Université de Ahmed Zabana Relizane

Faculté des sciences et technologies

Département de génie mécanique

Cours Résistance des matériaux

3ème année licence génie mécanique

Chapitre I

2021/2022

Introduction

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides (arbres de transmission, bâtiments, fusées, . .) dans le but de déterminer ou de vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux. . .)

La résistance des matériaux ou la mécanique des matériaux est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleurs conditions de sécurité et d'économie [1].

2.But de la résistance des matériaux

ACTIONS	DONNEES NECESSAIRES
Déterminer les **dimensions fonctionnelles** de la pièce	Les Actions Mécaniques La nature du matériau
Choisir le **matériau** constituant la pièce	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce Le type de vérification
Vérifier la **résistance à la "casse"** de la pièce : Dépassement de la limite à la résistance élastique Re ou à la rupture Rr du matériau	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau
Vérifier la **résistance à la "déformation"** de la pièce : Dépassement de la valeur maximale imposée par le C.D.C.F. pour les différentes déformations de la pièce	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau Le C.D.C.F.
Vérifier la **résistance à la "fatigue"** de la pièce : Rupture après un certain nombre de cycles de déformation imposée par le C.D.C.F.	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau
Vérifier la **résistance au "fluage"** de la pièce : Déformation continue de la pièce, dans le temps, sous l'action d'actions mécaniques constantes qui amène à la rupture de la pièce	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau Le C.D.C.F.

Optimiser le **coût** de la pièce par changement des formes, des dimensions, des matériaux, ...	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau Le C.D.C.F.

3.UNITES

Les unités de mesure utilisées sont principalement celles du système d'unités international (SI); pour des raisons de commodité le système d'unités technique (MKS) est parfois utilisé

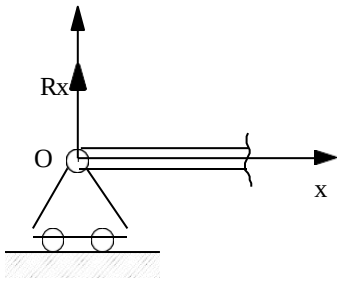
Unité	SI	MKS
Longueur (le mètre)	m	m
Masse (le kilogramme)	kg	kgf = 10 N
Temps (la seconde)	s	s
Force (le Newton)	N, kN	t = 10^3 kgf = 10^4 N
Contrainte	N/mm²	1 bar = kgf/cm² = 0.1 N/mm²
Travail (Joule)	J = N.m	kgf .m = 10 J

4.REACTION D'APPUI (Efforts de liaison)

Une structure est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. Une liaison impose des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème. Les liaisons dans le plan sont de 3 sortes:

4.1 Appui simple

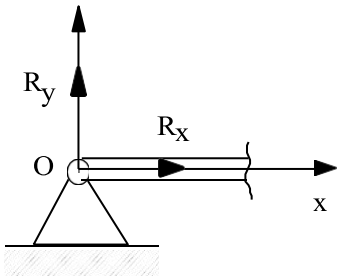
Ce type d'appui matérialisé par la Fig. 1, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui a la direction de la droite précitée, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.



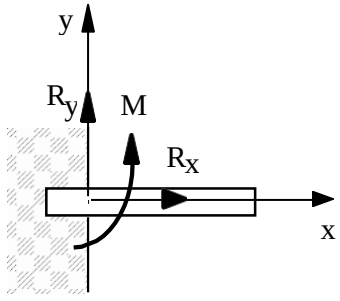
4.2.Appui double (articulation)

Matérialisé par une rotule (Fig. 2) cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d'action passe par le centre de l'articulation.

L'articulation introduit 2 inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen.



4.3.Encastrement



L'encastrement schématisé sur la Fig.3 interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Sa réaction est une force de densité variable répartie sur toute l'étendue de la section. En vertu du principe de Saint Venant, ces forces peuvent être remplacées par leur résultante générale R, et leur moment M rapportés au centre de gravité G. Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.

