Méthode de dichotomie

Le principe de la méthode de dichotomie, encore appelée méthode de bissection, est basé sur le théorème de la valeur intermédiaire. La méthode est décrite comme suit : soit, $f : [a \ \ b] \longrightarrow R$, une fonction continue sur l'intervalle $[a \ \ b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0 \longrightarrow$ il existe donc au moins une racine de $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a \ \ b]$. On prend $C = (a + b)/2$ la moitié de l'intervalle $[a \ \ b]$ tel que :

1. Si $(c) = 0 \longrightarrow c$ est la racine de $f(x)$.
2. Sinon, nous testons le signe de $f(a) \times f(c)$ (et de $f(c) \times f(b)$).
   - Si $f(a) \times f(c) < 0 \longrightarrow$ la racine se trouve dans l'intervalle $[a \ \ c]$ qui est la moitié de $[a \ \ b]$.
   - Si $f(c) \times f(b) < 0 \longrightarrow$ la racine se trouve dans l'intervalle $[c \ \ b]$ qui est la moitié de $[a \ \ b]$.

Ce processus de division, par deux, de l'intervalle (à chaque itération on divise l'intervalle par deux) de la fonction est réitéré jusqu'à la convergence pour la tolérance considérée. Ainsi, pour la nième itération, on divise : $[a_n \ \ b_n]$ en $[a_n \ \ c_n]$ et $[c_n \ \ b_n]$, avec à chaque fois $C_n = (a_n + b_n) / 2$

. Exercice 01 : Dans cet exercice

Il est demandé de trouver la racine de $f(x) = x + exp(x) + 10 / (1 + x2) - 5$, en utilisant la méthode de dichotomie.

1. Écrire un programme Matlab permettant l'implémentation du schéma numérique de cette méthode.
2. Afficher, sur le même graphe, la fonction $f(x)$, la solution approchée et les approximations successives.
3. Calculer l'ordre et la vitesse de convergence de la méthode numérique.

On donne : tolérance = 10^{-6}, $a_0 = -1.30$ et $b_0 = 3/2$.

TP N°1 Méthode Numérique

Voici le script Matlab permettant l'implémentation de la méthode de dichotomie :

```
a = -1.3 ;   b = 3/2 ; itmax = 100 ; tol = 1e-6 ;
it = 0 ; center = (b + a)/2 ;  x = [a, center, b] ;
fun = @(x) x + exp(x) + 10./(1 + x.^2) - 5 ;

while it < itmax

    if fun(a)*fun(center) < 0

     b = x(2) ; a = x(1) ; center = (a + b)/2 ; x = [a, center, b] ;

    elseif fun(center)*fun(b) < 0

     b = x(3) ; a = x(2) ; center = (a + b)/2 ; x = [a, center, b] ;

    end

    if abs(fun(center)) < tol

     sol = center ;
       break
    end

    if it == itmax & abs(fun(center)) > tol

     disp('PAS DE CONVERGENCE POUR LA TOLERANCE CONSIDEREE')

    end

     it = it + 1;
     xit(it) = center ;
     itNumber = it ;
end

disp(strcat('LA RACINE APPROCHEE VAUT :', num2str(sol)))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% AFFICHAGE GRAPHIQUE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 ainit = -1.3 ; binit = 3/2 ; n = 500 ; dx = (binit - ainit)/n ;
 xn = ainit :dx: binit ;

figure('color', [1 1 1])  ; plot(xn,fun(xn),'LineWidth',1) ; hold on
plot(sol,fun(sol) ,'ro','MarkerSize',12,'LineWidth',2)
plot(sol,fun(sol) ,'rx','MarkerSize',12,'LineWidth',2)
plot(xit,fun(xit),'kx','MarkerSize',10,'LineWidth',1.5)
plot(xit,fun(xit),'ko','MarkerSize',10,'LineWidth',1.5)
line(xn, zeros(1, length(xn)),'LineStyle','-.','Color','k',...
'LineWidth',1) ; xlabel('x') ; ylabel('f(x)')
title('RACINE DE f(x) = 0 PAR LA METHODE DE DICHOTOMIE')
```

Les sorties renvoyées par ce script sont :

```
LA RACINE APPROCHEE VAUT :-0.92045
>> itNumber =
            21
```