^{3,E}_{\tau_{13}}$ est inversible, elle est involutive, cette identité est équivalente à

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{12}} \circ \Phi^{3,E}_{\tau_{13}} = 0$$

c'est-à-dire

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{\tau_{13}+c^2} = 0.$$

De même, $\Phi^{3,E}_{\tau_{23}}$ est inversible. Comme $\Phi^{3,E}_{I+\tau_{12}} \circ \Phi^{3,E}_{\tau_{23}} = \Phi^{3,E}_{\tau_{23}+c}$, on a l'identité

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{\tau_{23}+c} = 0.$$

En ajoutant ces trois relations, on obtient

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{12}+\tau_{23}+\tau_{23}+c+c^2} = 0$$

et l'algèbre est à puissance 3 associative.

Remarque. Dans cette démonstration nous n'avons utilisée que la première identité de la définition des algèbres alternatives. Si on appelle algèbres alternatives à gauche toute algèbre $A = 5E, T)$ dont l'application linéaire T vérifie uniquement

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{12}} = 0$$

nous avons en fait montrer que toute algèbre alternative à gauche est à puissance 3 associative.

De même si on appelle algèbres alternatives à droite toute algèbre $A = (E, T)$ dont l'application linéaire T vérifie uniquement

$$(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{23}} = 0$$

alors on montre de la même façon que toute algèbre alternative à gauche est à puissance 3 associative.

EXERCICE 4 L'algèbre des octonions est une algèbre de dimension 8 dont la multiplication est définie dans la base $\{e_0 = 1, e_1, \cdots, e_7\}$ par

T	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Montrer que cette algèbre non associative est alternative.

EXERCICE 5 Montrer que toute algèbre alternative est à puissance associative

EXERCICE 6 Montrer que l'algèbre des sédénions définie dans la base $\{e_0 = 1, e_1, \cdots, e_{15}\}$ par

$$1 \cdot e_i = e_i \cdot 1 = e_i$$

et par le tableau suivant est à puissances associatives mais n'est pas alternative.

T	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_9	$-e_8$	e_{11}	e_{10}	e_{13}	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	e_9	e_{14}	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	e_5	e_4	e_{11}	e_{10}	e_9	e_8	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_4	e_7	$-e_6$	$-e1$	-1	e_3	e_2	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_7	e_4	e_5	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_6	$-e_5$	e_4	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	-1	e_1	e_2	e_3
e_{13}	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$
e_{14}	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1
e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1

Algèbres flexibles

Définition 60 *Une $\mathbb{K}$-algèbre $A = (E, T)$ est dite flexible si l'application linéaire T vérifie*

$$\left\{ \; (T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{I+\tau_{13}} = 0. \right.$$

Il est clair qu'une telle algèbre est à puissance 3 associative.

Proposition 71 *Toute algèbre alternative est flexible.*

Démonstration. Ceci résulte de l'identité dans Σ_3 :

$$I + \tau_{13} = (I + \tau_{13}) \circ (I + c^2) - (I + \tau_{23}) \circ c^2.$$

Algèbres de Jordan

Définition 61 *Une $\mathbb{K}$-algèbre commutative $A = (E, T)$ est dite de Jordan si l'application linéaire T vérifie*

$$(T \circ [T \circ (T \otimes Id)] \otimes Id - T \circ (T \otimes T)) \circ \Phi^{4,E}_{\tau_1+\tau_2+\tau_3} = 0$$

où τ_1, tau_2, tau_3 sont les permutations appartenant à Σ_4 suivantes :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 7 Soit $A = (E, T)$ une algèbre associative. Montrer que l'algèbre $L = (E, T_1)$ où $T_1 = T \circ \Phi^{2,E}_{I-\tau_{12}}$ est une algèbre de Lie et que l'algèbre $J = (E, T_2)$ où $T_2 = T \circ \Phi^{2,E}_{I+\tau_{12}}$ est une algèbre de Jordan.

EXERCICE 8 On appelle algèbre de Poisson, une algèbre $A = (E, T)$ dont l'application linéaire T vérifie

$$3(T \circ (T \otimes Id) - T \circ (Id \otimes T)) - T \circ (T \otimes Id) \circ \Phi^{3,E}_{\tau_{23}+c-\tau_{12}-c^2} = 0.$$

1. Montrer qu'une algèbre de Poisson est Lie admissible et flexible.
2. Montrer qu'une algèbre $A = (E, T)$ Lie admissible, flexible et vérifiant

$$T \circ (T \otimes Id) \circ \Phi^{3,E}_{2I+c-\tau_{12}} - T \circ (Id \otimes T)) \circ \Phi^{3,E}_{2I+\tau_{23}-c^2} = 0.$$

3. Montrer que si $A = (E, T)$ est une algèbre de Poisson, alors l'algèbre $L = (E, T_1)$ où $T_1 = T \circ \Phi^{2,E}_{I-\tau_{12}}$ est une algèbre de Lie, l'algèbre $A_2 = (E, T_2)$ où $T_2 = T \circ \Phi^{2,E}_{I+\tau_{12}}$ est une algèbre associative commutative et les applications linéaires T_1 et T_2 sont reliés par la relation de Leibniz :

$$T_1 \circ (T_2 \otimes Id) - T_2 \circ (Id \otimes T_1) \circ Phi^{2,E}_{I-\tau_{12}}.$$

4. Montrer la réciproque.

11.2 Coalgèbres

Dans le chapitre 6, nous avons esquissé une notion de coalgèbres, mais la présentation tensorielle de la loi multiplicative va permettre une formalisation mieux adaptée.