FORCES

La force est une grandeur dirigée (Fig. 4). Elle est donc représentée par un vecteur et définie par:

- Son point d'application
- Sa direction ou support
- Son sens
- Son intensité

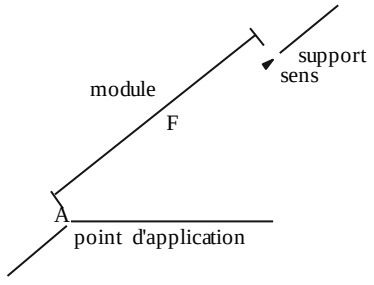


Fig. 4

Dans un repère Cartésien une force $\vec{F}$ est définie par une intensité F et des angles α, β et γ que $\vec{F}$ forme avec les axes X, Y et Z. Les projections de $\vec{F}$ suivant ces axes sont les composantes de cette force. Comme le montre la Fig. 5, $F_X = F\cos\alpha$, $F_Y = F\cos\beta$ et $F_Z = F\cos\gamma$. Ces composantes qui déterminent complètement l'intensité et la direction de $\vec{F}$ sont souvent représentées sous la forme matricielle par:

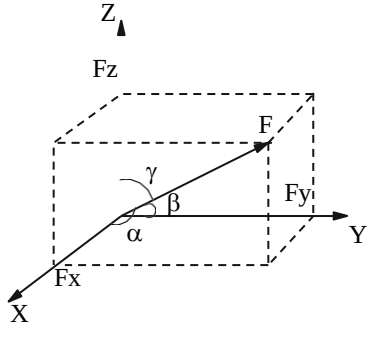


Fig. 5

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Cette matrice colonne est appelée le vecteur force.

Composition des forces

Soient $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ définies par:

$$F_1 = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \end{bmatrix} \qquad F_2 = \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} \qquad F_n = \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix}$$

Où $F_{x1} = F_1 \cos\alpha_1$, $F_{y1} = F_1 \cos\beta_1$, $F_{z1} = F_1 \cos\gamma_1$, $F_{x2} = F_2 \cos\alpha_2$ ... etc.

Le vecteur $\vec{F}$ résultant est la somme de ces n vecteurs forces:

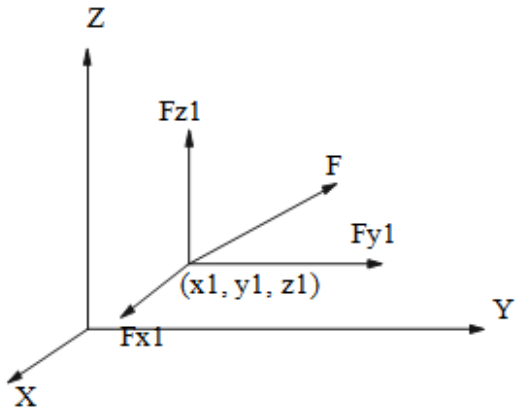
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} + F_{x2} + ... + F_{xn} \\ F_{y1} + F_{y2} + ... + F_{yn} \\ F_{z1} + F_{z2} + ... + F_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum F_{xi} \\ \sum F_{yi} \\ \sum F_{zi} \end{bmatrix}$$

Moment des forces

Le moment de F_1 par rapport à un axe, X par exemple, est la somme des moments de ses composantes par rapport à cet axe.

Si le point d'application de F_1 est défini par (x_1, y_1, z_1) (Fig 6) on a:



Le moment de F_1 par rapport à l'axe X

$$M_x = F_{z1}y_1 - F_{y1}z_1$$

Le moment de F1 par rapport à l'axe Y

$$M_y = F_{x1}z_1 - F_{z1}x_1$$

Le moment de F1 par rapport à l'axe Z

$$M_z = F_{y1}x_1 - F_{x1}y_1$$

Sous sa forme vectorielle le moment M_1 s'écrit:

$$M_1 = \begin{vmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{z1}y_1 - F_{y1}z_1 \\ F_{x1}z_1 - F_{z1}x_1 \\ F_{y1}x_1 - F_{x1}y_1 \end{vmatrix}$$

Torseur de cohésion.

