

Ecoulements compressibles, dynamique des gaz et ondes de choc

1 Ecoulements compressibles et dynamique des gaz

1.1 Ecoulements à densité variable

La variation de densité du gaz est uniquement contrôlé par la variation de température.

On a donc pour $P = P_0 + \Delta P$, $\frac{\Delta P}{P_0} \ll 1$.

La loi d'état donne $\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T}$ ($P \approx cte$).

1.2 Ecoulements compressibles

Il y a un fort couplage entre la pression, la densité et le champ de vitesse.

La loi d'état reste $P = \rho r T$.

La distinction entre les deux régimes d'écoulement des gaz se fait par les phénomènes acoustiques.

1.3 Nombre de Mach

Un déplacement dans un gaz génère une onde de pression qui va précéder celui-ci pour informer le milieu aux alentours. Ces ondes de pression sont des ondes acoustiques, du son.

Célérité du son : $c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\gamma r T}$

Nombre de Mach : $M = \frac{u}{c} = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Energie interne}} \frac{1}{2}$

Le mur du son est à $M = 1$, le bruit qui retentit est lié au choc contre l'air : l'objet va plus vite que l'information signalant son passage.

Le chapitre suivant montre que $\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u}$.

Classification des écoulements :	$M \ll 1$ ($M < 0,3$)	densité variable
	$M < 1$	subsonique
	$M = 1$	sonique
	$M \approx 1$	transsonique
	$M > 1$	supersonique
	$M > 5$	hypersonique

1.4 Grandeurs thermodynamiques

Rapport des chaleurs spécifiques : $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et $C_p - C_v = r$

Energie interne : $E_i = E_i^0 + \int_{T_0}^T C_v dT$

Enthalpie : $h = h^0 + \int_{T_0}^T C_p dT$

Entropie : $s = s^0 + \int_{T_0}^T C_p \frac{dT}{T} - r \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$

2 Écoulement stationnaire mono-directionnel dans une conduite à section variable

2.1 Considérations générales

2.1.1 Hypothèses

Écoulement confiné

Écoulement stationnaire

Écoulement sans dégagement de chaleur : pas de réaction exothermique ou endothermique

Mélange à proportions constantes : r constante

Écoulement isentropique : pas de frottement important

Cette condition introduit l'Equation de Laplace $P\rho^{-\gamma} = cte$

De même, elle pose pour l'enthalpie $dh = C_p dT = \frac{1}{\rho} dP$

Viscosité négligée : L'écoulement est unidimensionnel

Gravité négligée

Les variations de section vont modifier toutes les grandeurs aérodynamique et thermodynamiques qui caractérisent l'écoulement. On va donc chercher à obtenir des relations entre ces grandeurs et la section.

2.1.2 Conservation de la masse

Première forme intégrale

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV = 0$$

Seconde forme intégrale (Green-Ostrogradsky)

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV - \int_{\partial V} d\dot{Q}_m = 0 \quad \text{avec} \quad d\dot{Q}_m = -\rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

Pour une conduite non poreuse, on a $|\dot{Q}_m| = \rho(x) u(x) S(x) = cte \implies$ par différenciation, $\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dS}{S} = 0$

2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Théorème d'Euler : $\sum_k \vec{F}_k = - \int_{\partial V} \vec{u} d\dot{Q}_m$

Equation d'Euler : $\rho u du = -dP$ pour un fluide stationnaire

En utilisant la formule d'une onde de pression et le nombre de Mach, on a $M^2 \frac{du}{u} = -\frac{d\rho}{\rho}$

2.1.4 Conservation de l'énergie

En considérant l'écoulement isentropique, la conservation de l'énergie révèle l'équation de Saint-Venant (équivalente compressible

de l'équation de Bernoulli) : $\left[\frac{1}{2} u^2 + \Phi + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = cte \right]$

2.1.5 Comportement de l'écoulement

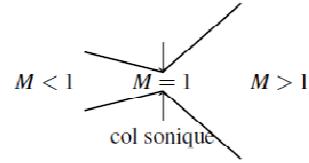
La précédente relation donne $\frac{du}{u} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}$, qui exprime ceci :

	$M < 1$	$M > 1$
Divergent : $\frac{dS}{S} > 0$	$\frac{du}{u} < 0$	$\frac{du}{u} > 0$
Convergent : $\frac{dS}{S} < 0$	$\frac{du}{u} > 0$	$\frac{du}{u} < 0$

2.2 Atteinte du régime supersonique

2.2.1 Solution préliminaire

Pour accélérer un écoulement confiné jusqu'à une vitesse supérieure à celle du son, il faut utiliser une tuyère convergente divergente.



