1. Le corps des nombres complexes et sa topologie

1.1 Les nombres complexes

Un nombre complexe z est défini par

$$z = x + iy$$

où, x, y sont des nombres réels et i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

- $x = \mathrm{Re}(z)$ est appelée la partie réelle de z.
- $y = \mathrm{Im}(z)$ est appelée la partie imaginaire de z.
- $z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.
- i est un imaginaire pure tel que $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$.
- Si $x = \mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z = iy = i\,\mathrm{Im}(z)$ est un imaginaire pure.
- Si $y = \mathrm{Im}(z) = 0$ alors $z = x = \mathrm{Re}(z)$ est un réel.
- $(x_1 + iy_1) = (x_2 + iy_2)$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

L'ensemble des nombres complexes est défini par

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + iy, i^2 = -1\}$$

Comme $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, tout nombre complexe peut être représenté, de façon unique, comme un point dans le plan $\mathbb{R}^2$.

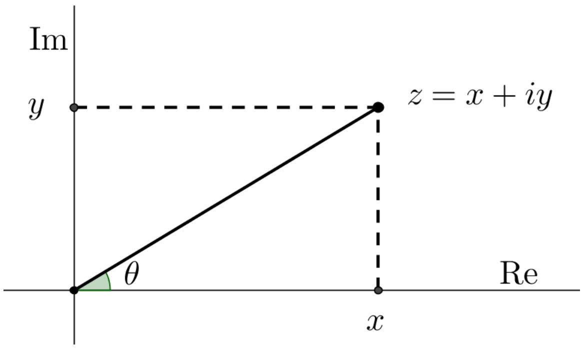

FIGURE 1.1: Représentation géométrique des complexes

Opérations sur les nombres complexes

Étant donné $a+ib, c+id \in \mathbb{C}$, alors on peut effectuer les opérations suivantes :

Addition : $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

Soustraction : $(a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d)$

Multiplication : $(a+ib)\times(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc)$

Division : $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{a+ib}{c+id}\cdot\dfrac{c-id}{c-id} = \dfrac{(ac+bd)}{a^2+b^2} + i\dfrac{(bc-ad)}{a^2+b^2}$

$\mathbb{C}$ est un corps commutatif

L'ensemble des nombres complexes muni des opérations d'addition et de multiplications définies ci-dessus possèdent les propriétés algébriques suivantes :

(C1) $(\mathbb{C},+)$ est un groupe Abélien.

(C2) $(\mathbb{C}-\{0\},\times)$ est un groupe Abélien.

(C3) Pour tous $a,b,c \in \mathbb{C}$, on a $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$.

Les propriétés C1–C3 montrent clairement que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un **corps** commutatif.

Module et conjugué d'un nombre complexe

Si $z = x+iy, x,y \in \mathbb{R}$ on définit par :

- $\overline{z} = \overline{x+iy} = x-iy$ le complexe conjugué de z,
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ le module ou la norme de z.

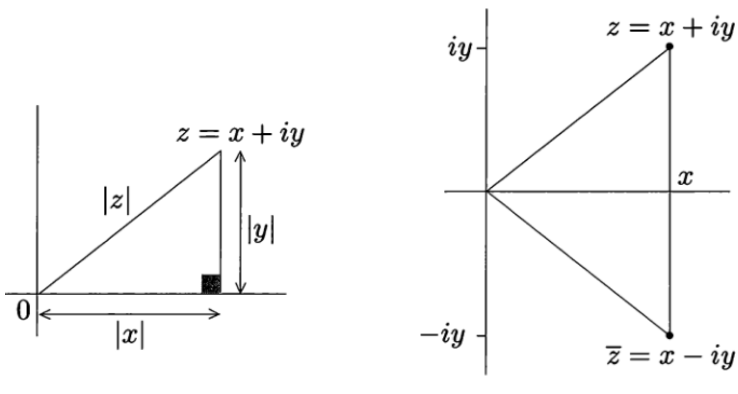

FIGURE 1.2: Module et conjugué de $z = x+iy$.

