Université Ahmed Zabana de Relizane

Module : Théorie du Signal

Niveau : L2 Automatique et Électrotechnique

Fiche TD N°1

Exercice 1 :

Tracer les signaux à temps continu suivants :

1) $\Pi(t) = \begin{cases} 1, & -1/2 \le t \le 1/2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$

2) $y(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$

3) $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

Exercice 2 :

Soit le signal $f(t)$ représenté dans la figure 1 :

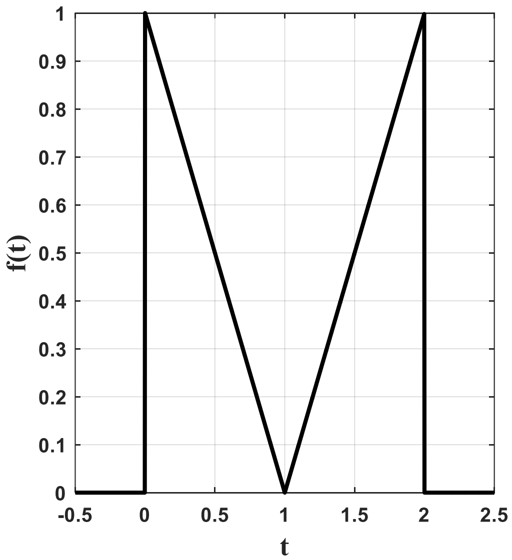


Fig. 1

1) Donner l'expression analytique des signaux $f(t)$ et $g(t) = f(2t)$

2) Calculer l'énergie totale et la puissance moyenne totale des Signaux $f(t)$ et $g(t)$

Exercice 3 :

Soit le signal aléatoire

$$X(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi)$$

Avec $A, f \in \mathbb{R}$ et φ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]-\pi.\pi[$, sa densité de probabilité est défini par :

$$f_\Phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \le \varphi \le \pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1) Montrer que le processus $X(t)$ est stationnaire au sens large (SSL)

Exercice 4 :

Soit le signal aléatoire défini par :

$$Y(t) = A + Bt$$

A et B sont deux variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité identique

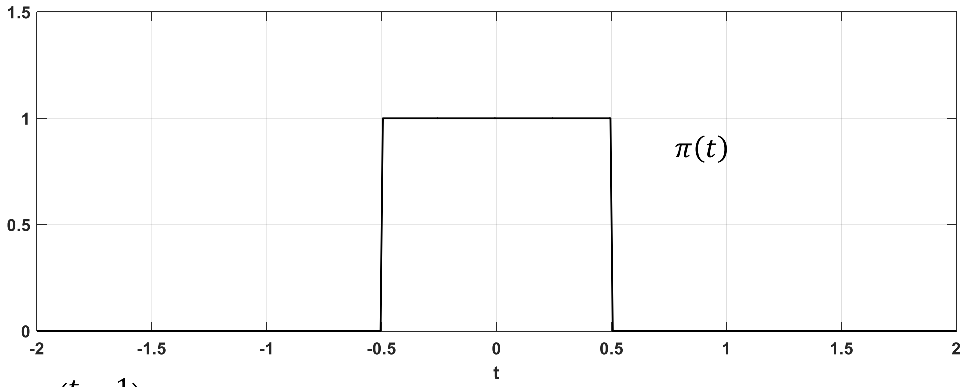
$$f_\mathrm{A}(a) = \begin{cases} a & 0 \le a \le 1 \\ -a+2 & 1 < a \le 2 \\ 0 & \text{alleurs} \end{cases} \qquad f_\mathrm{B}(b) = \begin{cases} b & 0 \le a \le 1 \\ -b+2 & 1 < a \le 2 \\ 0 & \text{alleurs} \end{cases}$$

1) Tracer la densité de probabilité $f_\mathrm{A}(a)$
2) Vérifier que $f_\mathrm{A}(a)$ est une densité de probabilité
3) Déterminer et tracer la fonction de répartition $F_\mathrm{A}(a)$ de la variable aléatoire A
4) Etudier la stationnarité au sens large (SSL) du processus $Y(t)$

