

## Introduction:

L'écoulement des gaz à travers les conduites ainsi qu'à travers les machines thermiques telles que les pompes, les ventilateurs et autres machines tournantes mérite une attention particulière par rapport à l'écoulement des liquides.

## Equations et hypothèses :

### Frontière « compressible-incompressible »:

Le critère de distinction entre un écoulement compressible et un autre non compressible est la comparaison de sa vitesse avec la vitesse du son dans le même milieu, et dans les mêmes conditions de température et de pression :

- ✓ Si le gaz présente une vitesse  $v < 0,3 v_{\text{son}}$ , alors il peut être considéré comme incompressible (et donc  $\rho_{\text{gaz}} \approx C^{\text{ste}}$ ) on peut lui appliquer les équations des fluides incompressibles.
- ✓ Si le gaz présente une vitesse  $v > 0,3 v_{\text{son}}$ , alors il peut être considéré comme compressible (et donc  $\rho_{\text{gaz}} = \rho(p, T, \text{point choisie})$ ), il faut donc établir de nouvelles équations.

## Point de vue mécanique : l'équation d'Euler

Cette équation établie grâce à un bilan de forces sur une cellule de fluide sans aucune hypothèse sur la compressibilité, elle est présentée par :

$$dp + \rho v dv + \rho g dz = 0 \quad (\text{I.1})$$

Avec :

$p$  : la pression ;

$\rho$  : la masse volumique ;

$v$  : le vitesse ;

$g$  : l'accélération de la pesanteur ;

$Z$  : c'est la hauteur.

L'équation (1.1) se présente sous forme différentielle qui nous a permis d'établir après intégration le théorème de Bernoulli. Mais dans ce cas, puisque la masse volumique n'est pas constante, on ne peut pas intégrer directement, il est nécessaire d'avoir d'autres équations.

## Point de vue mécanique : l'équation de continuité

C'est une équation habituelle, elle exprime le fait que la masse est conservée d'un point à un autre (1 et 2) :

$$Q_{m,1} = Q_{m,2} \quad (\text{I.2a})$$

Ce qui est exprimé aussi par :

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \quad (\text{I.2b})$$

Notant que le débit volumique ne saurait être conservé puisque l'égalité ci-dessus n'admet pas de simplification par le terme «  $\rho$  ». Utilisant une équation plus fructueuse :

$$Q_m = \rho S v = cst$$

On dérive :

$$S v d\rho + \rho v dS + \rho S dv = 0$$

Après division par  $\rho S v$ , on aura l'équation suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0 \quad (I.2c)$$

Cette équation reliant la masse volumique «  $\rho$  », la section «  $S$  » et la vitesse «  $v$  » du fluide au point considéré.

## **Point de vue thermodynamique : le premier principe de la thermodynamique :**

Un petit résumé des différentes expressions du premier principe de la thermodynamique s'impose.

### **a. 1<sup>er</sup> principe pour un système ne possédant que de l'énergie interne**

La première forme que nous avons étudiée par soucis de simplification est donnée par la relation suivante :

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (I.3a)$$

Ou sous forme intégrale :

$$\Delta U = W_{1-2} + Q_{1-2} \quad (I.3b)$$

Avec :

U : l'énergie interne ;

W : le travail ;

Q : la quantité de chaleur.

### **b. 1<sup>er</sup> principe pour un système quelconque :**

Le système, en plus de son énergie interne peut posséder de l'énergie cinétique et/ou de l'énergie potentielle dont il faut tenir compte dans les échanges avec l'extérieur. Dou le premier principe de la thermodynamique prend la forme suivante :

$$dU + dE_c + dE_p = \delta W + \delta Q \quad (I.4a)$$

Ou bien sous forme intégrale :

$$\Delta U_{1-2} + \Delta E_{c\ 1-2} + \Delta E_{p\ 1-2} = W_{1-2} + Q_{1-2} \quad (I.4b)$$

Ec présente l'énergie cinétique et Ep l'énergie potentielle.

### **c. 1<sup>er</sup> principe pour un système ouvert exprimé à partir de l'enthalpie :**

Pour l'étude des cycles thermodynamiques, l'enthalpie s'est avéré un puissant outil pour les calculs de quantités de chaleur, et des travaux des machines thermiques.

Refaisons la démonstration :

Considérons l'écoulement d'une tranche de fluide, comprise entre les sections  $S_1$  et  $S_1'$  à l'instant « t » et entre  $S_2$  et  $S_2'$  à l'instant « t+dt ». Durant ce laps de temps « dt » cette tranche échange un certain travail  $W$  et une certaine quantité de chaleur  $Q$  avec l'extérieur comme illustré sur la figure I.1.

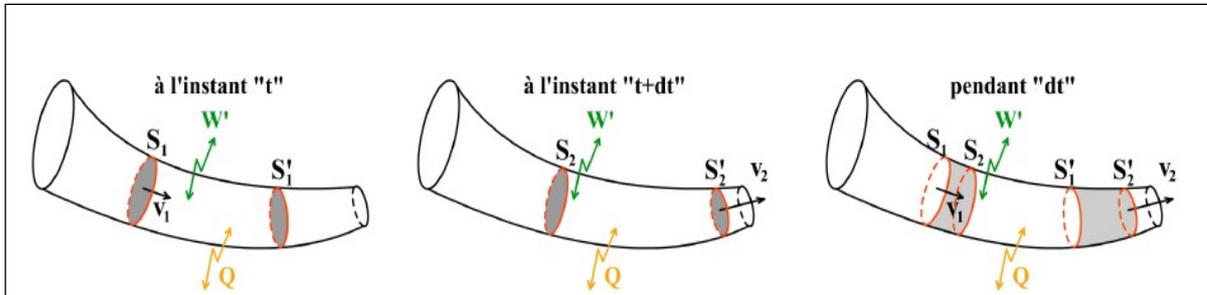


Figure I.1 : L'écoulement d'une tranche fluide durant le temps « dt ».