On remarque d'après les figures ci-dessus que :

$$|z| \le \operatorname{Re} z \le |z| \quad \text{et} \quad |z| \le \operatorname{Im} z \le |z|$$

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Exemple 1. Trouver le conjugué et le module de $z = 3 + 4i$.
Solution. $\overline{z} = 3 - 4i$ et $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Proposition 1.1. *Soient z et $w \in \mathbb{C}$. Alors, on a les propriétés suivantes :*

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $|\overline{z}| = |z|$

(3) $z\overline{z} = |z|^2$

(4) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

(5) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(6) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$

Proposition 1.2. *Soient z et $w \in \mathbb{C}$. Alors,*

(1) $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$

(2) $|z.w| = |z|.|w|$

(3) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ *si* $w \neq 0$

(4) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(inégalité triangulaire)*

(5) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Exemple 2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $|z| = 2$.
Montrer que $|z - 3| \leq 7$ et que $\frac{1}{|z^2 - 1|} \leq \frac{1}{3}$.
Solution.
En appliquant l'inégalité triangulaire (4) on a $|z - 3| \leq |z| + 3 \leq 7$.
En appliquant l'inégalité (5) on obtient $\frac{1}{|z^2 - 1|} \leq \frac{1}{|z^2| - 1} \leq \frac{1}{3}$.

1.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

La forme polaire d'un nombre complexe $z = x + iy$ est définie par

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1}$$

Étant donne $\mathbb{C}$ est isomorphe a $\mathbb{R}^2$, le nombre complexe $x + iy$ et le couple (x, y) représentent le même point dans le plan.
Il en découle de la figure (1.3) que :

$$x = |z|\cos\theta \quad \text{et que} \quad y = |z|\sin\theta$$

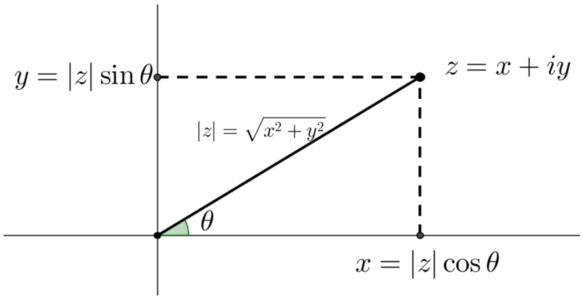

FIGURE 1.3: Représentation polaire

L'angle θ est appelé **argument** de z, $\theta = \arg z$.
Pour trouver $\arg z$ on doit résoudre simultanément les équations

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{|z|} \tag{2}$$

La valeur de $\theta = \arg z$ n'est pas unique car si θ_0 est une solution alors $\theta = \theta_0 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, sont toutes des solutions de $\arg z$.

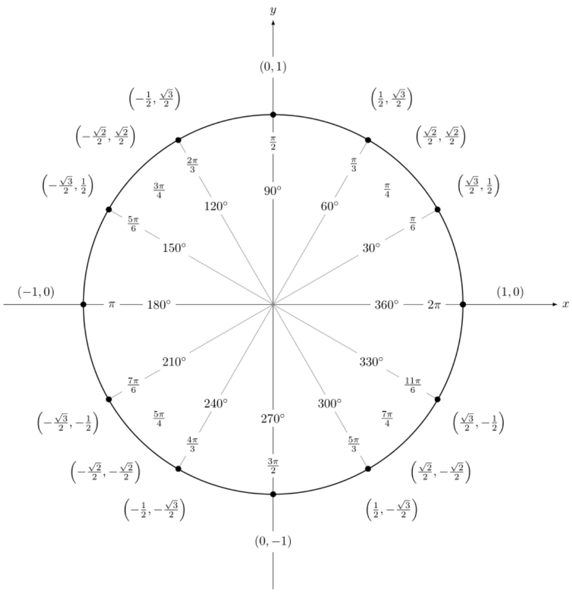

FIGURE 1.4: Cercle Trigonométrique sur $[0, 2\pi]$.

