Chapitre 1

Matrices et Déterminants

Matrices

Définition

• Une **matrice** A est un tableau rectangulaire d'éléments de K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$).

• Elle est dite de **taille** $n \times p$ (ou de type (n,p)) si le tableau possède n lignes et p colonnes.

• Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A.

• Le coefficient situé à la i-éme ligne et à la j-éme colonne est noté a_{ij} .

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad ou \quad A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} \quad ou \quad (a_{ij}).$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{11} = 1$ et $a_{23} = 7$.

Notations

-L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K est noté $M_{n,p}(K)$

-Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$sont appelés **matrices réelles**

– Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite **matrice carrée**.

On note $M_n(K)$ au lieu de $M_{n,n}(K)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

– Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée **matrice ligne** ou **vecteur ligne**.
On la note $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1p})$.

– De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée **matrice colonne** ou **vecteur colonne**. On la note $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.

– La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la **matrice nulle** et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels

Opérations sur les matrices

a) Egalité de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq p.$$

b) Somme de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$. On définit la somme de A et B et on note $A + B$

la matrice $A + B = (c_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ tel que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq p.$$

c) Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$, $et\ \lambda \in K$, alors $\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \quad \forall\, 1 \leq i \leq n, \forall\, 1 \leq j \leq p.$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

$A + C$ et $B + C$ n'existent pas car $A, B \in M_2(\mathbb{R})$et $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

La matrice $(-1)A$ est l'**opposée** de A et est notée $-A$. La **différence** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Proposition

Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(K)$.. Soient $\alpha \in K$ et $\beta \in K$ deux scalaires.

1. $A + B = B + A$: **la somme est commutative**,

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: **la somme est associative**,

3. $A + 0 = A$: **la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition**,

4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Exercice : Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $et\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.Trouver une matrice C telle que $A - 2B - C = 0$

2.Trouver une matrice D telle que $A + B + C - 4D = 0$

<u>Solution de L'exercice :</u>

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1)

$$A - 2B - C = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3 - 2 \times 1 - c_{11} = 0 \\ 0 - 2 \times 0 - c_{21} = 0 \\ 1 - 2 \times 1 - c_{31} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2 - 2 \times 2 - c_{12} = 0 \\ 4 - 2 \times 1 - c_{22} = 0 \\ -1 - 2 \times 1 - c_{32} = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$C = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

2)

$$A + B + C - 4D = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3 + 1 - 5 - 4d_{11} = 0 \\ 0 + 0 + 0 - 4d_{21} = 0 \\ 1 + 1 - 1 - 4d_{31} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2 + 2 - 2 - 4d_{12} = 0 \\ 4 + 1 + 2 - 4d_{22} = 0 \\ -1 + 1 - 3 - 4d_{32} = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

d) produit de deux matrices

Définition

Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$. et $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(K)$. (c'est à dire le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). On définit alors le produit de A et B dans cet ordre par la matrice $C = A \times B = (c_{ij})$ de $M_{n,q}(K)$ tel que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i1}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a A de taille 2×3 et B de taille 3×2 , alors la matrice obtenue ($A \times B$) est de taille 2×2.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 1 \\ 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 4 \times 1 & 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 1 \end{pmatrix}$$

Donc $$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Remarques importantes

1. Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit $A \times B$ n'est pas défini.
2. En général, et lorsque le produit est bien défini, on a $A \times B \neq B \times A$
3. Le produit des matrices carrées d'ordre n est toujours défini

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \times B$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B**.**

Pièges à éviter

Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \ mais \ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

Deuxième piège. $\boldsymbol{AB} = 0$ **n'implique pas** $\boldsymbol{A} = 0$ **ou** $\boldsymbol{B} = 0$

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad et\ \ AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Troisième piège. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ **n'implique pas** $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$**.** On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad et\ AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices. Lorsque le produit est bien défini, on a

1. $A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,
2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,
3. $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

On dit que deux matrices A et B commutent si $A \times B = B \times A$
Trouver toutes les matrices qui commutent avec A

Solution de L'exercice : On cherche B telle que $AB = BA$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ 5b_{31} & 5b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 3b_{12} & 5b_{13} \\ b_{21} & 3b_{22} & 5b_{23} \\ b_{31} & 3b_{32} & 5b_{33} \end{pmatrix}$$

il faut que

$$\begin{cases} b_{11} = b_{11} \\ b_{12} = 3b_{12} \\ b_{13} = 5b_{13} \\ 3b_{21} = b_{21} \\ 3b_{22} = 3b_{22} \\ 3b_{23} = 5b_{23} \\ 5b_{31} = b_{31} \\ 5b_{32} = 3b_{32} \\ 5b_{33} = 5b_{33} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \text{ avec } k_1, k_1, k_1 \in \mathbb{R}.$$

Les matrices particulières

La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition Si A est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n \cdot A = A \quad et \quad A \cdot I_p = A$$

Matrices triangulaires

Définition Soit $A \in M_n(K)$.