Corrigés du fiche TD N°1

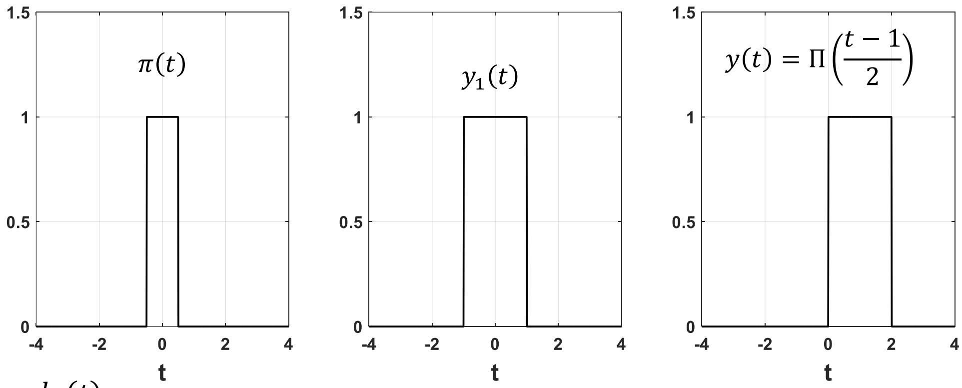
Exercice 1 :

1) Signal $\pi(t)$



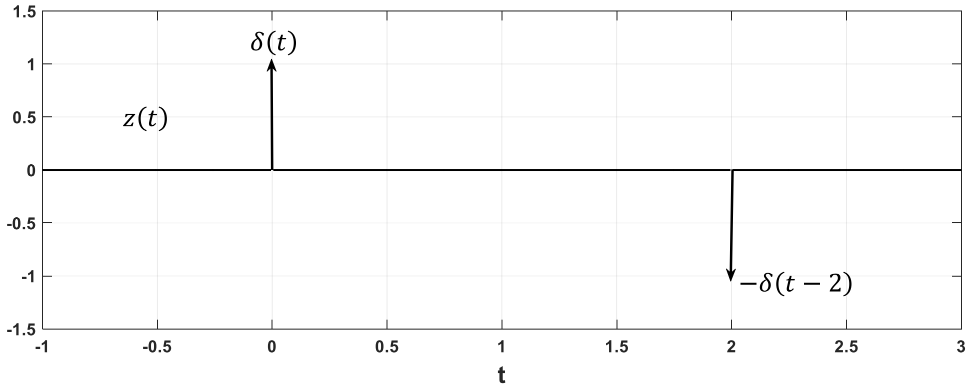
2) $y(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$

- On trace le signal $y_1(t) = \pi\left(\frac{1}{2}t\right)$ (une dilatation du signal $\pi(t)$ d'un facteur 2)
- On trace le signal $y(t) = y_1(t-1)$ (un décalage vers la droite du signal $y_1(t)$)



3) $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

$$z(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) = \frac{d}{dt}\big(u(t) - u(t-2)\big) = \frac{du(t)}{dt} - \frac{du(t-2)}{dt} = \delta(t) - \delta(t-2)$$



Exercice 2 :

1) L'expression analytique des signaux $f(t)$ et $g(t)$

- $f(t) = \begin{cases} -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

- $g(t) = f(2t) = \begin{cases} -2t+1 & 0 \leq 2t \leq 1 \\ 2t-1 & 1 < 2t \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases} = \begin{cases} -2t+1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t-1 & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

2) L'énergie totale et la puissance moyenne totale des signaux $f(t)$ et $g(t)$

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^1 (-t+1)^2 dt + \int_1^2 (t-1)^2 dt = \left[-\frac{1}{3}(-t+1)^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_1^2$$

$$\boldsymbol{E_f = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$$

$$P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_f}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{2/3}{T} = \mathbf{0}$$

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_0^{1/2} (-2t+1)^2 dt + \int_{1/2}^{1} (2t-1)^2 dt = \left[-\frac{1}{6}(-2t+1)^3\right]_0^{1/2} + \left[\frac{1}{6}(2t-1)^3\right]_{1/2}^1$$

$$\boldsymbol{E_g = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}}$$

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_g}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1/3}{T} = \mathbf{0}$$

Exercice 3 :

Pour que le signal aléatoire $X(t)$ soit stationnaire au sens large (SSL), on doit montrer que la moyenne est constante et la fonction d'autocorrélation dépende seulement de la différence temporelle.