Argument principal

L'argument de z possède une infinité de valeurs possibles, cependant il y a une valeur unique de θ dans l'intervalle $(-\pi, \pi]$. Cette valeur est appelée l'argument principal de z et on la note $\operatorname{Arg} z$. Évidement $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.
Pour trouver $\operatorname{Arg} z$ on doit résoudre les équations

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{|z|} \text{ pour } \theta \in (-\pi, \pi] \tag{3}$$

Exemple 3. Trouver la forme polaire de $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Solution. Le module $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$; $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3}$, $\arg z = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ et

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Exponentielle d'un nombre complexe

Dans le cours d'analyse élémentaire, nous avons vu la formule d'Euler pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{4}$$

donc si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors e^z est défini par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + isiny) \tag{5}$$

On donne ci-dessous quelques propriétés.

Proposition 1.3. *Pour tout* $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

(1) $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

(2) $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

(3) $e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$

(4) $|e^{i\theta}| = 1$

En utilisant la formule d'Euler dans la forme polaire (1) on obtient

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \tag{6}$$

$$\overline{z} = x - iy = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = |z|e^{-i\theta} \tag{7}$$

Voici quelques nombres complexes fondamentaux et leurs formes trigonométriques.

(1) $1 = e^{i0} = e^{i2k\pi}$	(2) $i = e^{i\pi/2}$
(3) $-1 = e^{i\pi}$	(4) $-i = e^{-i\pi/2}$
(5) $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$	(6) $-1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i3\pi/4}$
(7) $(1 \pm i\sqrt{3}) = 2e^{\pm i\pi/3}$	(8) $(-1 \pm i\sqrt{3}) = 2e^{\pm 2i\pi/3}$
(9) $(\sqrt{3} \pm i) = 2e^{\pm i\pi/6}$	(10) $(-\sqrt{3} \pm i) = 2e^{\pm 5i\pi/6}$

(A vérifier à titre d'exercices).

Proposition 1.4. *Soient $z_k = |z_k|e^{i\theta_k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$ et $z = |z|e^{i\theta}$. Alors ;*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{8}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} z_1\cdots z_m &= |z_1|\cdots|z_m|\{\cos(\theta_1+\cdots+\theta_m) + i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_m)\} \\ &= |z_1|\cdots|z_m|e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_m)} \end{aligned} \tag{10}$$

$$z^n = \{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|^n e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

L'équation (11) est communément appelée la formule De Moivre. En particulier, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = (\cos n\theta + i\sin n\theta) \text{ pour } n \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

Remarque : En utilisant la formule d'Euler, on obtient les formules suivantes :

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (2) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

(3) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ (4) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

(5) $e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (6) $e^{-in\theta} = \cos n\theta - in\sin\theta$

(7) $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ (8) $\sin\theta = \dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$

Exemple 4. Calculer $w = (1-i\sqrt{3})^{12}$ et $z = (1-i\sqrt{3})^{-1}$.
Solution. On sait a partir de l'exemple (3) que $(1-i\sqrt{3}) = 2e^{-i\pi/3}$, donc

$$w = 2^{12}e^{-i12\pi/3} = 2^{12}e^{-4i\pi} = 2^{12} = 2^{12}(\cos 4\pi - i\sin 4\pi) = 2^{12}.$$

$$z = 2^{-1}e^{+i\pi/3} = 2^{-1}(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = (1+i\sqrt{3})/4.$$

Exemple 5. Utiliser la formule De Moivre (1) pour déduire des formules pour $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$.
Solution.

$$\begin{aligned} (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

Exemple 6. Utiliser les formules d'Euler pour linéariser $\cos^3 x$.

Solution.

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= 2^{-3}(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}) \\
&= 2^{-3}(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}) \\
&= 2^{-3}(2\cos 3x+6\cos x) \\
&= 2^{-2}(\cos 3x+3\cos x)
\end{aligned}$$

1.3 Racines n-ième d'un nombre complexe

Racines carrées d'un nombre complexe

Considérons l'équation $z^2 = a+ib; a,b \in \mathbb{R}$. Les solutions de cette équation sont appelés les racines carrées de $a+ib$. Posons $z = x+iy$. Alors on a

$$(x^2-y^2)+2ixy = a+ib.$$

En égalant les parties réelles et imaginaires respectives et en calculant les modules on obtient

$$x^2-y^2=a, \quad 2xy=b \quad \text{et} \quad x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ces équations nous donnent

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{et} \quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

- Si $b>0$ alors on prend les deux cas $(u>0, v>0)$ et $(u<0, v<0)$.