11.2.1 Définition générale

Définition 62 *Une $\mathbb{K}$-coalgèbre est un couple $C = (E, \Delta)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$\Delta : E \to E \otimes E$$

une application linéaire. La coalgèbre $C = (E, \Delta)$ est dite counitaire s'il existe une forme linéaire

$$\varepsilon : E \to \mathbb{K}$$

vérifiant

$$\begin{cases} (\varepsilon \otimes Id)(\Delta(v)) = 1 \otimes v, \\ (Id \otimes \varepsilon)(\Delta(v)) = v \otimes 1 \end{cases}$$

pour tout $v \in E$.

L'application Δ est appelée la comultiplication de la coalgèbre.

Exemple. Prenons $E = \mathbb{K}$ et considérons l'application

$$\Delta : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$$

définie par

$$\Delta(a) = a \otimes a$$

pour tout $a \in \mathbb{K}$. Le couple $(\mathbb{K}, \Delta)$ est une coalgèbre. L'application ε donnée par $\varepsilon(a) = 1$ pour tout a vérifie les conditions de counité, cette coalgèbre est counitaire.

Définition 63 *Une coalgèbre $C = (E, \Delta)$ est dite cocommutaive si Δ vérifie*

$$\Delta = \tau \circ \Delta$$

où $\tau : E \otimes E \to E \otimes E$ est l'application linéaire, la permutation des facteurs, vérifiant

$$\tau(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$$

pour tout $v_1, v_2 \in E$.

L'application τ, appelée aussi "twist" correspond en fait à l'application $\Phi_{\tau_{12}}$ définie dans le paragraphe précédent. Mais la tradition impose la notation τ.

11.2.2 Coalgèbres coassociatives

Définition 64 *Une coalgèbre $C = (E, \Delta)$ est dite coassociative si la comultiplication Δ vérifie*

$$(Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta.$$

EXERCICE 7

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et soit $\{e_1, e_2\}$ une base de E. Soit $\Delta : E \to E \otimes E$ l'application linéaire définie par
$$\begin{cases} \Delta(e_1) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1, \\ \Delta(e_2) = e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2. \end{cases}$$
Montrer que $C = (E, \Delta)$ est une coalgèbre coassociative counitaire. Est-elle cocommutative ?
2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $\{e_0, e_1, e_2\}$ une base de E. Soit $\Delta : E \to E \otimes E$ l'application linéaire définie par
$$\begin{cases} \Delta(e_0) = e_0 \otimes e_0, \\ \Delta(e_1) = e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0, \\ \Delta(e_2) = e_0 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_0. \end{cases}$$
Est-ce que $C = (E, \Delta)$ est une coalgèbre coassociative cocommutative et counitaire ?

EXERCICE 8 On considère l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$. Notons par (E_{ij}) la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficients x_{ij} qui vaut 1. On définit l'application linéaire $\Delta : E \to E \otimes E$ apr

$$\Delta(E_{ij}) = \sum_{p=1}^{2} E_{ip} \otimes E_{pj}$$

pour $i, j = 1, 2$. Montrer que $C = (E, \Delta)$ est une coalgèbre coassociative counitaire. Est-elle cocommutative ?

EXERCICE 9 Soit $A = (E, T)$ une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire de dimension finie. Montrer que l'on peut munir le dual E^* d'une structure de coalgèbre coassociative counitaire.

Proposition 72 *Soit $T(M)$ l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel E. Il existe sur $T(M)$ une structure de coalgèbre coassociative counitaire.*

Démonstration. Considérons l'application linéaire

$$f : E \to E \otimes E$$

définie par

$$f(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$$

pour tout $v \in E$.

Lemme 3 *Soit $A_1 = (E_1, T_1)$ et $A_2 = (E_2, T_2)$ deux algèbres associatives. Alors $A_1 \otimes A_2 = (E_1 \otimes E_2, T_1 \otimes T_2)$ est une algèbre associative.*

En effet, si pour $i = 1, 2, 3$ on prend des vecteurs $v_i \in E_1$ et $w_i \in E_2$, alors

$$\begin{aligned} T_1 \otimes T_2(T_1 \otimes T_2((v_1 \otimes w_1) \otimes (v_2 \otimes w_2)) \otimes (v_3 \otimes w_3)) &= T_1 \otimes T_2((T_1(v_1 \otimes v_2) \otimes T_2(w_1 \otimes w_2)) \otimes (v_3 \otimes w_3)) \\ &= T_1(T_1(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) \otimes T_2(T_2(w_1 \otimes w_2)) \otimes w_3) \\ &= T_1(v_1 \otimes T_1(v_2 \otimes v_3)) \otimes T_2(w_1 \otimes T_2(w_2 \otimes w_3)) \\ &= T_1 \otimes T_2(v_1 \otimes w_1) \otimes T_1 \otimes T_2((v_2 \otimes w_2) \otimes (v_3 \otimes w_3)). \end{aligned}$$