La loi d'état après différenciation donnant $\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$, on peut établir les relations suivantes :

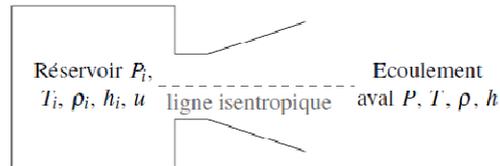
$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = \frac{M^2}{1-M^2} \frac{dS}{S}$$

2.2.2 Condition d'arrêt

Définition : La condition d'arrêt caractérise l'écoulement quand il est ramené au repos. Elle correspond aux propriétés du fluide quand la vitesse est nulle. L'écoulement étant isentropique, c'est la référence qui serait obtenue dans un réservoir sous pression et contenant le fluide qui alimente la conduite. La condition d'arrêt est aussi appelée condition totale, condition de réservoir ou condition isentropique.

Grandeurs d'arrêt

Vitesse d'arrêt : $u = 0$ Pression d'arrêt : $P = P_i$
 Température d'arrêt : $T = T_i$
 Densité d'arrêt : $\rho = \rho_i$
 Enthalpie d'arrêt : $h = h_i$



2.2.3 Calcul des valeurs d'arrêt

Les conditions d'arrêt sont calculées ainsi :

Température d'arrêt

Conservation de l'énergie totale : $h_i = h(x) + \frac{1}{2}u^2(x)$

Deuxième Loi de Joule : $C_p T_i = C_p T(x) + \frac{1}{2}u^2(x)$

Expression en ratio : $\frac{T_i}{T(x)} = 1 + \frac{u^2(x)}{2C_p T(x)}$

Expression finale : $\frac{T_i}{T(x)} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u(x)}{c(x)} \right)^2 \implies \frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$ avec $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1}$ et $c^2 = \gamma r T$

Pression et densité d'arrêt

Par l'équation de Laplace, on a : $\frac{P_i}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ et $\frac{\rho_i}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

Ces relations sont tabulées en fonction du nombre de Mach.

Par exemple, à $\theta = 298,15 \text{ K}$:

Gaz	Masse molaire M	Rapport des chaleurs spécifiques γ	Constante massique du gaz parfait r	Chaleur spécifique C_p
Air	28,96 kg.kmol ⁻¹	1,400	287 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	1004 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹

2.2.4 Détermination des conditions critiques

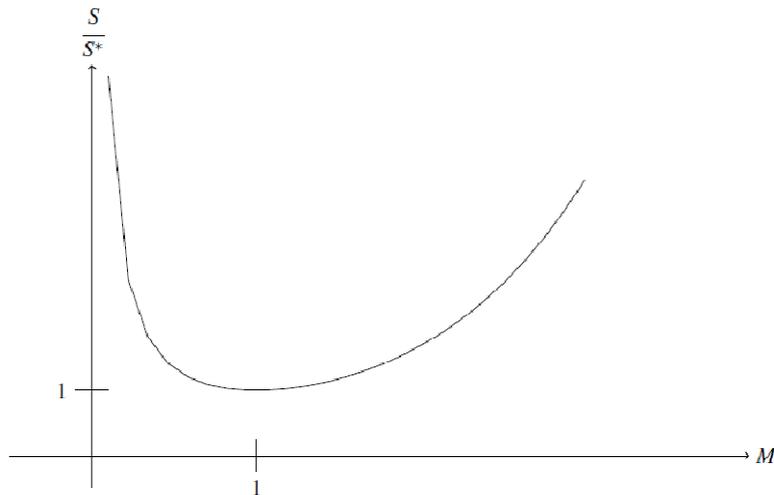
La section au col sonique est la section critique S^* .

