Table des Matières

Chapitre 1

Formes différentielles

Rappelons le résultat classique

1.1 Dual d'un espace vectoriel

Soient $\mathbb{X}$ un espace vectoriel et $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif.

L'ensemble $L(\mathbb{X}, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur $\mathbb{X}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé l'espace dual de $\mathbb{X}$ et noté $\mathbb{X}^*$.

1.1.1 Base duale

Proposition 1.1.1 *Soient $\mathbb{X}$ un espace vectoriel de dimension finie et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{X}$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une unique forme linéaire e_i^* telle que*

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : e_i^* (e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases} .$$

La forme e_i^* est la j^{em} forme coordonnée par rapport d la base $\mathcal{B}$, c'est à dire $e_i^* (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_i$.

Preuve. $\forall x \in \mathbb{X}$ alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^m$,
tel que $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_j e_j + \cdots + \alpha_n e_n$,
donc $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : e_i^* (x) = e_i^* (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_j e_j + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_i$.

et$\forall x, y \in \mathbb{X}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $e_i^*(\lambda x + y) = \lambda e_i^*(x) + e_i^*(y)$.

On suppose il existe une forme linéaire s_i^* tel que $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $s_i^*(e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{X}$ alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^m$,

tel que $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_j e_j + \cdots + \alpha_n e_n$,

donc $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} s_i^*(x) &= s_i^*(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_j e_j + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_i \\ &= e_i^*(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_j e_j + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= e_i^*(x) \end{aligned}$$

c'est à dire $s_i^* = e_i^*$. ■

Théorème 1.1.1 *Soient $\mathbb{X}$ un espace vectoriel de dimension finie et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{X}$. Alors il existe une unique base $B^* = \{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ de $\mathbb{X}^*$ telle que $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$.*

Preuve. 1) $\forall x^* \in \mathbb{X}^*, \forall x \in \mathbb{X}$, alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^m$

tel que $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_j e_j + \cdots + \alpha_n e_n$ et on a aussi,

$$\begin{aligned} x^*(x) &= x^*(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_j e_j + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1 x^*(e_1) + \alpha_2 x^*(e_2) + \cdots + \alpha_j x^*(e_j) + \cdots + \alpha_n x^*(e_n) \\ &= \alpha_1 x^*(e_1) e_1^*(e_1) + \alpha_2 x^*(e_2) e_2^*(e_2) + \cdots + \alpha_j x^*(e_j) e_j^*(e_j) + \cdots + \alpha_n x^*(e_n) e_n^*(e_n) \\ &= x^*(e_1) e_1^*(\alpha_1 e_1) + x^*(e_2) e_2^*(\alpha_2 e_2) + \cdots + x^*(e_j) e_j^*(\alpha_j e_j) + \cdots + x^*(e_n) e_n^*(\alpha_n e_n) \\ &= x^*(e_1) e_1^*(x) + x^*(e_2) e_2^*(x) + \cdots + x^*(e_j) e_j^*(x) + \cdots + x^*(e_n) e_n^*(x). \end{aligned}$$

donc B^* est génératrice.

2) $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^m, \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \ldots + \alpha_n e_n^* = 0$.

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \ldots + \alpha_n e_n^*(e_i) = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0$.

c'est à dire B^* est libre et donc base. ■

1.2 Forme différentielle

Définition 1.2.1 *Un champ de vecteurs (de classe C^k) sur (un ouvert) de $\mathbb{R}^n$ est une application (de classe C^k) à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.2.2 *Une $1-$forme différentielle(de classe C^k) sur (un ouvert) de $\mathbb{R}^n$ est une application (de classe C^k) à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.*

On note toujours $(dx_1, ..., dx_n)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $\forall \varphi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^m$ tel que $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$, c'est à dire $\varphi(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t (dx_1(x), ..., dx_n(x)), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Toute 1-forme différentielle ω se décompose en $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$.

où ω_i sont des applications sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.

Si $\omega_i \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ pour $i \in \{1, ..., n\}$, l'application $\omega : x \to \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(x) dx_i$ définit une 1-forme différentielle de classe C^k. Pour tout $x \in \Omega$, la forme linéaire $\omega(x)$ est définie par $\omega(x).h = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(x) h_i$, pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ de composantes $h_1, ..., h_n$. Si f est de classe C^1 sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, la différentielle de f notée df est définie par $a \to d_a f = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$. C'est une forme différentielle sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Forme différentielle exacte

Définition 1.2.3 *Une forme différentielle ω est dite exacte s'il existe une fonction f de classe C^1 sur Ω telle que $\omega = df$. La fonction f est une primitive de la forme ω.*

Théorème 1.2.1 *Soit P et Q deux fonctions de classe C^1 sur l'ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la forme différentielle définie par $\omega : (x, y) \to \omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est exacte si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \forall (x, y) \in \Omega$.*

Exemple 1 $\omega(x, y) = x^2 y dx + \frac{1}{3} x^3 dy$

on a $P(x, y) = x^2 y$ *et* $Q(x, y) = \frac{1}{3} x^3$

et $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

donc ω est une forme différentielle exacte.