D'un point de vue mécanique et thermique, tout se passe comme si le petit volume  $dV$  compris entre  $S_1$  et  $S_2$  à « t » se retrouvait entre  $S_1'$  et  $S_2'$  à « t+dt ». L'écriture du premier principe de la thermodynamique donne :

$$\Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = W + Q \quad (I.5a)$$

Soit :

$$(U_2 - U_1) + (E_{c2} - E_{c1}) + (E_{p2} - E_{p1}) = W + Q \quad (I.5b)$$

or,  $W$  est le travail total, somme du travail de transvasement  $W'$  (travail total échangé entre le système et l'extérieur) et du travail des forces de pression dû au reste du fluide :

$$W = W' + (P_1 V_1 - P_2 V_2) \quad (I.6)$$

En regroupant les termes, on obtient donc :

$$(U_2 - U_1) + (E_{c2} - E_{c1}) + (E_{p2} - E_{p1}) = W' + (P_1 V_1 - P_2 V_2) + Q \quad (I.7a)$$

$$(U_2 + P_2 V_2) - (U_1 + P_1 V_1) + (E_{c2} - E_{c1}) + (E_{p2} - E_{p1}) = W' + Q \quad (I.7b)$$

qui amène l'enthalpie  $H = U + P.V$  :

$$(H_2 - H_1) + (E_{c2} - E_{c1}) + (E_{p2} - E_{p1}) = W' + Q \quad (I.7c)$$

Ou sous forme plus condensée :

$$\Delta H + \Delta E_c + \Delta E_p = W' + Q \quad (I.7d)$$

#### d. Expression du travail de transvasement $W'$ :

Nous connaissons déjà l'expression du travail de pression  $W$  :

$$W = \int -PdV$$

Partant de la définition du de l'enthalpie :

$$H = U + PV \Rightarrow dH = dU + d(PV) = dU + PdV + VdP \quad (I.8)$$

Substituons la variation de l'énergie interne à partir du premier principe de la thermodynamique. D'où la variation d'enthalpie devient :

$$dH = \delta W + \delta Q - dE_c - dE_p + PdV + VdP$$

$$= \delta Q + VdP + -dE_c - dE_p$$

Ou bien :

$$dH - dE_c - dE_p = \delta Q + VdP$$

Par intégration :

$$\Delta H - \Delta E_c - \Delta E_p = Q + \int VdP \quad (I.9)$$

Une comparaison des équations (1.7d) et (1.9) permet d'écrire :

$$W' = \int VdP \quad (I.10)$$

Cette équation présente l'expression du travail de transvasement. Le travail de transvasement représente le travail qui doit être fourni contre les forces de pression extérieures et intérieures pour provoquer le transvasement de l'unité de masse de fluide de l'état 1 à l'état 2.

### e. Expression du 1<sup>ier</sup> principe pour un système ouvert exprimé en grandeurs massiques

En notant par petites lettres, les grandeurs par unité de masse de fluide, l'expression du premier principe devient :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + \int V_m dp \quad (I.11)$$

Ou encore, en remarquant que  $V_m$ , volume massique est l'inverse de la masse volumique :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + \int \frac{dp}{\rho} \quad (I.12)$$

### Un modèle pour le fluide compressible : hypothèse du gaz parfait :

C'est évidemment le modèle du gaz parfait que nous adopterons.

Première remarque : les masses volumiques des gaz sont de l'ordre de 1000 fois plus faibles que celles des liquides. L'influence de la pesanteur y joue donc un rôle 1000 fois plus faible.

Deuxième remarque : les forces de viscosité des G.P. sont rigoureusement nulles, mais il n'en va pas de même pour les autres gaz.

Nous avons aussi l'équation supplémentaire :

$$PV_m = nRT \quad (I.13)$$

Ou encore :

$$P = \frac{\rho}{M} RT \quad (I.14)$$

Ou :

$M$  c'est la masse molaire du gaz ;

$T$  : la température ;

$P$  ; la pression ;

$V$  : le volume ;

$n$  : le nombre de mole ;

$\rho$  : la masse volumique ;

$R$  : la constante des gaz parfaits (8,32 J/molK).

On peut introduire la constante massique du gaz parfait ( $r = R/M$ ), alors :

$$P = \rho r T \quad (I.15)$$

**a- chaleurs spécifiques massiques à volume constant  $C_V$  et à pression constante  $C_P$ :**

Nous avons appris pour un gaz parfait :

$$dU = C_V dT \quad (\text{I.16a})$$

$$dH = C_P dT \quad (\text{I.16b})$$

Et nous avons introduit la constante adiabatique  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (\text{I.16c})$$

**b. Expressions des chaleurs spécifiques pour un gaz parfait :**

La relation de Mayer s'exprime par :

$$C_p - C_V = R \quad (\text{I.17})$$

qui, combinée avec la définition de la constante adiabatique ci-dessus donne :

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (\text{I.18a})$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (\text{I.18b})$$

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour étudier les fluides compressibles.