Le débit massique dans la conduite est donné par $\dot{Q}_m = \rho S u = \left(\frac{P}{rT}\right) S M (\gamma r T)^{1/2} = S \left(\frac{P_i}{\sqrt{\gamma r T_i}}\right) \gamma M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(x)\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

Pour le Mach à l'ordre de l'unité, on a $\dot{Q}_m^* = \psi^* S^* \left(\frac{P_i}{c_i}\right)$ avec $\psi^* = \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

Le régime sonique n'est obtainable que dans le col sonique, c'est donc le débit maximal dans la conduite.

On a finalement $\frac{S}{S^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$



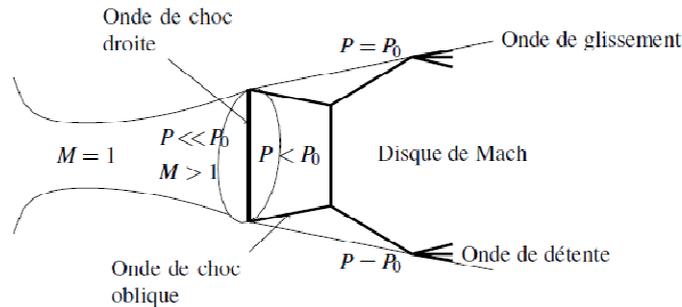
3 Ondes de choc

3.1 Observation

On observe dans les fluides des discontinuités qui se développent sur de très faibles épaisseurs. Ces discontinuités sont le lieu de variations brutales de la densité, de la pression et de la vitesse du fluide. Elles s'organisent sur des distances de l'ordre de 10 microns, ce qui est de l'ordre du libre parcours moyen des molécules.

En supersonique, l'augmentation de la vitesse va s'accompagner d'une diminution de la pression. En sortie de tuyère, une brutale re-compression du fluide s'organise pour raccorder les deux conditions (écoulements dans la conduite et extérieur) : c'est l'**onde de choc**. On peut aussi chercher à créer une tuyère accordée, c'est-à-dire que l'ensemble est défini pour avoir la même pression ambiante que celle de sortie de tuyère.

Plusieurs ondes de choc sont généralement nécessaires pour le raccordement :



3.2 Onde de choc droite

3.2.1 Conditions de part et d'autre du choc



Un choc droit est une recompression brutale, elle vérifie : $P_1 < P_2$ $\rho_1 < \rho_2$ $T_1 < T_2$ $M_1 > M_2$

3.2.2 Relation d'Hugoniot

Conservation de la masse : Sur une surface S de choc fixée, on a $|\dot{Q}_m| = \rho_1 u_1 S = \rho_2 u_2 S$

$$\text{On a } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 c_2}{M_1 c_1} \quad \text{ou} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ par la loi d'état.}$$

Conservation de la quantité de mouvement : $|\dot{Q}_m| (u_2 - u_1) = (P_1 - P_2) S$

$$\text{On a en introduisant le nombre de Mach, la relation } \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

Conservation de l'énergie : $h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$

On passe ici par la conservation de l'énergie totale, car le choc casse la continuité isentropique, on ne peut donc pas utiliser Saint-Venant. Seule l'énergie totale est conservée.

En introduisant les chaleurs spécifiques, on a $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}$

Grandeurs totales : On peut considérer que par la conservation de l'enthalpie totale uniquement, seule la température totale est conservée, à l'inverse de la pression et de la densité totales.

Les relations précédentes mènent à $M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}M_1^2 - 1}$

La relation est bijective, on peut aussi remarquer que $\lim_{M_1^2 \rightarrow +\infty} M_2^2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$ (la relation ne se vaut plus en hypersonique, les gaz devenant ionisés)

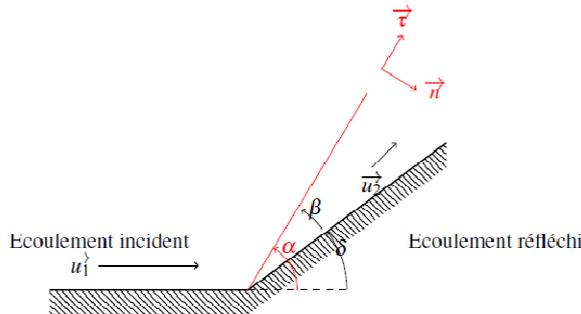
On obtient les trois relations suivantes :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \quad M_1^2 = \frac{(\gamma+1)P_2 + (\gamma-1)P_1}{2\gamma P_1}$$

3.3 Onde de choc oblique

3.3.1 Conditions de part et d'autre du choc

Les ondes de choc obliques apparaissent au niveau des rampes de compression (un changement d'orientation de la paroi).