- Si $b<0$ alors on prend les deux cas $(u>0, v<0)$ et $(u<0, v>0)$.

Exemple 7. Trouver les racines carrées de $-3-4i$.

Solution. Si $z=x+iy$, alors on a

$$x^2-y^2=-3 \quad 2xy=-4 \quad \text{et} \quad x^2+y^2=5.$$

Ces équations nous donnent

$$x=\pm\sqrt{\frac{5-3}{2}}=\pm 1 \quad \text{et} \quad y=\pm\sqrt{\frac{5+3}{2}}=\pm 2.$$

Puisque $xy<0$, alors les solutions sont : $z=\pm(1-2i)$.

$$z=\pm\sqrt{\frac{5-3}{2}}=\pm 1 \quad \text{et} \quad v=\pm\sqrt{\frac{5+3}{2}}=\pm 2.$$

Racines n-ièmes de l'unité

Considérons l'équation $z^4 = 1$. Les racines de cette équations sont appelées les quatrièmes racines de l'unité. Notons que si $|z| = 1$, alors $z = e^{i\theta}$.

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow e^{4i\theta} = e^{2ik\pi} \Leftrightarrow z = e^{i\theta} = e^{ik\pi/2} = z_{k+1}; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Donc les solutions sont $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$ et $z_4 = -i$.
Notons que la somme de ces racines est nulle : $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.
Notons de plus que les racines sont les sommets du polygone régulier à quatre cotés inscrit dans le cercle unité.

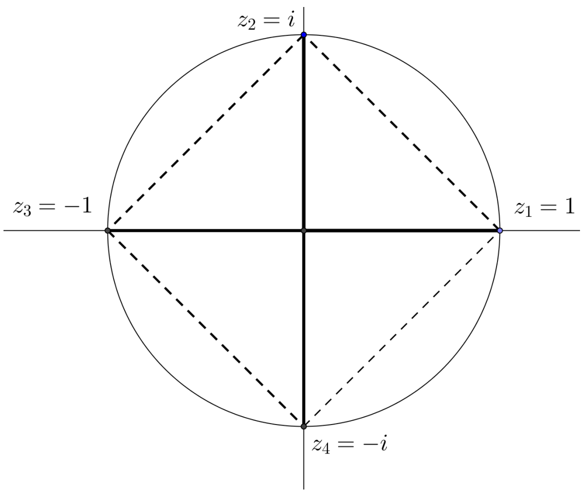

FIGURE 1.5: Quatrièmes racines de l'unité.

Les solutions de $z^n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, appelées les racines n-ièmes de l'unité, sont

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right); k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{13}$$

Si on pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, les racines sont $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$. De plus, les n-ièmes racines de l'unité vérifient la propriété :

$$1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0. \tag{14}$$

Géométriquement, ces racines représentent les n sommets d'un polygone régulier à n cotés, inscrit dans le cercle unité ($|z| = 1$).

Exemple 8. Les racines de $z^n = 1$ pour $n = 3, 4, 6$.
Solution.

(1) $z^3 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = e^{2i\pi/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ et $z_3 = e^{4i\pi/3} = (-1 - i\sqrt{3})/2$.

(2) $z^4 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = e^{i\pi/2} = i$, $z_3 = e^{i\pi} = -1$ et $z_3 = e^{3i\pi/2} = -i$.

(3) $z^6 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_{k+1} = (e^{i\pi/3})^k = e^{ik\pi/3}, k = 1, \ldots, 5$.