Théorème 1.2.2 *Soit f_1,...et f_n des fonctions de classe C^1 sur l'ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la forme différentielle définie par $f : (x_1, ..., x_n) \to f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n$ est exacte si et seulement si $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ on a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, ..., x_n), \forall (x_1, ..., x_n) \in \Omega$.*

1.2.2 Forme différentielle fermée

Définition 1.2.4 *Une forme différentielle $f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dite fermée si $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ on a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.*

Proposition 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, toute $1-$ forme différentielle exacte de classe C^1sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est fermée sur l'ouvert Ω.*

Preuve. Soit df une forme différentielle exacte de classe C^1sur l'ouvert Ω alors on a $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

comme df de classe C^1donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ des fonctions de classe C^1 alors d'aprés théorème de Schwarz on trouve $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. ■

Théorème 1.2.3 *(Poincaré) Soit U un ouvert connexe. Toute forme différentielle fermée sur U est exacte.*

Soit $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles continues, la differentielle exacte de U s'écrit par $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$.

Exemple 2 *Si $U(x, y) = x^2 + xy$ alors*

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) &= 2x + y \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= x \end{aligned}$$

Donc $dU = (2x + y) dx + xdy$.

On considère l'équation différentielle suivante

$$dU = M(x, y) dx + N(x, y) dy \tag{1.2.1}$$

Si on peut trouver une fonction $U(x,y)$ qui vérifie:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$$

Proposition 1.2.2 *Soit* $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction tel que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

Si M *et* N *des fonctions* C^1 *alors*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Preuve. On a $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ et $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y)\, b$
donc $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y)$,
et M et N des fonctions C^1 alors d'aprés théorème de Schwarz on trouve $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. ■

Remarque 1 *On a* $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$
danc $U(x,y) = \int_x M(x,y)\,dx + k(y)$
ainsi $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + k'(y) = N(x,y)$
c'est à dire $k'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right).$

1.2.3 Facteur intégrant

Soit une differentielle de la forme:

$$dV = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

tel que $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, cette différentielle n'est pas exacte.
On cherche alors une fonction $F(x,y)$ tel que

$$dU = F(x,y)\,M(x,y)\,dx + F(x,y)\,N(x,y)\,dy,$$

est une différentielle totales, cette fonction est appelée *facteur intégrant* de la différentielle dV.

1.2.4 Détermination de facteur intégrant

Il suffit de trouver la fonction F qui vérifie la relation

$$\frac{\partial (FM)}{\partial y} = \frac{\partial (FN)}{\partial x},$$

c'est à dire

$$F\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Facteur intégrant de la forme $F(x)$

Donc dans ce cas on a: $F\frac{\partial M}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial F}{\partial x}$
ce qui inplique $N\frac{\partial F}{\partial x} = F\frac{\partial M}{\partial y} - F\frac{\partial N}{\partial x}$
alors $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$
donc $F(x) = e^{\displaystyle\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$.

Facteur intégrant de la forme $F(y)$

Donc dans ce cas on a: $F\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x}$
ce qui implique $M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} - F\frac{\partial M}{\partial y}$
alors $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$
donc $F(y) = e^{\displaystyle\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$.

Exemple 3 *La forme différentielle $dV = ydx - xdy$ n'est pas exacte. On cherche alors une fonction $F(x)$ tel que $dU = F(x)\,dV = F(x)\,ydx - F(x)\,xdy$ est une forme diff exacte, donc $F(x) = e^{\displaystyle\int \frac{1}{-x}(1+1)dx}$ c'est a dire $F(x) = \frac{1}{x^2} + c, c \in \mathbb{R}$ et on a $dU = \frac{1}{x^2}(ydx - xdy)$, ainsi $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{x}$, ce qui implique $U(x,y) = \frac{-y}{x} + Cte$.*

1.3 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

On considère une courbe paramétrée (C) de classe C^1 tracée dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de paramétrage: $t \in [a,b] \to \overrightarrow{OM}(t) = x_1(t)e_1 + ... + x_n(t)e_n$

et $f : (x_1, ..., x_n) \to f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n$ est une forme différentielle définie sur l'ouvert Ω.

Proposition 1.3.1 *Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert Ω et si f est une primitive de ω (i-e $\omega = df$), alors pour toute courbe (C) de classe C^1 $(\overrightarrow{ab})$ d'origine a et d'extremité b tracée dans Ω, on a :* $\int\limits_{(C)} \omega = f(b) - f(a)$.

Exemple 4 *$\omega = (2x + y)\, dx + xdy$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$*

$f(x, y) = x^2 + xy + c, c \in \mathbb{R}$ est une primitive de ω

si $a(0,0), b(1,1) \in \mathbb{R}^2$ alors pour toute courbe (C) de classe C^1 $(\overrightarrow{ab})$ d'origine a et d'extremité b tracée dans Ω, on a : $\int\limits_{(C)} \omega = f(1,1) - f(0,0) = 2.$