De ce lemme nous déduisons que $T(E) \otimes T(E)$ est aussi une algèbre associative. D'après la propriété universelle de l'algèbre tensorielle, il existe un homomorphisme d'algèbres

$$\Delta : T(E) \to T(E) \otimes T(E)$$

tel que $\Delta(v) = f(v)$ pour tout $v \in E$. Cette application Δ définit une structure de coalgèbre $C = (T(E), \Delta)$. Montrons qu'elle est coassociative. Comme Δ est un morphisme d'algèbres, il suffit de montrer la relation de coassociativité

$$(Id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id) \circ \Delta$$

sur des générateurs de l'algèbre tensorielle, par exemple sur les vecteurs de E. Soit $v \in E$. Alors, comme l'algèbre tensorielle est unitaire, $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ et

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(v) &= (\Delta \otimes Id)(v \otimes 1 + 1 \otimes v) \\ &= v \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes v \otimes 1 + 1 \otimes \otimes v \end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{ll}(Id \otimes \Delta)\circ\Delta(v) & = (Id\otimes\Delta)(v\otimes 1 + 1\otimes v) \\ & = v\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes v\otimes 1 + 1\otimes \otimes v\end{array}$$

Construisons maintenant la counité. Pour cela considérons l'application nulle

$$0 : E \to \mathbb{K}$$

à valeurs dans l'algèbre associative unitaire $\mathbb{K}$. D'après la propriété universelle de l'algèbre tensorielle, cette application se factorise en un morphisme d'algèbres unitaires

$$\varepsilon : T(E) \to \mathbb{K}$$

tel que $\varepsilon(v) = 0$ pour tout $v \in E$. Comme précédemment, il suffit de prouver les relations

$$\left\{\begin{array}{l}(\varepsilon\otimes Id)(\Delta(v)) = 1\otimes v, \\ (Id\otimes\varepsilon)(\Delta(v)) = v\otimes 1\end{array}\right.$$

sur les seuls vecteurs $v \in E$. On a

$$\begin{array}{ll}(\varepsilon\otimes Id)(\Delta(v)) & = \varepsilon\otimes Id(v\otimes 1 + 1\otimes v) \\ & = \varepsilon(v)\otimes 1 + \varepsilon(1)\otimes v \\ & = 1\otimes v\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll}(Id\otimes\varepsilon)(\Delta(v)) & = Id\otimes\varepsilon(v\otimes 1 + 1\otimes v) \\ & = v\otimes\varepsilon(1) + v\otimes\varepsilon(v) \\ & = v\otimes 1.\end{array}$$

Ainsi ε est une counité. D'où la proposition ♣

11.2.3 Coalgèbres de Lie

Définition 65 *Une coalgèbre $C = (E, \Delta)$ est une coalgèbre de Lie*

1. $\Delta = -\Phi_{\tau_{12}} \circ \Delta$
2. $\Phi_{Id+c+c^2} \circ (Id \otimes \Delta) \circ \Delta = 0.$

EXERCICE 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et soit $\{e^1, e^2, e^3\}$ la base duale. On considère sur le dual E^* la comultiplication

$$\Delta : E^* \to E^* \otimes E^*$$

définie par

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta(e^1) = e^2\otimes e^3 - e^3\otimes e^2, \\ \Delta(e^2) = e^3\otimes e^1 - e^1\otimes e^3, \\ \Delta(e^3) = e^1\otimes e^2 - e^2\otimes e^1.\end{array}\right.$$

Montrer que $C = (E^*, \Delta)$ est une coalgèbre de Lie.

Proposition 73 *Soit $C=(E,\Delta)$ une coalgèbre coassociative. Alors la coalgèbre $C_L=(E,\Delta_L)$ dont la comultiplication est donnée par*

$$\Delta_L=\Phi_{Id-\tau_{12}}\circ\Delta$$

est une coalgèbre de Lie.