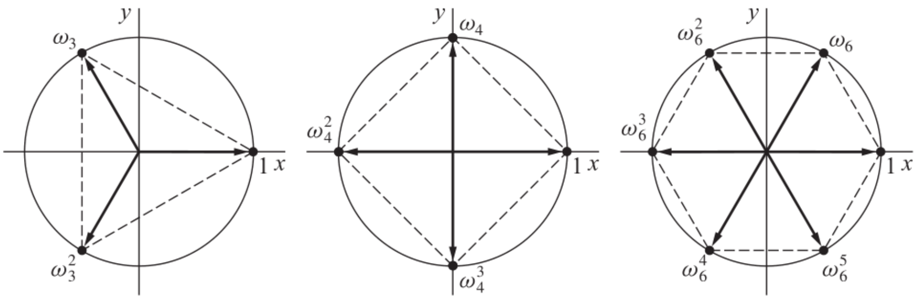

FIGURE 1.6: Racines de l'unité pour $n = 3, 4, 6$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Considérons l'équation $z^n = w$. Si on pose $z = |z|e^{i\theta}$ et $w = |w|e^{i\alpha}$, l'équation sera équivalente à

$$|z|^n e^{in\theta} = |w|e^{i\alpha}.$$

On aura donc

$$|z|^n = |w| \text{ et } n\theta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} \text{ et } \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

Les solutions sont donc ;

$$z = z_k = \sqrt[n]{|w|} \exp\left[i\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right] ; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

L'exemple suivant nous montre comment résoudre une équation de la forme $z^n = w$, c'est à dire, comment déterminer les n-ièmes racines de $w \in \mathbb{C}$.

Exemple 9. Trouver les solutions de $z^3 = -8i$.
Solution. Si on pose $z = re^{i\theta}$ alors on doit résoudre

$$z^3 = r^3 e^{3i\theta} = -8i = 8e^{i(-\pi/2+2k\pi)}$$

donc

$$z = z_k = 2\exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] ; k = 0, 1, 2$$

après calcul on obtient

$$z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 2i, z_3 = -\sqrt{3} - i.$$

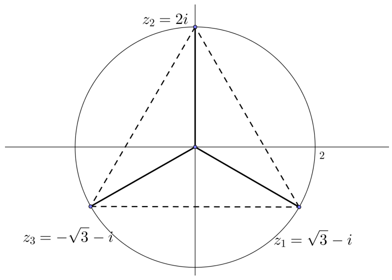

FIGURE 1.7: Racines cubiques de $-8i$.

1.4 Topologie de $\mathbb{C}$

Les concepts d'analyse dans le cadre de $\mathbb{R}$, comme la convergence des suites ou la continuité et la dérivabilité des fonctions, reposent toutes sur la notion de proximité ou distance des points de $\mathbb{R}$. Ces concepts sont reliés à la topologie de l'ensemble sur lequel on travaille.

Métrique sur $\mathbb{C}$

Puisque $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, on utilise sur $\mathbb{C}$ la distance Euclidienne. Donc, pour les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ on définit la distance par :

$$d(z_1, z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2| \tag{15}$$

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace métrique complet (espace de Banach).
Avec la notation (15) l'équation du cercle de centre a et de rayon r est définie par

$$|z - a| = r.$$

Autrement dit l'ensemble des points sur ce cercle est

$$C(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Ensembles ouverts, fermés et compacts

(1) **Voisinage.** L'ensemble $V(a; \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \epsilon\}$ est appelé un ϵ-voisinage du point $a \in \mathbb{C}$, et $\widehat{V}(a; \epsilon) = V(a; \epsilon) \setminus \{a\}$ est appelée voisinage "privé de a".

(2) **Points intérieurs, extérieurs et frontières.** Soit $S \subset \mathbb{C}$.
- On dit que a est un point intérieur de S s'il existe un voisinage $V(a; \epsilon) \subset S$.
- On dit que b est un point extérieur de S si b est un point intérieur de $\mathbb{C} \setminus S$.
- On dit que $c \in \partial S$ est un point frontière de S si tout voisinage de c rencontre S et $\mathbb{C} \setminus S$.