Dans le repère associé au choc :

$$\vec{u}_1 = u_{1n}\vec{n} + u_{1\tau}\vec{\tau} = u_1 \sin(\alpha)\vec{n} + u_1 \cos(\alpha)\vec{\tau}$$

$$\vec{u}_2 = u_{2n}\vec{n} + u_{2\tau}\vec{\tau} = u_2 \sin(\beta)\vec{n} + u_2 \cos(\beta)\vec{\tau}$$

3.3.2 Relation d'Hugoniot

Conservation de la masse : $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

Conservation de la quantité de mouvement : on projette suivant \vec{n} et $\vec{\tau}$

suivant \vec{n} : $P_1 + \rho_1 u_{1n}^2 = P_2 + \rho_2 u_{2n}^2$

suivant $\vec{\tau}$: $\rho_1 u_{1\tau} u_{1n} = \rho_2 u_{2\tau} u_{2n}$

Conservation de l'énergie : $h_1 + \frac{u_{1n}^2 + u_{1\tau}^2}{2} = h_2 + \frac{u_{2n}^2 + u_{2\tau}^2}{2}$

Dans la direction normale au choc : $u_{1n} > u_{2n}$

Dans la direction tangentielle : $u_{1\tau} = u_{2\tau}$

Il y a donc déviation de l'écoulement vers l'onde de choc

Dans la direction normale au choc, les relations obtenues pour les chocs droits sont toujours valables, il suffit de remplacer M_1

par $M_{1n} = \frac{u_{1n}}{c_1} = M_1 \sin(\alpha)$

Ainsi :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 \sin^2(\alpha) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2(\alpha)}{2 + (\gamma-1)M_1^2 \sin^2(\alpha)} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 \sin^2(\alpha) - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2(\alpha)} \right)$$

4 Notions d'acoustique

4.1 Introduction

Il existe trois méthodes pour la résolution des problèmes d'acoustique en mécanique des fluides :

- La Théorie linéaire, avec des équations spécialisées pour l'acoustique basées sur la propagation des ondes de pression
- L'Equation de Lighthill, qui permet de simuler l'acoustique tridimensionnelle sans résoudre le couplage direct avec le champ de vitesses.
- L'Aéroacoustique qui recherche la solution complète à partir des équations de la mécanique des fluides avec l'acoustique.

4.2 Théorie linéaire

Hypothèse adiabatique : $\frac{dP}{d\rho} = \frac{1}{\rho X}$ avec X la compressibilité adiabatique.

Démarche :

Equations-bilans :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{dP}{d\rho} &= \frac{1}{\rho X}\end{aligned}$$

Linéarisation :

$$\begin{aligned}P &= P_0 + \psi P_1(x, t) \\ \rho &= \rho_0 + \psi \rho_1(x, t) \\ u &= u_1(x, t) \\ \psi &\ll 1\end{aligned}$$

Equation d'onde : Après réécriture des équations-bilans, on trouve l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho X}}$$

Helmholtz : Soit $P_1 = P e^{i\omega t}$ et $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde. On a $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + k^2 P = 0$.

La résolution de cette équation pour une géométrie donnée permet de déterminer les modes acoustiques auxquels le système est susceptible de répondre.

4.3 Equation de Lighthill

Il s'agit d'abord de représenter l'acoustique à travers une équation pour la densité ou la pression.

En cherchant à retrouver une expression similaire à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement grâce à quelques multiplication, dérivation et divergence, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{avec} \quad T_{ij} = \rho u_i u_j - \sigma_{ij} + (P - c_0^2 \rho) \delta_{ij}$$

Cette équation permet aux logiciels de mécanique des fluides spécialisés dans les écoulements incompressibles de simuler la propagation d'une onde acoustique, sans considérer explicitement la compressibilité du gaz.