Démonstration. Soit $v\in E$ et soit

$$\Delta(v)=\sum v_i\otimes w_i.$$

On a alors

$$\Delta_L(v)=\sum(v_i\otimes w_i-w_i\otimes v_i).$$

On a

$$\Phi_{\tau_{12}}\circ\Delta(v)=-\sum(v_i\otimes w_i-w_i\otimes v_i)=-\Delta_L(v)$$

pour tout $v\in E$. De même,

$$\begin{array}{rcl}\Phi_{Id+c+c^2}\circ(Id\otimes\Delta_L)\circ\Delta_L & = & \Phi_{Id+c+c^2}\circ(Id\otimes\Phi_{Id-\tau_{12}}\circ\Delta)\circ\Phi_{Id-\tau_{12}}\circ\Delta\\ & = & \Phi_{Id+c+c^2}\circ(Id\otimes\Delta)\circ\Delta-\Phi_{Id+c+c^2}\circ(Id\otimes\Delta)\circ(\Phi_{\tau_{12}}\circ\Delta)\\ & & -\Phi_{Id+c+c^2}\circ(Id\otimes(\Phi_{\tau_{12}}\circ\Delta))\circ\Delta\\ & & +\Phi_{Id+c+c^2}\circ(Id\otimes(\Phi_{\tau_{12}}\circ\Delta))\circ(\Phi_{\tau_{12}}\circ\Delta).\end{array}$$

Comme Δ est coassociative, nous avons des relations du type

$$(Id\otimes\Delta)\circ\Delta=\Phi_c\circ(Id\otimes\Delta)\circ(\Phi_{\tau_{12}}\circ\Delta)$$

et les termes de l'identité précédente s'éliminent deux à deux. ♣.

Remarque : la notion de bigèbres. La notion de bigèbres, appelées également bialgèbres, relie les structures d'algèbres et de coalgèbres que l'on peut mettre sur un espace vectoriel. Comme cette notion sort un peu du cadre de travail imposé dans ce livre, nous allons la présenter sommairement. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Supposons que sur E existe une structure d'algèbre associative unitaire $A=(E,T)$ et une structure de coalgèbre coassociative counitaire $C=(E,\Delta)$. La comultiplication

$$\Delta:E\to E\otimes E$$

est alors une application linéaire d'une algèbre associative E dans une autre algèbre associative $E\otimes E$. Rappelons que le produit d'algèbre associatif sur $E\otimes E$ est $T\otimes T$. Appelons ε la counité de la coalgèbre C. C'st aussi une application linéaire

$$\varepsilon:E\to\mathbb{K}$$

qui prend ses valeurs dans une algèbre associative et à valeurs dans une algèbre associative. En général, ces deux applications linéaires ne sont pas des homomorphismes d'algèbres unitaires.

Définition 66 *On dira que le triplet $B=(E,T,\Delta)$ où E est un $\mathbb{K}$-esapce vectoriel, $A=(E,T)$ une algèbre associative unitaire, $C=(E,\Delta)$ une coalgèbre coassociative counitaire est une bigèbre si les applications linéaires*

1. $\Delta:E\to E\otimes E$
2. $\varepsilon:E\to\mathbb{K}$

sont des homomorphismes d'algèbres unitaires.

Ceci signifie que l'on a

$$\Delta \circ T = (T \otimes T) \circ (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (\Delta \otimes \Delta)$$

et

$$\varepsilon \circ T = m \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon)$$

où m désigne la multiplication dans $\mathbb{K}$. Comme ces homomorphismes sont unitaires, on a en plus

$$\Delta \circ \eta(a) = \eta(a) \otimes \eta(a)$$

pour tout a de $\mathbb{K}$ où $\eta : \mathbb{K} \to E$ est l'unité de l'algèbre A et

$$\varepsilon \circ \eta(a) = a.$$

On montre, sans trop de difficultés que les conditions pour que $B = (E, T, \Delta)$ soit une bigèbre sont équivalentes à dire que les applications linéaires

$$T : E \otimes E \to E$$

et

$$\eta : \mathbb{K} \to E$$

sont des homomorphismes de coalgèbes. En effet si les relations précédentes décrivent le fait que Δ et ε sont des morphismes d'algèbres unitaires, les deux premières sont équivalentes à dire que T est un morphimsme de coalgèbres counitaires et les deux dernières que η est aussi un tel morphisme.

Chapitre 12

Calcul tensoriel en géométrie riemannienne

12.1 Composantes contravariantes et covariantes dans un espace euclidien

12.1.1 Définition

Soit E un espace pseudo euclidien. On notera, pour respecter les usages de la géométrie différentiel par g le produit scalaire sur E. Considérons une base quelconque (non nécéssairement orthonormée) $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de E. Soit $v \in E$.

Définition 67 *On appelle*

1. *Composantes contravariantes de v relatives à la base $\mathcal{B}$ les scalaires x^i, $i = 1, \cdots, n$ donnés par*
$$v = x^i e_i.$$
2. *Composantes covariantes de v relatives à la base $\mathcal{B}$ les scalaires x_i, $i = 1, \cdots, n$ donnés par*
$$x_i = g(v, e_i).$$

Remarquons que si la base $\mathcal{B}$ est orthonomée, alors

$$x_i = g(v, e_i) = g(x^j e_j, e_i) = g(e_i, e_i) x^i = \pm x^i.$$

Si l'espace est euclidiens, les deux systèmes de composantes coïncident. Il n'en est pas de même si la base n'est pas orthonormée. Soit $(g_{ij} = g(e_i, e_j))$ la matrice de g relative à la base $\mathcal{B}$. On a alors

$$x_i = g(v, e_i) = g_{ji} x^j \tag{12.1}$$

soit, en développant cette écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Inversement, connaissant le système de composantes covariantes, on peut trouver les composantes contravariantes. Posons