Objectif

Déterminer le torseur de cohésion le long d'une poutre.

Déterminer la nature des sollicitations dans une poutre.

Traçage des diagrammes de sollicitations.

I. Introduction :

Les efforts intérieurs ou de cohésion sont les efforts qui agissent à l'intérieur des poutres et qui assurent l'équilibre ou la cohésion de la structure sous l'action des charges extérieures exercées. La connaissance des ces efforts de cohésion nous renseignera sur l'état de sollicitation de la poutre étudiée, et permettra d'évaluer sa résistance aux efforts qui lui sont appliqués.

II. Détermination du torseur de cohésion :

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau d'une section droite d'une poutre, nous effectuons une coupure imaginaire par un plan perpendiculaire à la fibre moyenne. Ce plan définit une section S de barycentre G qui divise la poutre en deux tronçons fictifs (AG et GB). Chaque tronçon est en équilibre et l'application du Principe Fondamental de la statique, à l'un ou à l'autre, permet d'identifier et de calculer les efforts intérieurs exercés entre les deux tronçons au niveau de la coupure.

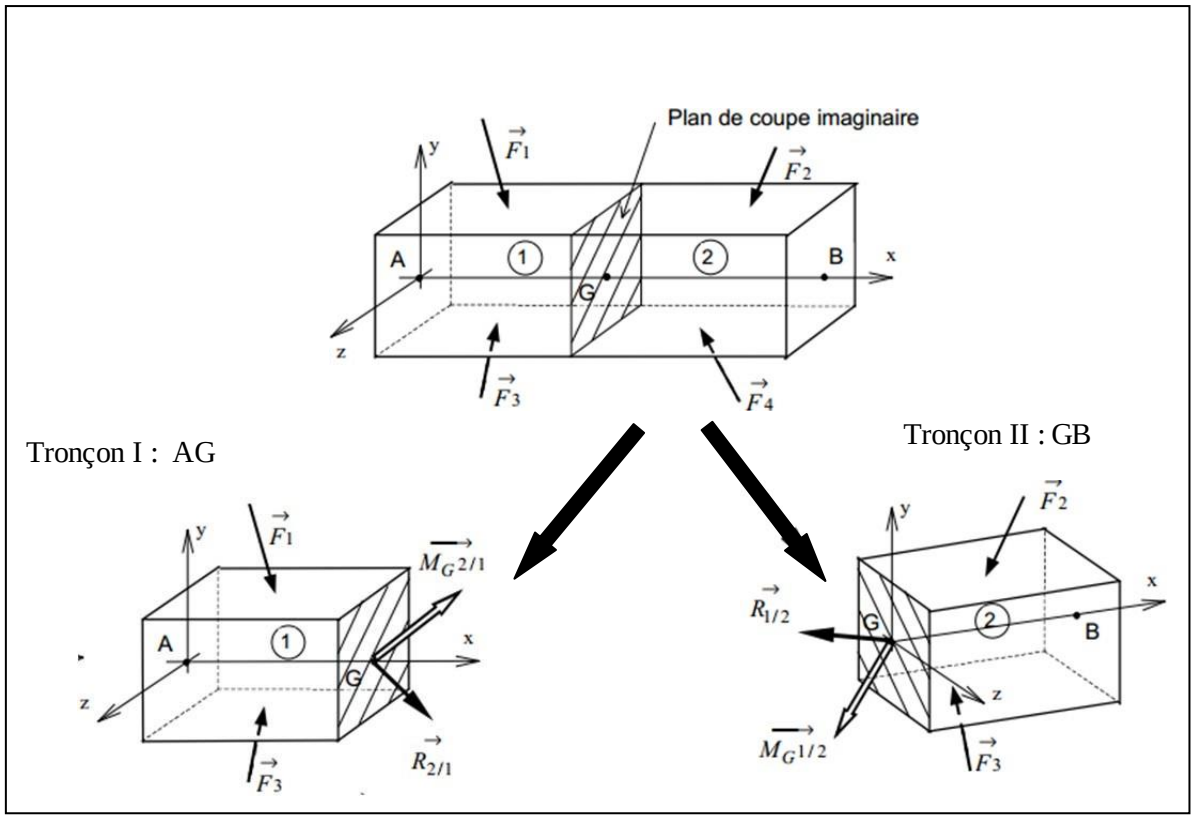


Figure 2.1 : Illustration d'une coupe fictive sur une poutre.