1) On dit que A est triangulaire supérieure si et seulement si

$$\forall\,(i,j) \in \{1,2,3,\dots,n\}^2, \qquad i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

exemple : $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2) On dit que A est triangulaire inférieure si et seulement si

$$\forall\,(i,j) \in \{1,2,3,\dots,n\}^2, \qquad i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

exemple : $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

3) On dit que A est diagonale si et seulement si

$$\forall\,(i,j) \in \{1,2,3,\dots,n\}^2, \qquad i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

exemple : $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Transposée d'une matrice

Définition Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$.

On appelle transposée de A la matrice notée A^t de $M_{p,n}(K)$ définie par $A^t = (a_{ji})$.

Exemple Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrices symétriques

Définition Une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si $A^t = A$.

Exemple Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices antisymétriques

Définition Une matrice carrée est dite antisymétrique si et seulement si $A^t = -A$.

Exemple Les matrices suivantes sont antisymétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

La trace

Définition On appelle trace d'une matrice carrée $A \in M_n(K)$ le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, alors tr A $= 2 + 5 = 7$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 11 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, tr $B = 1 + 7 - 3 = 5$.

Matrices carrées inversibles

Définition Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une unique matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \quad et \quad BA = I,$$

on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans K, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1,\ b = -\frac{2}{3}\ ,\ c = 0,\ d = \frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA = I$, dont la vérification est laissée au lecteur. La matrice A est donc inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trouver A^{-1}.

Proposition Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(K)$, alors la matrice AB est aussi inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Preuve On pose $C = B^{-1}A^{-1}$, il suffit de démontrer que

$$(AB)C = C(AB) = I_n\ .$$

On a

$$\begin{aligned}(AB)C &= (AB)(B^{-1}A^{-1})\\ &= A(BB^{-1})A^{-1}\\ &= AI_nA^{-1}\\ &= AA^{-1} = I_n\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}C(AB) &= (B^{-1}A^{-1})(AB)\\ &= B^{-1}(A^{-1}A)B\\ &= B^{-1}I_nB\\ &= B^{-1}B = I_n\end{aligned}$$

Proposition Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Déterminants

Attention : Les déterminants ne concernent que les matrices carrées

Définition Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, le déterminant de A est l'élément de K noté det A ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Comment calculer det A ?

Exemple déterminant d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Alors $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$

Exemple déterminant d'ordre 3

Calculer det A où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Première méthode : Développement suivant la première ligne

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

2) Deuxième méthode : Développement suivant la troisième ligne

$$\det A = 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

3) Troisième méthode : Développement suivant la troisième colonne

$$\det A = 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Cas général

Soit A une matrice de $M_n(K)$. On note M_{ij} la matrice d'ordre (n - 1) déduite de A en supprimant la ième ligne et la jème colonne. On appelle déterminant de A développé suivant la ième ligne le scalaire

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

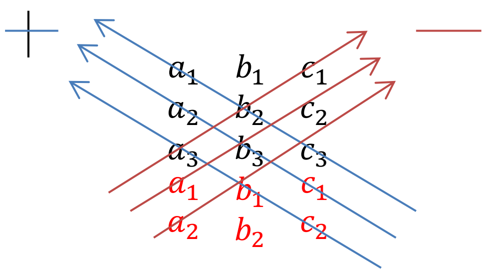
On appelle déterminant de A développé suivant la jème colonne le scalaire

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

Remarque Il est préférable de calculer le déterminant suivant la rangée (ligne ou colonne) qui contient beaucoup de zéros.

La régle de Sarrus (pour les matrices 3×3)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$



Exemple Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Par la règle de Sarrus

$$+ \quad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ \color{red}{2} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ \color{red}{1} & \color{red}{-1} & \color{red}{3} \end{array} \quad -$$

$$\det A = 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 2 \times 0 + 3 \times 1 \times 3 - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 2 \times 3 - 1 \times 1 \times 1 = -6$$

Attention : Cette méthode pour les matrices de taille 3×3

Comatrice d'une matrice

Définition On appelle comatrice de A la matrice carrée d'ordre n définie par

$$com\ A = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

$et \ \ c_{ij} = (-1)^{i+j}\, det\, M_{ij}$

où M_{ij} la matrice d'ordre $(n - 1)$ déduite de A en supprimant la ième ligne et la jème colonne.

Théorème Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, alors

$$(com\ A)^t \cdot A = A \cdot (com\ A)^t$$
$$= (\det A) \cdot I_n$$

où I_n est la matrice identité.

Corollaire Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (com\ A)^t$$

Remarque A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Exemple Soit la matrice de $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} si elle existe.

On a $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, alors A est inversible (A^{-1} $existe$).

$$com\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(com\ A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ (com\ A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$