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.$$

Cette matrice est bien inversible car g est non dégénérée. On a alors

$$x^i = g(v, e_i) = g^{ji} x^j. \tag{12.2}$$

12.1.2 Expression du produit scalaire

Soient u et v deux vecteurs de E de composantes contravariantes et covariantes respectivement égales à $(x^i), (x_i), (y^i), (y_i)$. Alors

$$g(u, v) = g_{ij} x^i y^j = x_i y^j = x^i y_j.$$

On en déduit en particulier, si q est la forme quadratique associée à g :

$$q(u) = x^i x_i.$$

12.1.3 Changement de bases

Soient $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ une autre base de E. Posons

$$e'_i = \alpha_i^j e_j, \quad e_i = \beta_i^j e'_j.$$

Si $\{x^i\}$ et $\{x'^i\}$ sont les systèmes de coordonnées contravariantes de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$$

où P est la matrice (α_i^j). Si $\{x_i\}$ et $\{x'_i\}$ sont les systèmes de coordonnées covariantes de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

12.2 Dualité

La donnée d'un produit scalaire pseudo euclidien sur E va permettre d'identifier tout tenseur d'ordre q avev un tenseur contravariant du même ordre. Il suffira donc de considérer sur un espace pseudo euclidien uniquement les tenseurs contravariants.

Soit $u \in E$. Il lui correspond la forme linéaire $l_u \in E^*$ définie par

$$l_u(v) = g(u, v).$$

Inversement, à toute forme linéaire $f \in E^*$ correspond un unique vecteur u tel que $f = l_u$. Considérons la base duale $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B}$. Relativement à ces bases, on a $u = (x^i)$. Alors les composantes de l_u dans la base $\mathcal{B}'$ sont les composantes (x_i) covariantes de u. Ainsi, dans un espace pseudo euclidien, grâce au produit scalaire, on peut identifier de manière canonique l'espace E et son dual E^*.

Considérons à présent un tenseur T contravariant d'ordre q qui soit du type

$$T = u_{(1)} \otimes u_{(2)} \otimes \cdots \otimes u_{(q)}.$$

A chaque vecteur $u_{(i)}$ de E correspond la forme linéaire $l_{u_{(i)}}$. Nous pouvons donc faire correspondre à T un tenseur de type $(p, q-p)$ obtenu en remplaçant p vecteurs $u_{(i)}$ par les formes $l_{u_{(i)}}$. Cherchons les composantes de ces différents tenseurs. Soient $(x^k_{(i)}$ les composantes contravariantes du vecteur $u_{(i)}$, alors les composantes contravariantes du tenseur T sont

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_q} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_q}_{(q)}.$$

Si nous remplaçons le vecteurs $u_{(1)}$ par la forme linéaire $l_{u_{(1)}}$, les composantes du nouveau tenseur de type $(1, q-1)$ sont

$$t_{i_1}{}^{i_2 \cdots i_q} = x_{(1) i_1} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_q}_{(q)}.$$

Si nous remplaçons le vecteurs $u_{(2)}$ par la forme linéaire $l_{u_{(2)}}$, les composantes du nouveau tenseur de type $(1, q-1)$ sont

$$t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 \cdots i_q} = x^{i_1}_{(1)} x_{(2) i_2} x^{i_3}_{(3)} \cdots x^{i_q}_{(q)}.$$

Ces différents tenseurs seront considérés comme identiques. Mais

$$x_{(2) i_2} = g_{i_2 j_2} x^{j_2}_{(2)}.$$

On en déduit

$$t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 \cdots i_q} = g_{i_2 j_2} t^{i_1 i_2 \cdots i_q}.$$

En opérant sur tous les indices, on en déduit en particulier

$$t_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_q} = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_q j_q} t^{i_1 i_2 \cdots i_q}.$$

Inversement, les composantes contravariantes s'expriment à partir des composantes covariantes par

$$t^{i_1 i_2 i_3 \cdots i_q} = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_q j_q} t_{i_1 i_2 \cdots i_q}.$$

Conclusion. Les différentes composantes contravariantes, mixtes ou covariantes d'un tenseur dans l'espace pseudo euclidien se déduisent les unes des autres par multiplication par g_{ij} ou g^{ij} et des sommations, cette opération pouvant étant répétée. Nous pourrons donc parler de tenseur symétrique, cela voulant dire que le tenseur contravariant associé est antisymétrique.