Les actions mécaniques entre les deux tronçons sont les efforts intérieurs à la poutre que l'on peut modéliser par un torseur appelé torseur de cohésion $\{\tau_{CohII/I}\}_G$ et dont les éléments de réduction au point G centre de surface sont :

- Une résultante $\vec{R}$
  Un moment résultant $\vec{M}_G$

$$\{\tau_{CohII/I}\}_G = \{\tau_{Efforts_intérieurs}\}_G = \begin{Bmatrix} R \\ \vec{} \end{Bmatrix}_{M_G}$$

Deux conventions d'écriture sont possibles :

- Convention 1 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (2) sur la partie (1) .
- Convention 2 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (1) sur la partie (2) .

II.1. Etude de l'équilibre de la poutre :

L'équilibre du tronçon I ***ou de la partie gauche*** se traduit par :

$$\{\tau_{Coh}\} + \{\tau_{ext\to 1}\} = \{0\}$$

Avec : $\{\tau_{ext\to 1}\}_G = \{\tau_{F_{1\to 1}}\}_G + \{\tau_{F_{3\to 1}}\}_G$

Ce qui permet de déduire que : $\{\tau_{coh}\}_G = -\{\tau_{actionsmécaniquesàgauche}\}_G$

Comme L'équilibre de la poutre se traduit par :

$$\{\tau_{actionsmécaniquesàdroite}\}_G + \{\tau_{actionsmécaniquesàgauche}\}_G = \{0\}$$

On peut déduire que :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \{\tau_{actionsmécaniquesàdroite}\}_G$$

Finalement, le torseur de cohésion au centre de surface G d'une surface droite de poutre se défini en effectuant la somme des torseurs, au même point G , des actions mécaniques agissant soit à gauche de la section droite, somme précédée du signe : « - », soit à droite de la section droite, somme précédée du signe « + ».

Cette relation permet de simplifier le calcul du torseur de cohésion dans le cas où le torseur des actions mécaniques à droite est plus simple à déterminer.
Chaque tronçon est en équilibre et l'application du PFS, à l'un ou à l'autre, permet de faire apparaître et de calculer le torseur de cohésion au niveau de la coupure.

II.2. Composantes du torseur de cohésion :

Les composantes du torseur de cohésion se notent conventionnellement comme ci-dessous :

$$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} R \\ \vec{} \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N & M_t \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} T & M \\ T_z^y & M_{fz}^{fy} \end{Bmatrix}_G$$

Avec :

N : Effort normal

Ty : Effort tranchant suivant l'axe (G,y)

Tz : Effort tranchant suivant l'axe (G,z)

Mt : Moment de torsion

Mfy : Moment fléchissant suivant l'axe (G,y).

Mfz : Moment fléchissant suivant l'axe (G,z)

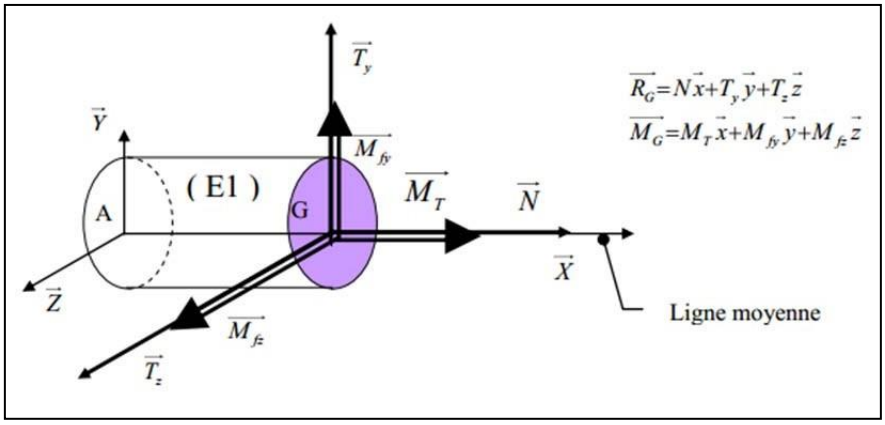


Figure 2.2 : Les composantes du torseur de cohésion.