(3) **Disque ouvert.** L'ensemble $D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ est appelé disque

ouvert (boule ouverte) de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Tout disque ouvert est un voisinage de tout ces points.

(4) **Disque unité.** $D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est appelé disque unité de $\mathbb{C}$.

(5) **Ensemble ouvert.** Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert dans $\mathbb{C}$ si pour tout $z \in U$ il existe $r > 0$ tel que $D(z;r) \subset U$.
Si $U \subset \mathbb{C}$ et $\partial U \cap U = \varnothing$ alors U est un ouvert de $\mathbb{C}$.
Tout disque ouvert $D(a;r)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.
Les demi-plans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$ et $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > b\}$ sont aussi des ouverts de $\mathbb{C}$.

(6) **Ensemble fermé.** Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit **fermé** dans $\mathbb{C}$ si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.
Si $F \subset \mathbb{C}$ et $\partial F \subset F = \varnothing$ alors F est un fermé de $\mathbb{C}$.
Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points de frontière.
$\overline{D}(a;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, appelé le disque fermé.
La couronne $A(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - a| \leq R\}$ est un fermé dans $\mathbb{C}$.
On peut aussi lier la notion d'ensemble fermé à la convergence des suites : un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si et seulement si toute suite convergente (z_n) de F admet une limite dans F, $z_n \to z \in F$.

(7) **Adhérence ou Fermeture d'un ensemble.** Soit $S \subset \mathbb{C}$ alors l'ensemble $\overline{S} = S \cup \partial S$ est appelé l'adhérence ou la fermeture de S.
L'adhérence de disque ouvert $D(a;r)$ est le disque fermé $\overline{D}(a;r)$.

(8) **Ensemble borné.** Un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| < M$ pour tout $z \in S$. On dit aussi que S est borné si $S \subset D(0;r)$ pour un certain $r > 0$.
L'ensemble $|z| < 4$ est borné, mais $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ne l'est pas.

(9) **Ensemble compact.** Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact dans $\mathbb{C}$ s'il est borné et fermé dans $\mathbb{C}$. L'ensemble $|z| \leq 4$ est compact, mais $|z| < 4$ ne l'est pas.

(10) **Ensemble connexe par arcs.** Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrement dans S.

(11) **Ensemble connexe.** Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il ne peut être pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides.
Toute partie de $\mathbb{C}$ connexe par arcs est connexe.
Le disque unité ouvert $|z| < 1$ et la couronne $1 < |z| < 2$ sont connexes car ils sont connexes par arcs.

(12) **Région simplement connexe.** Une région connexe par arcs $S \subset \mathbb{C}$ est dite simplement connexe si tout chemin fermé sur S peut être réduit continûment (c'est-à-dire

par homotopie) à un point. Intuitivement, on peut rétrécir le chemin fermé jusqu'à ce qu'il ne forme plus qu'un point, il n'y a pas d'obstacle (c'est-à-dire de trou).

Le disque $|z| < 1$ est simplement connexe, mais la couronne $1 < |z| < 2$ ne l'est pas. Le plan privé d'un point $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ est connexe mais n'est pas simplement connexe. Autrement dit , une région simplement connexe n'a pas de «**trous**». Si la région possède des trous on l'appelle **multi-connexe**. La couronne est un exemple de région multi-connexe.

(13) **Domaine.** Un ensemble $D \in \mathbb{C}$ qui est non vide, ouvert et connexe est appelé un **domaine** ou bien une **région ouverte**. D est un domaine si et seulement s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides et disjoints .

Le disque unité $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ et la couronne $1 < |z| < 2$ sont des domaines, mais $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$ n'est pas un domaine car il n'est pas connexe.

Exemple 10. Trouver la courbe ou la région dans le plan complexe représentée par chacune des équations ou inégalités suivantes. Déterminer si l'ensemble est ouvert, fermé, borné ou connexe.

(a) $|z| = 2$

(b) $\operatorname{Re}(1/z) = 2$

(c) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$

(d) $0 < \operatorname{Arg} \dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$

(e) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$

Solution.