12.2.1 Le tenseur fondamental

Si u et v sont deux vecteurs de l'espace pseudo euclidien E de composantes contravariantes (x^i) et (y^i), le produit scalaire s'exprime par

$$g(u,v) = g_{ij}x^i y^j.$$

Les g_{ij} sont les composantes d'un tenseur symétrique, appelé *tenseur fondamental.* Les composantes mixtes de ce tenseur sont

$$g^i_j = g^{jk}g_{ik} = g^{jk}g_{ki}.$$

On a également

$$g^{ij} = g^{ik}g^j_k.$$

12.3 La variété riemannienne $\mathbb{R}^n$

12.3.1 Coordonnées curvilignes

Notons par $\{x^1, \cdots, x^n\}$ les coordonnées canoniques d'un point de $\mathbb{R}^n$ (relatives à la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^n$). Un système de n fonctions continument différentiables $g^1, \cdots, g^n$ définit un système de coordonnées curvilignes $\{y^1, \cdots, y^n\}$ si

$$y^i = g^i(x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, n$$

avec

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \frac{\partial g^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^1} \\ \frac{\partial g^1}{\partial x^2} & \frac{\partial g^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g^1}{\partial x^n} & \frac{\partial g^2}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

est non nul.

Définition 68 *On appelle courbes coordonnées les courbes représentant l'ensemble des points M pour leue seule une coordonnées curvilignes y^i varie.*

Ceci permet de définir au point M un repère naturel lié au système de coordonnées curvilignes.

Définition 69 *On appelle repère naturel au point M lié au système de coordonnées curvilignes $\{y^i\}$, la famille des vecteurs tangents en M aux courbes coordonnées. l*

Ces vecteurs s'écrivent donc

$$e_i = \frac{\partial M}{\partial y^i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Ils sont indépendants d'après la définition des coordonnées curvilignes. On définit ainsi au point M un espace vectoriel, d'origine M et engendré par les vecteurs e_i. Cet espace vectoriel sera noté T_M et appelé l'espace tangent au point M à $\mathbb{R}^n$. Si $T(\mathbb{R}^n) = \bigcup_M T_M$, cet ensemble (qui n'est plus un espace vectoriel) est appelé le fibré tangent.

La définition des vecteurs e_i est équivalente à écrire

$$dM = e_i dy^i$$

soit si l'on pose

$$x^i = f^i(y^1, \cdots, y^n)$$

les f^i étant les fonctions inverses des fonctions g^i définissant les coordonnées curvilignes :

$$dx^i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial y^j}\ dyj^j$$

alors

$$e_i = (\frac{\partial f^i}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial f^i}{\partial y^n}).$$

Exemple : Le système de coordonnées polaires. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ le système de coordonnées polaires $(y^1 = r, y^2 = \theta, y_3 = \varphi)$ données par

$$\begin{cases} x^1 = f^1(r, \varphi, \theta) = r\cos\theta\cos\varphi \\ x^2 = f^2(r, \varphi, \theta) = r\cos\theta\sin\varphi \\ x^3 = f^1(r, \varphi, \theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

ou inversement par

$$\begin{cases} y^1 = g^1(x^1, x^2, x^3) = r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ y^2 = g^1(x^1, x^2, x^3) = \theta = \arctan\dfrac{x^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \\ y^3 = g^2(x^1, x^2, x^3) = \varphi = \arctan\dfrac{x^2}{x^1} \end{cases}$$

Les courbes coordonnées passant par $M = (x^1, x^2, x^3)$ sont le rayon vecteur OM, le cercle horizontal centré sur Ox^3 passant par M et le cercle de centre O passan par M. On a donc

$$\begin{cases} dx^1 = (\cos\theta\cos\varphi)dr - (r\sin\theta\cos\varphi)d\theta - (r\cos\theta\sin\varphi)d\varphi \\ dx^2 = (\cos\theta\sin\varphi)dr - (r\sin\theta\sin\varphi)d\theta + (r\cos\theta\cos\varphi)d\varphi \\ dx^3 = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} e_1 = (\cos\theta\cos\varphi, cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \\ e_2 = (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ e_3 = (-r\cos\theta\sin\varphi, r\cos\theta\cos\varphi, 0) \end{cases}$$

On a bien

$$dM = e_1 dy^1 + e_2 dy^2 + e_3 dy^3$$

et (dy^1, dy^2, dy^3) sont les composantes contravariantes de dM dans le repère $\{e_1, e_2, e_3\}$.

12.3.2 Le tenseur fondamental

On considère sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire euclidien canonique associé à la forme quadratique $\sum(x^i)^2$. Soit $\{y^1, \cdots, y^n\}$ un système de coordonnées curvilignes et soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ le repère en M associ''e. Considérons en chaque point de $\mathbb{R}^n$ le tenseur fondamental sur l'espace vectoriel euclidien T_M. Il est donné par

$$g(M) = g_{ij}dy^i dy^j$$

avec $g_{ij} = e_i e_j$. Nous noterons classiquement ce "champ" de tenseurs

$$ds^2 = g_{ij}dy^i dy^j.$$

Exemple : Le tenseur fondamental de coordonnées polaires. Il s'exprime par

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cos^2 \theta d\psi^2 + r^2 d\theta^2.$$

La connaissance du champ de tenseurs fondamental permet de calculer la longueur d'un arc de courbe. Considérons un arc de courbe AB porté par un courbe paramétrée régulière $(y^1 = y^1(t), \cdots, y^n = y^n(t))$, l'arc étant défini pour $t \in [a, b]$. Alors

$$\text{longueur}(AB) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dy^i}{dt}\frac{dy^j}{dt}}\, dt.$$

12.3.3 Les symboles de Christoffel

Considérons le repère associé au système de coordonnées curvilignes en un point proche de M et décomposons le dans le repère au point M. On a

$$dM = dy^i e_i.$$

Posons

$$de_i = \omega_i^j e_j.$$

Les ω_i^j sont des formes linéaires par rapport à dM et s'exprime donc avec les dy^i. Posons donc

$$\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j dy^k.$$

Les Γ_{ki}^j s'appellent les symboles de Christoffel.