- $m(t) = constante$
- $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(t, t+\tau)$

$$m(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (A\cos(2\pi ft + \varphi)) f_\Phi(\varphi) d\varphi = A \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi ft + \varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi ft + \varphi)\, d\varphi = \frac{A}{2\pi}(\sin(2\pi ft + \pi) - \sin(2\pi ft - \pi)) = \frac{A}{2\pi}(-\sin(2\pi ft) + \sin(2\pi ft))$$

$m(t) = 0$ La moyenne est constante

La fonction d'autocorrélation :

$$R_{XX}(t,t+\tau) = E\big(X(t)X(t+\tau)\big) = E\{(A\cos(2\pi ft+\varphi))(A\cos(2\pi f(t+\tau)+\varphi))\}$$

$$= A^2 E\{(\cos(2\pi ft+\varphi))(\cos(2\pi f(t+\tau)+\varphi))\}$$

$$= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(2\pi ft+\varphi))(\cos(2\pi f(t+\tau)+\varphi))f_\Phi(\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\cos(2\pi ft+\varphi))(\cos(2\pi f(t+\tau)+\varphi))d\varphi$$

$$= \frac{A^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\cos(2\pi f\tau)+\cos(2\pi f(2t+\tau)+2\varphi))d\varphi$$

$$= \frac{A^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi f\tau)\,d\varphi + \frac{A^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi f(2t+\tau)+2\varphi)\,d\varphi$$

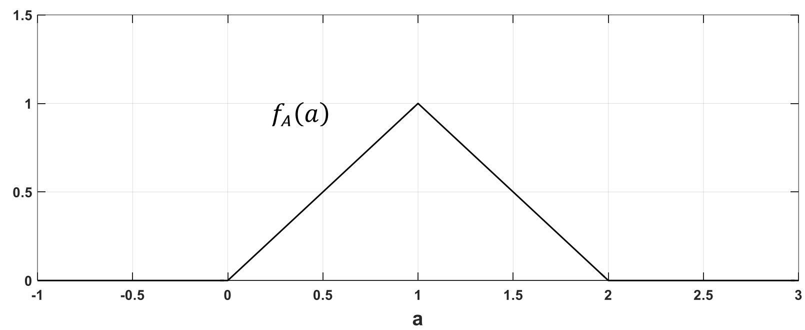
$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f\tau) + \frac{A^2}{4\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi f(2t+\tau)+2\varphi)\,d\varphi}_{=0}$$

$$\boldsymbol{R_{XX}(t,t+\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f\tau) = R_{XX}(\tau)}$$

La fonction d'autocorrélation dépende seulement de la différence temporelle τ, alors le processus est (SSL)

Exercice 4 :

1) Densité de probabilité $f_{\mathrm{A}}(a)$



2) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{A}}(a)da = \int_0^1 a\,da + \int_1^2 (-a+2)da = \left[\frac{1}{2}a^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}(-a+2)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \mathbf{1}$$

Alors $f_{\mathrm{A}}(a)$ est une densité de probabilité.

3) Fonction de répartition $F_A(a)$ de la variable aléatoire A

On a:

$$\frac{dF_A(a)}{da} = f_A(a) \Rightarrow F_A(a) = \int_{-\infty}^{a} f_A(\tau)d\tau$$

- Si $a < 0$

$$F_A(a) = \int_{-\infty}^{a} f_A(\tau)d\tau = 0$$

- Si $0 \le a < 1$

$$F_A(a) = \int_{-\infty}^{a} f_A(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} f_A(\tau)d\tau + \int_{0}^{a} f_A(\tau)d\tau = 0 + \int_{0}^{a} \tau d\tau = \left[\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^a = \mathbf{\frac{1}{2}a^2}$$

- Si $1 \le a < 2$

$$F_A(a) = \int_{-\infty}^{a} f_A(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} f_A(\tau)d\tau + \int_{0}^{1} f_A(\tau)d\tau + \int_{1}^{a} f_A(\tau)d\tau$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} \tau d\tau + \int_{1}^{a} (-\tau + 2)d\tau = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(-\tau + 2)^2\right]_1^a = -\mathbf{\frac{1}{2}a^2 + 2a - 1}$$

