Rappel des lois fondamentales

1. Relations d'écoulement compressibles pour des gaz parfaits

1.1 Condition statique: Les paramètres d'état d'un gaz au repos sont P, T, ρ. Si ce gaz est en mouvement, il faut définir en outre sa vitesse et dans ce cas, P, T et ρ sont appelées conditions statiques (ou locales).

- Equation d'état des gaz parfait : $P\,V = mRT \leftrightarrow\ P = \frac{m}{V}RT \leftrightarrow \rho = \frac{P}{RT}$
- Enthalpie : $h = C_p\,T\ \ [J/kg]$
- Processus isentropique : $\frac{P}{\rho} = Cst, \frac{P}{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = Cst, \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = Cst$
- Vitesse du son : $a = \sqrt{\gamma RT}\ \ [m/s]$
- Nombre de Mach : $M = \frac{vitesse\ de\ fluide}{\text{vitesse du son}} = \frac{c}{a}$

1.2 Condition d'arrêt (totale de stagnation) : On utilise également d'autres valeurs de pression et de température, ce sont celles qui correspondent aux conditions d'arrêt isentropiques.
La définition de l'enthalpie de stagnation, $h_0 = h + \frac{1}{2}c^2$, cela peut être réécrit pour un gaz parfait comme suit :

$$C_pT_0 = C_pT + \frac{1}{2}c^2 = C_pT + \frac{M^2\gamma RT}{2}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \quad avec \quad C_p = \frac{\gamma R}{(\gamma-1)}$$

T_0 : Température d'arrêt ;

La relation d'écoulement compressible entre la pression de stagnation et la pression statique est donné par :

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

P_0 : Pression d'arrêt

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

ρ_0 : Densité d'arrêt

1.3 Rendement du compresseur :

$$\eta_c = \frac{(\dot W_c)_{is}}{(\dot W_c)_{réel}} = \frac{h_{02,s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} = \frac{T_{02,s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}}$$

$$\eta_c = \frac{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1}$$

1.4 Rendement de la turbine :

$$\eta_T = \frac{(\dot W_T)_{réel}}{(\dot W_T)_{is}} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02,s}} = \frac{T_{01} - T_{02}}{T_{01} - T_{02,s}}$$

2 L'équation de la continuité

Considérons l'écoulement d'un fluide de densité ρ, à travers l'élément d'aire dA, pendant l'intervalle de temps dt. Si $\boldsymbol{c}$ est la vitesse d'écoulement, la masse élémentaire est $dm = \rho c\ dt\ dA\ cos\theta$, où θ est l'angle sous-tendu par la normale de l'élément de surface à la direction d'écoulement.

$$d\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho\ c\ dA\ cos\theta = \rho\ c\ dA_n$$

Si A_{n1} et A_{n2} sont les zones normales à la direction d'écoulement aux stations (1) et (2) le long d'un passage respectivement, alors :

$$\dot{m} = \rho_1\ c_1\ A_{n1} = \dot{m} = \rho_2\ c_2\ A_{n2}$$

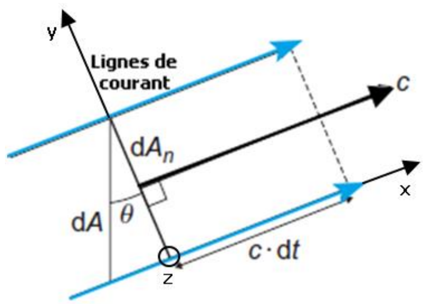

Fig. 1 : L'écoulement à travers un élément de contrôle

3 L'équation d'énergie (premier principe de la thermodynamique)

La première loi de la thermodynamique affirme que, si un système est pris par un cycle complet au cours de laquelle la chaleur est fournie et le travail est effectué, alors

$$\int (dQ - dW) = 0$$

dQ : La chaleur fournie au système pendant le cycle ;

dW : Le travail effectué par le système pendant le cycle.

La variation d'énergie dans le système:

$$dE = dQ - dW$$

Où $E = \underbrace{U}_{\text{énergie interne}} + \underbrace{\frac{1}{2}mc^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{mgz}_{\text{énergie potentielle}}$

L'équation d'énergie pour un écoulement stationnaire est :

$$\dot{Q} - \dot{W}_x = \dot{m}\left[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)\right]$$

Où h est l'enthalpie spécifique,

$\frac{1}{2}c^2$: L'énergie cinétique par unité de masse ;

gz : L'énergie potentielle par unité de masse.