(a) $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = 4$ est le cercle centré à l'origine et de rayon 2. Cet ensemble est fermé, borné et connexe par arcs donc connexe.

(b) $2 = \operatorname{Re}(1/z) = \operatorname{Re}(\overline{z}/z\overline{z}) = x/z\overline{z} = (z+\overline{z})/(2z\overline{z}) \Leftrightarrow z\overline{z} = (z+\overline{z})/4 \Leftrightarrow$ $(z - 1/4)(\overline{z} - 1/4) = (1/4)^2 \Leftrightarrow |z - 1/4| = 1/4$ qui est le cercle de centre $1/4$ et de rayon $1/4$. Cet ensemble est fermé, borné et connexe par arcs donc connexe.

(c) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 - x \Leftrightarrow y^2 \leq 1 - 2x \Leftrightarrow x \leq (1-y^2)/2.$

La région illustrée dans la figure 1.8–(1), est fermée, non bornée et connexe.

(d) $0 < \operatorname{Arg} \dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{(x^2+y^2-1-2ix)}{x^2+(y+1)^2}$$

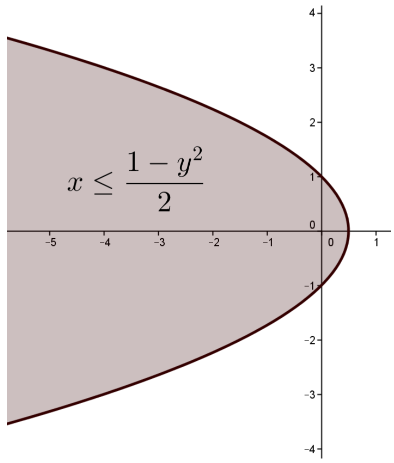

FIGURE 1.8: Région de $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$.

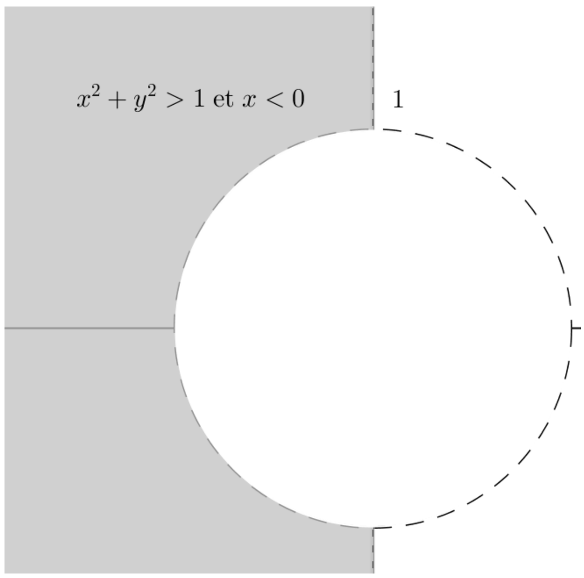

FIGURE 1.9: Région de $0 < \operatorname{Arg} \dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$.

Notons que $\operatorname{Arg}\dfrac{z-i}{z+i} \in (0, \pi/2)$ si et seulement si $\operatorname{Re}\dfrac{z-i}{z+i}$ et $\operatorname{Im}\dfrac{z-i}{z+i}$ sont positifs. Donc $x < 0$ et $x^2 + y^2 > 1$. La région illustrée dans la figure 1.8–(2), est ouverte, non bornée et connexe.

(e) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |z-1|^2 \leq |z+1|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1) \leq (z+1)(\overline{z}+1) \Leftrightarrow z + \overline{z} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} z \geq 0$. La région représentée par l'inégalité est le demi-plan droit et l'axe des y.