III. Notion de contrainte :

III.1. Vecteur contrainte :

Le torseur de cohésion permet de modéliser les efforts intérieurs au point G centre de la section droite mais ce torseur ne représente qu'une vision globale de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la section droite.

Pour représenter ces actions mécaniques, on considère un point M de la surface S. Autour de ce point M, on considère un élément de surface dS de normale $\vec{n}$

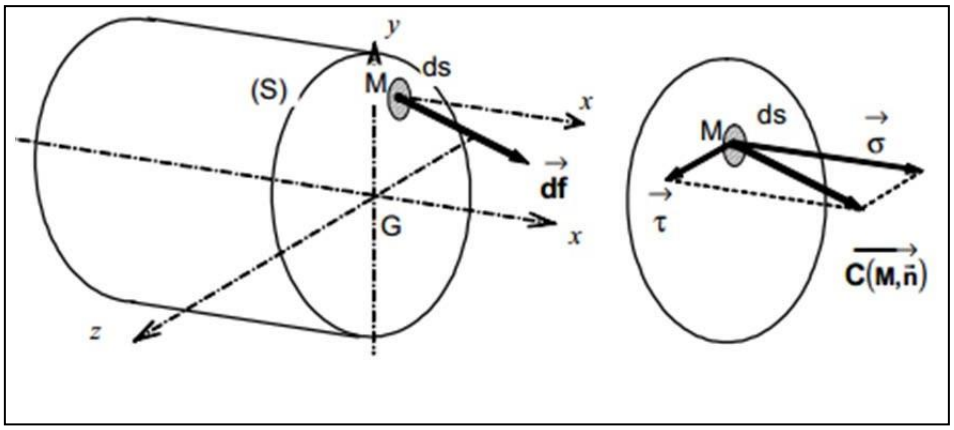


Figure 2.3 : Zoom local sur un point M de la coupure.

Les efforts intérieurs exercés sur dS sont une densité surfacique d'efforts ou densité de force par unité de surface.

Cette densité surfacique d'effort est caractérisée par le vecteur contrainte $\vec{C}\left(M, \vec{n}\right)$.

Les actions mécaniques s'exerçant sur la surface sont donc $\vec{dF} = \vec{C}\left(M, \vec{n}\right) dS$.

L'unité du vecteur contrainte est le rapport d'une force par unité de surface soit N/m^2 ou Pa.

III.2. Contrainte normale et contrainte tangentielle :

On définit les contraintes normales et tangentielle respectivement la projection de $\vec{C}(M, \vec{n})$ sur la normale $\vec{n}$, et la projection de $\vec{C}(M, \vec{n})$ sur le plan de l'élément de surface dS : $C(M, n) = \sigma n + \tau t$

σ : Contrainte normale.

τ : Contrainte tangentielle

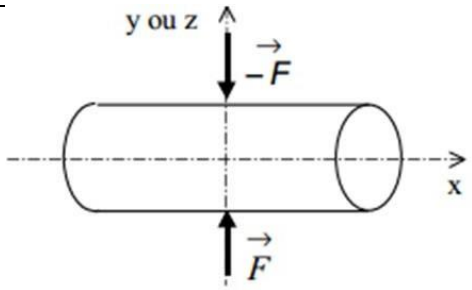
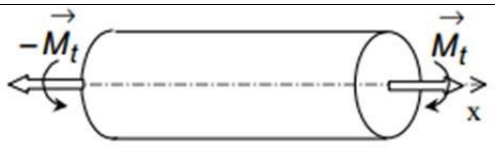
n : Vecteur normale à l'élément de surface dS