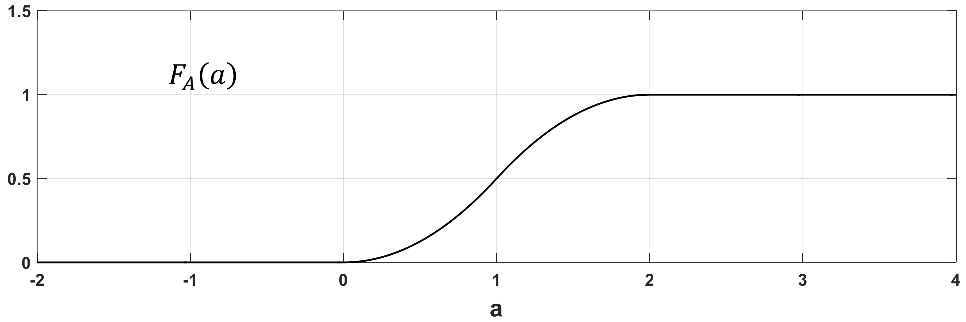
- Si $a \ge 2$

$$F_A(a) = \int_{-\infty}^{a} f_A(\tau)d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_A(\tau)d\tau}_{=0} + \int_{0}^{1} f_A(\tau)d\tau + \int_{1}^{2} f_A(\tau)d\tau + \underbrace{\int_{2}^{a} f_A(\tau)d\tau}_{=0}$$

$$= \int_{0}^{1} f_A(\tau)d\tau + \int_{1}^{2} f_A(\tau)d\tau = \int_{0}^{1} \tau d\tau + \int_{1}^{2} (-\tau + 2)d\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \mathbf{1}$$

Alors

$$F_A(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \frac{1}{2}a^2 & 0 \le a < 1 \\ -\frac{1}{2}a^2 + 2a - 1 & 1 \le a < 2 \\ 1 & a \ge 2 \end{cases}$$



4) Stationnarité au sens large du processus $Y(t)$

On détermine la moyenne $m(t)$

$$m(t) = E\{Y(t)\} = E\{A + Bt\} = E\{A\} + tE\{B\} = \int_{-\infty}^{+\infty} af_{\mathrm{A}}(a)da + t\int_{-\infty}^{+\infty} bf_{\mathrm{B}}(b)db$$

$$E\{A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} af_{\mathrm{A}}(a)da = \int_{0}^{1} a^2 da + \int_{1}^{2} a(-a + 2)da = \left[\frac{1}{3}a^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}a^3 + a^2\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \mathbf{1}$$

$$E\{B\} = \int_{-\infty}^{+\infty} b f_{\mathrm{B}}(b) db = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{m(t) = E\{Y(t)\} = 1 + t}$$

La moyenne dépende du temps donc le processus $Y(t)$, n'est pas (SSL)

On détermine la fonction d'autocorrélation

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = E\{(A + tB)(A + (t+\tau)B)\}$$

$$= E\{A^2 + (2t+\tau)AB + t(t+\tau)B^2\} = E\{A^2\} + (2t+\tau)E\{AB\} + t(t+\tau)E\{B^2\}$$

$$= E\{A^2\} + (2t+\tau)E\{A\}E\{B\} + t(t+\tau)E\{B^2\} \qquad (les\ variables\ A\ et\ B\ sont\ indépendantes)$$

- On calcul $E\{A^2\}$ et $E\{B^2\}$

$$E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_{\mathrm{A}}(a) da = \int_0^1 a^3 da + \int_1^2 a^2(-a+2) da = \left[\frac{1}{4}a^4\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}a^4 + \frac{2}{3}a^3\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = \frac{7}{6}$$

$$E\{B^2\} = \frac{7}{6}$$

$$\boldsymbol{R_{XX}(t, t+\tau) = \frac{7}{6} + (2t+\tau) + \frac{7}{6}t(t+\tau)}$$

La fonction d'autocorrélation est aussi dépende du temps