1.5 Exercices

1. Soient $z = 1 + 2i$ et $w = 3 - i$, représenter les nombres suivants sous la forme $a + ib$.

(a) $2z + 5w$

(b) $iz + 3w$

(c) $z^3 + \overline{(w^2)}$

(d) $\operatorname{Re}(z^2 + iz) + \operatorname{Im}(w^2 + w)$

(e) $z^2 + \overline{z} + i$

(f) $z/w + w/z$

2. Trouver les parties réelles et imaginaires de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(z-2)/(z+2)$

(b) $(2+5i)/(4+2i)$

(c) $(\sqrt{3}+i)^6$

(d) $(1+i\sqrt{3})^6$

(e) $(1+i)^n, n \in \mathbb{N}$

(f) $i^n, n \in \mathbb{N}$

3. Trouver le module et le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $-3 + 2i$

(b) $(2+i)(-4+3i)$

(c) $(1+i)^8$

(d) $(2+7i)/(1-i)$

4. Écrire sous forme polaire chacun des nombres complexes suivants :

(a) $3i$

(b) $2 - 2i$

(c) $-1 + i\sqrt{3}$

(d) $(3+i)^2$

(e) $\sqrt{5} - i$

(f) $(1-i)^4/5$

5. Écrire sous forme cartésienne chacun des nombres complexes suivants :

(a) $\sqrt{2}e^{i21\pi/4}$ (b) $11e^{i15\pi/2}$ (c) $-e^{-i200\pi}$ (d) $-3e^{i5\pi}2$

6. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $u = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})/2$

(b) $v = 1 - i$

(c) $u^6 \cdot v^8$

(d) u^3/v^4

7. Écrire sous forme cartésienne et polaire chacun des nombres complexes suivants :

(a) 3^i

(b) $ie^{\ln 3}$

(c) $e^{1+i\pi/2}$

(d) $\ln(3) + i$

8. Trouver les solutions des équations suivantes :

(a) $2z^2 + 2z + 5 = 0$

(b) $5z^2 + 4z + 1 = 0$

(c) $z^2 - z + 1 = 0$

(d) $z^2 - 2z + 5 = 0$

(e) $z^4 - z^2 - 2 = 0$

(f) $z^6 - z^3 - 2 = 0$

9. Trouver toutes les solutions des équations suivantes et puis préciser leurs répartitions dans le plan complexe.

(a) $z^4 = 1$

(b) $z^5 = 1$

(c) $z^6 = 1$

(d) $z^5 = -32$

(e) $z^7 = -1$

(f) $z^6 = -64$

10. Étant donné $(2+i)(3+i)$, montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$.

11. Monter que z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

12. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $1/z = \overline{z}$.

13. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\overline{z}|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

14. Si $z, a \in \mathbb{C}$ et $|a| < 1, |z| \leq 1$, montrer que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1$.

15. Utiliser la formule de De Moivre pour montrer :

(a) $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

(b) $\sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

(c) $\cos^3 x = (3/4)\cos x + (1/4)\cos 3x$

(d) $\sin^3 x = (3/4)\sin x - (1/4)\sin 3x$

16. Si $z, w \in \mathbb{C}$, montrer que :

(a) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

(b) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$

(c) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(d) $||z| - |w|| \leq |z-w|$

17. Démontrer les formules suivantes :

(a) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

(b) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(c) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ $(z_2 \neq 0)$

18. Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})\left(z^2+\overline{z}^2\right) \ldots\ldots (z^n + \overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

19. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe défini par :

(a) $|1+z| = 2|1-z|$

(b) $\operatorname{Im} z^2 < 2$

(c) $|z| + \operatorname{Re} z < 1$

(d) $\operatorname{Re}(1/z) = \dfrac{1}{4}$

(e) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2$

(f) $-\dfrac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z+1-i) \leq \dfrac{3\pi}{4}$

20. Illustrer géométriquement les ensembles suivants dans le plan complexe et identifier parmi eux les ensembles ouverts, fermés, bornés et connexes.

Soit $a = 1 - i$.

(a) $|z - a| = 3$

(b) $|z - a| < 3$

(c) $|z - a| \geq 3$

(d) $2 < |z - a| < 3$

(e) $\mathrm{Re}(z - a) = 3$

(f) $|\,\mathrm{Im}(z - a)| < 3$

(g) $|z - a| = |z - \overline{a}|$

(h) $|z - i| + |z + i| = 3$

(i) $|z - a| + |z - \overline{a}| < 3$