$\vec{t}$: Vecteur tangent à l'élément de surface dS

IV. Identification de la nature des sollicitations :

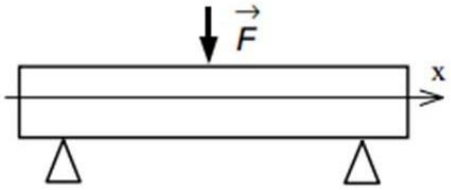
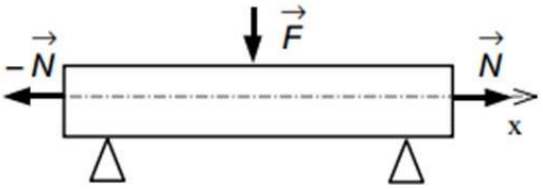
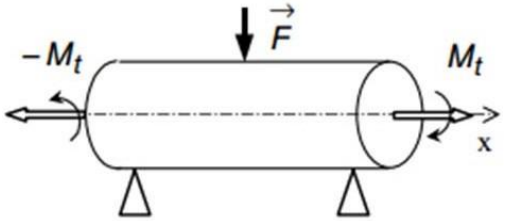
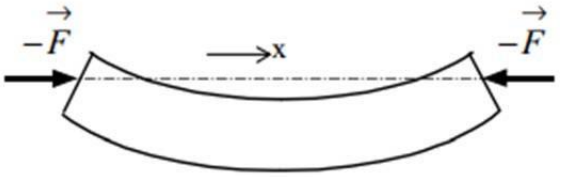
IV.1. Sollicitations simples :

Si une seule composante N, T, M_T ou M_f existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une sollicitation simple.

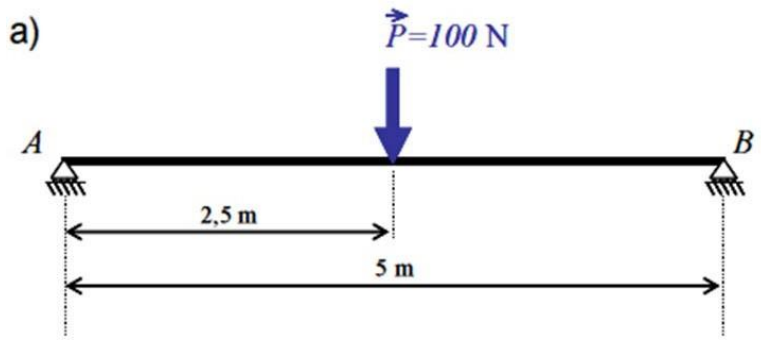
Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	TRACTION (pour la compression, les vecteurs forces sont en sens inverse)	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$	CISAILLEMENT	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	TORSION	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	FLEXION PURE	

IV.2. Sollicitations composées :

Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	***FLEXION PLANE SIMPLE***	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	***FLEXION + TRACTION***	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$ ou $\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	***FLEXION + TORSION***	
$\{\tau_{Coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	***FLAMBAGE***	

V. Application :



V.1. Enoncé :

1. Identifier les liaisons présentes sur la poutre
2. Mettre en place le repère général,
3. Déterminer les efforts transmis par les liaisons,
4. Déterminer le nombre de tronçons nécessaires à l'étude de la poutre en RdM,
5. Mettre en place les coupures, et les repères associés à chaque coupure,
6. Déterminer le torseur de cohésion dans chaque tronçon ,
7. Tracer les diagrammes de sollicitations.

Bibliographie

[1] Aleinik L. et Durler J. resistance des materiaux cours de base, Edition Bibliotheque de l'ingenieur 1973.

[2] .J. BAHUAUD Notes de cours de mécanique des milieux continus INSA Lyon 1983

[3] L. BRILLOUIN. Les tenseurs en mécanique et en élasticité Ed. Masson 1949

[4] N. BOURAHLA . resistance des materiaux cours de base. Université de saad dahlab blida.