Exemple : Les symboles de Christoffel de coordonnées polaires. On a vu que

$$\begin{cases} e_1 = (\cos\theta\cos\varphi, cos\theta\sin\varphi, \sin\theta) \\ e_2 = (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \\ e_3 = (-r\cos\theta\sin\varphi, r\cos\theta\cos\varphi, 0) \end{cases}$$

Ainsi

$$de_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi d\theta - \cos\theta\sin\varphi d\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi d\theta + \cos\theta\cos\varphi d\varphi \\ \cos\theta d\theta \end{pmatrix}$$

$$de_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi dr - r\cos\theta\cos\varphi d\theta + r\sin\theta\sin\varphi d\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi dr - r\cos\theta\sin\varphi d\theta - r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{pmatrix}$$

$$de_3 = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi dr + r\sin\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\theta\cos\varphi d\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi dr - r\sin\theta\cos\varphi d\theta - r\cos\theta\sin\varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{cases} de_1 = \dfrac{d\theta}{r}e_2 + \dfrac{d\varphi}{r}e_3 \\ de_2 = -rd\theta e_1 + \dfrac{dr}{r}e_2 - \tan\theta d\varphi e_3 \\ de_3 = -r\dfrac{d\varphi}{2}e_1 - \dfrac{\tan\theta d\varphi}{2}e_2 - (\dfrac{dr}{r} + \tan\theta d\theta)e_3. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \omega_1^1 = 0 & \omega_1^2 = \dfrac{d\theta}{r} & \omega_1^3 = \dfrac{d\varphi}{r} \\ \omega_2^1 = -rd\theta & \omega_2^2 = \dfrac{dr}{r} & \omega_2^3 = -\tan\theta d\varphi \\ \omega_3^1 = -r\dfrac{d\varphi}{2} & \omega_3^2 = -\dfrac{\tan\theta d\varphi}{2} & \omega_3^3 = \tan\theta d\theta \end{cases}$$

Ainsi les symboles de Christoffel sont

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{21}^1 = 0, \Gamma_{31}^1 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{21}^2 = \dfrac{1}{r}, \Gamma_{31}^2 = 0, \\ \Gamma_{11}^3 = 0, \Gamma_{21}^3 = 0, \Gamma_{31}^3 = \dfrac{1}{r}, \\ \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{22}^1 = -r, \Gamma_{32}^1 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 = \dfrac{1}{r}, \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{32}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^3 = 0, \Gamma_{22}^3 = 0, \Gamma_{32}^3 = -\tan\theta, \\ \Gamma_{13}^1 = 0, \Gamma_{23}^1 = 0, \Gamma_{33}^1 = -r\dfrac{1}{2}, \\ \Gamma_{13}^2 = 0, \Gamma_{23}^2 = 0, \Gamma_{33}^2 = -\dfrac{\tan\theta}{2}, \\ \Gamma_{13}^3 = 0, \Gamma_{23}^3 = \tan\theta, \Gamma_{33}^3 = 0. \end{cases}$$

12.3.4 Présentation contravariantes des symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel ne soient les composantes d'un tenseur $(2,1)$. En effet regardons l'effet d'un changement de base.Considérons un changement de repères

$$e_i = \alpha_i^j e'_j, \quad e'_j = \beta_j^i e_i.$$

Il s'en suit

$$de_i = \alpha_i^j de'_j + d\alpha_i^j e'_j.$$

Mais $de_i = \omega_i^j e_j$. Posons $de'_j = {\omega'}_j^k e'_k$. Alors

$$\begin{aligned} \omega_i^j e_j &= d\alpha_i^j e'_j + \alpha_i^j {\omega'}_j^k e'_k \\ &= d\alpha_i^j \beta_j^l e_l + \alpha_i^j {\omega'}_j^k \beta_k^l e_l. \end{aligned}$$

Ainsi
$$\omega_i^l = d\alpha_i^j \beta_j^l + \alpha_i^j {\omega'}_j^k \beta_k^l.$$
On en déduit les formules de changement de base pour les symboles de Christoffel :
$$\Gamma_{ki}^l = \alpha_i^j \beta_s^m {\Gamma'}_{mj}^s \alpha_k^l + \beta_j^l \partial_k \alpha_i^j.$$

