

Première année ST -Maths 2

Fiche de TD 1

Exercice 1 : On donne la matrice suivante : $A = (a_{ij})$ telle que pour tout

$i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2,3\}$, $a_{ij} = 2i - j$

1. Ecrire la matrice A
2. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I_3$

Exercice 2 : On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice M^T , matrice transposée de M .
2. Déterminer les matrices B et C définies par : $B = M^T M$ et $C = B + A$
3. Calculer les produits DC et CD .
4. En déduire que la matrice D est inversible et donner son inverse D^{-1} .

Exercice 3 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et A_α la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A_α
2. Pour quelles valeurs de α , A_α est inversible.
3. On pose $\alpha = 5$, déterminer A^{-1} la matrice inverse de A_5 .

Exercice 4 (à la maison) : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Donner A^T , matrice transposée de A .
2. Calculer $B = A \times A^T$ et $C = A^T \times A$
3. Les matrices B et C sont-elles inversibles ? justifier.
4. Si oui, calculer leur inverse.

Corrigée

Solution de l'exercice 1 :

$$A = (a_{ij}) \quad i \in \{1,2,3\} \text{ et } j \in \{1,2,3\} \text{ avec } a_{ij} = 2i - j$$

-La matrice A

$$a_{11} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$a_{21} = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$a_{31} = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$a_{12} = 2 \times 1 - 2 = 0$$

$$a_{22} = 2 \times 2 - 2 = 2$$

$$a_{32} = 2 \times 3 - 2 = 4$$

$$a_{13} = 2 \times 1 - 3 = -1$$

$$a_{23} = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$a_{33} = 2 \times 3 - 3 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

-On détermine la matrice $B = A^2 + 2I_3$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = A^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 14 & 10 & 2 \\ 32 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 2 :

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = M^T M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = B + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 0 & 6-6 \\ -2+2 & 1 & -3+3 \\ -2+2 & 0 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 0 & -6+6 \\ 4-1-3 & 1 & -6+6 \\ 2-2 & 0 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $DC = I_3 = CD$ alors la matrice D est inversible et $D^{-1} = C$

Solution de l'exercice 3 :

$$\det A_\alpha = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \alpha - 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & \alpha - 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 3(\alpha - 6)$$

A_α est inversible si et seulement si $\det A_\alpha \neq 0$

$\det A_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 6.$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A_5 = -3 \neq 0$$

L'inverse de A : $A^{-1} = \frac{1}{\det A_5} (\text{com } A_5)^t$

$$\text{com } A_5 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{le déterminant d'ordre inférieur} \\ \text{en éliminant la i}^{\text{ème}} \text{ ligne et la j}^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{array} \right\}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad c_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9,$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad c_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$\text{com } A_5 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -8 \\ 6 & -3 & -9 \\ -7 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad (\text{com } A_5)^t = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -3 & 2 \\ -8 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 6 & -7 \\ -1 & -3 & 2 \\ -8 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & -2 & 7/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \\ 8/3 & 3 & -10/3 \end{pmatrix}$$