l'enthalpie spécifique, h, et l'énergie cinétique, $\frac{1}{2}c^2$, sont combinées et le résultat est appelé l'enthalpie totale h_0:

$$h_0 = h + \frac{1}{2}c^2$$

L'enthalpie de stagnation est constante dans tout processus d'écoulement qui n'implique pas de transfert de travail ou de transfert de chaleur. La plupart des processus d'écoulement des turbomachines sont adiabatiques et il est permis d'écrire $\dot{Q} = 0$. Pour les travaux produit par des machines (turbines), $\dot{W}_x > 0$, de sorte que :

$$\dot{W}_x = \dot{W}_t = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$$

Pour les machines absorbant le travail de compresseurs, $\dot{W}_x < 0$, de sorte que :

$$\dot{W}_c = -\dot{W}_x = \dot{m}(h_{01} - h_{02})$$

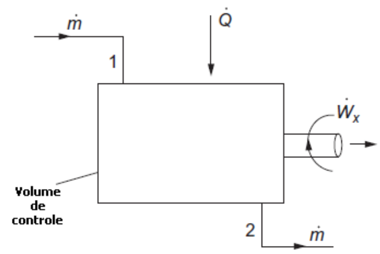

Fig. 2 : Volume de contrôle montrant les transferts de chaleur et de travail

4 L'équation de la quantité du mouvement

L'équation de la quantité du mouvement relie la somme des forces externes agissant sur un élément fluide à son accélération, ou au taux de changement de quantité de mouvement dans la direction de la force externe résultante.

Pour un volume de contrôle où le fluide entre régulièrement à une vitesse uniforme c_{x1} et sort régulièrement avec une vitesse uniforme c_{x2}, alors :

$$\sum F_x = \dot{m}(c_{x2} - c_{x1})$$

F_x : Force de pression, gravitation, viscosité……..

- **Moment de quantité de mouvement**

Le fluide tourbillonnant entre dans le volume de contrôle au rayon r_1 avec une vitesse tangentielle c_{u1} et sort au rayon r_2 avec une vitesse tangentielle c_{u2} (figure 3). Pour un débit constant unidimensionnel. Pour un volume de contrôle, la loi du moment (M) de quantité de mouvement peut être obtenue :

$$M = \dot{m}(r_2 * c_{u2} - r_1 * c_{u1})$$

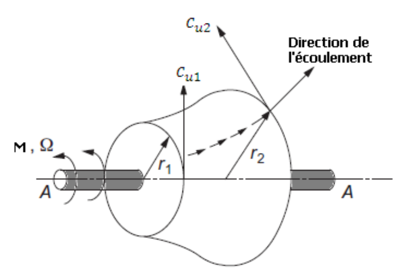

Fig. 3 : schéma du rotor

5 La deuxième loi de la thermodynamique (Notion d'entropie)

La propriété appelée entropie, S, pour un changement d'état fini, est alors définie comme suit :

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Où dQ est la quantité de chaleur transféré au système à une température absolue T.

- Si le processus est réversible (idéal) : $\Delta S = 0$

- Si le processus est irréversible (réel) : $\Delta S > 0$
- Si le processus est adiabatique et réversible (Isentropique) : l'entropie restera inchangée

Étant donné que les turbomachines sont généralement adiabatiques, ou proches de l'adiabatique, une compression ou une détente isentropique représente le meilleur processus possible qui puisse être réalisé. Pour maximiser l'efficacité d'une turbomachine, la production d'entropie irréversible ΔS_{irre} doit être minimisée, et c'est un objectif principal de toute conception.

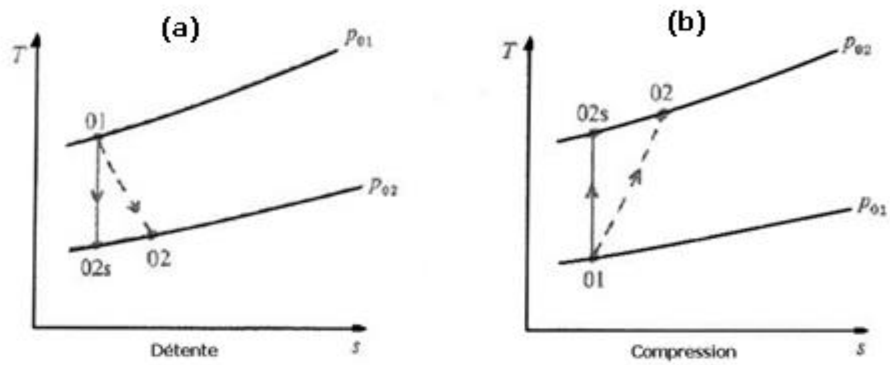

Fig. 4 : Diagrammes T-S pour l'écoulement adiabatique à travers une turbine (a) et un compresseur (b)

References:

S L DIXON - Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery-Butterworth-Heinemann (1998)

S.L. Dixon and Cesare Hall (Auth.) - Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery-Butterworth-Heinemann (2014)

A. T. Sayers - Hydraulic and Compressible Flow Turbomachines-McGraw-Hill Book Co Ltd (1990)