Bien que ces formules de changement de bases ne soient pas du type tensoriel, nous allons tout de même regarder le point de vue covariant. On a
$$e_i e_j = (g_{ij}),$$
d'où
$$de_i.e_j + e_i.de_j = dg_{ij}.$$
Or $de_i = \omega_i^j e_j$. D'où
$$\omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki} = dg_{ij}.$$
Les composantes covaraintes de de_i sont données par
$$\omega_{ki} = g(e_k, de_i) = g(e_k, \omega_i^j e_j) = \omega_i^j g_{kj}.$$
Comme $\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j dy^k$, on obtient
$$\omega_{ki} = \Gamma_{ji}^l dy^j g_{kl} = \Gamma_{ji}^l g_{kl} dy^j = \Gamma_{jki} dy^j.$$

En résumé, on a les relations
$$\begin{cases} \omega_{jk} = \Gamma_{kji} dy^k \\ \omega_{jk} = g_{jk}\omega_i^k \\ \Gamma_{kji} = g_{jh}\Gamma_{ki}^h \\ \Gamma_{ki}^j = g^{jh}\Gamma_{khi}. \end{cases}$$

12.3.5 Symétries dans les symboles de Christoffel

Avec les notations précédentes, on a
$$dg_{ij} = \omega\omega_{ij} + \omega_{ji}.$$
Posons
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \partial_k g_{ij}.$$
On a alors
$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} = \partial_k g_{ij}.$$
Comme les symboles de Christoffel sont définis à partir de la variation du repère $\{e_i\}$, ils sont donc associés au vecteur "accélération. Plus précisément, on a
$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^k \partial y^j} = \frac{\partial e_j}{\partial y^k} = \Gamma_{kj}^h e_h.$$
Comme
$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^k \partial y^j} = \frac{\partial^2 M}{\partial y^j \partial y^k},$$

on déduit

$$\Gamma^h_{kj} = \Gamma^h_{jk}. \tag{12.3}$$

On a donc une symétrie par rapport aux deux indices inférieurs. Ceci implique

$$\Gamma_{kij} = \Gamma_{jik}. \tag{12.4}$$

On a donc, pour les composantes covariantes une symétrie par rapport aux deux indices extrèmes.

12.4 Dérivée covariante d'un champ de vecteurs

12.4.1 Composantes contravariantes de la dérivée d'un vecteur

Considérons un champ de vecteurs $v(M)$. En tout point M le vecteur $v(M) \in T_M$. Ses composates contravariantes sont données par

$$v = v^i e_i.$$

Si nous différentions cette relation, on obtient

$$dv = dv^i e_i + v^i de_i = dv^i e_i + v^i \omega_i^j e_j.$$

Ainsi les composantes contravariantes de dv sont

$$\nabla v_i = dv^i + v^k \omega_k^i.$$

Mais $dv^i = \partial_s v^i dy^s$. On déduit

$$\nabla v_i = \partial_s v^i dy^s + v^k \Gamma^i_{sk} dy^s = (\partial_s v^i + v^k \Gamma^i_{sk}) dy^s$$

ce qui nous conduit à poser

$$\nabla_s v^i = \partial_s v^i + v^k \Gamma^i_{sk}.$$

Ces composantes sont les composantes d'un tenseur appelé dérvée covariante du vecteur v.

12.4.2 Composantes covariantes de la dérivée d'un vecteur

Soient v_i les composantes covariantes du vecteur v. Soit w un autre champ supposé uniforme, soit $dw = 0$. On a

$$w.v = w^i v_i$$

et en différentiant

$$wdv = w^i dv_i + v_i dw^i = w^i dv_i - \omega_h^i w^h v_i$$

car $\nabla w^i = dw^i + \omega_h^i w^h = 0$. Ainsi

$$wdv = w^i (dv_i - \omega_i^j v_j).$$

Posons

$$\nabla v_i = dv_i - \omega_i^j v_j.$$

Cette quantité est appelée la différentielle absolue de v_i. Comme ci-dessus, on déduit

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma^h_{ki} v_h.$$

Les $\nabla_k v_i$ sont les composantes covariantes du tenseur dérivée covariante du champ de vecteurs v.

12.4.3 Différentielle absolue d'un tenseur

Les calculs précédents s'étendent sans difficulté aux champs de tenseurs d'ordre q. Par exemple, si T est un champ de tenseurs d'ordre 2 de type $(1,1)$, alors les comosantes du tenseur différentielle absolue sont

$$\nabla t_i^j = dt_i^j - \omega_i^h t_h^j + \omega_h^j t_i^h.$$

Comme ∇t_i^j est une forme différentielle par rapport aux dy^k, si on pose $\nabla t_i^j = \nabla_k t_i^j dy^k$, alors

$$\nabla_k t_i^j = \partial_k t_i^j - \Gamma_{ki}^h t_h^j + \Gamma_{kh}^j t_i^h.$$

Ces composantes sont les composantes d'un tenseur appelé dérivée covariante de T. Dans le cas où le tenseur est le tenseur fondamental $g = (g_{ij})$, alors

$$\nabla g_{ij} = dg_{ij} - \omega_i^k g_{hj} - \omega_j^h g_{ik}.$$

Théorème 33 *(Ricci) La différentielle absolue du tenseur fondamental g_{ij} est nulle.*