**Rappels mathématiques**

**1) Coordonnées cartésiennes, cylindriques, et sphériques**

* **Coordonnées cartésiennes :** Si le mouvement s’effectue dans l’espace, il est possible de repérer la position de la particule M (x, y, z) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$ à l’aide du vecteur position $\vec{OM}$ ou bien à l’aide des coordonnées cartésiennes (Fig. 1a).
* **Coordonnées cylindriques :** Si la trajectoire est spatiale, où $r$ et oz (Fig. 1b) jouent un rôle particulier dans la détermination de la position du mobile, il est préférable de faire appel aux coordonnées cylindriques (r,$ θ$, z). $r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ et$ θ=arctan\left({y}/{x}\right)$.
* **Coordonnées sphériques :** *(x = r cos φ sin θ, y = r sin φ sin θ, z = r cos θ)* avec 0 ≤ θ ≤ π et −π ≤ φ ≤ π, voir (Fig. 1c).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. système de coordonnées cartésiennes
 | 1. système de coordonnées cylindriques
 | 1. système de coordonnées sphériques
 |

**Fig.1 : représentation d’un point dans différents système**

**2) Produits**

* **Produit scalaire**

Le produit scalaire de deux vecteurs **r1 (x1, y1, z1) et r2 (x2, y2, z2)** est noté$\vec{ r\_{1}}· \vec{r\_{2}}$. C’est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. $\vec{ r\_{1}}· \vec{r\_{2}}=x\_{1}x\_{2}+y\_{1}y\_{2}+z\_{1}z\_{2}$,$ ou \vec{ r\_{1}}· \vec{r\_{2}}$**=**$\left|\vec{ r\_{1}}\right|\left|\vec{ r\_{2}}\right|\cos(α)$

On retiendra la propriété importante : deux vecteurs orthogonaux $ r\_{1}$ et r2 ont un produit scalaire nul $\vec{ r\_{1}}· \vec{r\_{2}}=0$.

* **Produit vectoriel**

Le produit vectoriel est une opération vectorielle (dans des espaces euclidiens orientés) de dimension 3. Le produit vectoriel de deux vecteurs r1 et r2 est noté$\vec{ r\_{1}}Λ \vec{r\_{2}}$**.**

$$\vec{ r\_{1}}Λ \vec{r\_{2}}=\left(\begin{array}{c}y\_{1}z\_{2}-z\_{1}y\_{2}\\z\_{1}x\_{2}-x\_{1}z\_{2}\\x\_{1}y\_{2}-y\_{1}x\_{2}\end{array}\right)$$

$$\left|\vec{ r\_{1}}Λ \vec{r\_{2}}\right|=\left|\vec{ r\_{1}}\right|\left|\vec{ r\_{2}}\right|\sin(α)$$

**3) Calcul des volumes**

Le calcul des volumes nécessite de calculer un volume infinitésimal selon le système de coordonnées choisi :

– coordonnées cartésiennes : *dV = dx dy dz* ;

– coordonnées cylindriques : *dV = rdr dθdz* ;

– coordonnées sphériques : *dV = r2sin θdr dθ dφ*.

**4) Quelques opérateurs**

On donne les expressions suivantes des opérateurs mathématiques : gradient, divergence, rotationnel, et le Laplacien, en coordonnées scalaires dans un espace à trois dimensions.

* **Opérateur gradient**

L’opérateur gradient (aussi appelé nabla) transforme un champ scalaire (f) en un champ vectoriel (la flèche du vecteur se trouve sur l’opérateur gradient) : $\vec{grad}f$ ou $\vec{∇}f$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Expression en coordonnées cartésiennes | Expression en coordonnées cylindriques | Expression en coordonnées sphériques |
| $$\vec{∇}f=\vec{grad}f=\left(\begin{array}{c}\begin{array}{c}\frac{∂f}{∂x}\\\frac{∂f}{∂y}\end{array}\\\frac{∂f}{∂z}\end{array}\right).\vec{e}\_{i}$$ | $$\vec{∇}f=\vec{grad}f=\left(\frac{1}{r}\begin{array}{c}\begin{array}{c}\frac{∂f}{∂r}\\\frac{∂f}{∂θ}\end{array}\\\frac{∂f}{∂z}\end{array}\right).\vec{e}\_{i}$$ | $$\vec{∇}f=\vec{grad}f=\left(\frac{1}{r}\begin{array}{c}\begin{array}{c}\frac{∂f}{∂r}\\\frac{∂f}{∂θ}\end{array}\\\frac{1}{r.sinθ}\frac{∂f}{∂φ}\end{array}\right).\vec{e}\_{i}$$ |

* **Opérateur divergence**

La divergence d’un champ vectoriel $\vec{F}$ est un scalaire défini par :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Expression en coordonnées cartésiennes | * Expression en coordonnées cylindriques
 | Expression en coordonnées sphériques |
| $$div\vec{F}=\vec{∇}.\vec{F}=\frac{∂F\_{x}}{∂x}+\frac{∂F\_{y}}{∂y}+\frac{∂F\_{z}}{∂z}$$ | * $div\vec{F}=\vec{∇}.\vec{F}=\frac{1}{r}\frac{∂rF\_{r}}{∂r}+\frac{1}{r}\frac{∂F\_{θ}}{∂θ}+\frac{∂F\_{z}}{∂z}$
 | $$div\vec{F}=\vec{∇}.\vec{F}=\frac{1}{r^{2}}\frac{∂\left(r^{2}F\_{r}\right)}{∂r}+\frac{1}{rsinθ}\frac{∂sinθ F\_{θ}}{∂θ}+\frac{1}{rsinθ}\frac{∂F\_{φ}}{∂φ}$$ |

Où $\vec{F }=(F\_{x}, F\_{y}, F\_{z}) $désigne le champ de vecteurs auquel est appliqué l'opérateur divergence.

* **Opérateur rotationnel**

Le rotationnel transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Expression en coordonnées cartésiennes | Expression en coordonnées cylindriques | Expression en coordonnées sphériques |
| $$\vec{rot}\vec{F}=\vec{∇}\^\vec{F}=\left[\begin{array}{c}\frac{∂F\_{z}}{∂y}-\frac{∂F\_{y}}{∂z}\\\frac{∂F\_{x}}{∂z}-\frac{∂F\_{z}}{∂x}\\\frac{∂F\_{y}}{∂x}-\frac{∂F\_{x}}{∂y}\end{array}\right].\vec{e}\_{i}$$ | $$\vec{rot}\vec{F}=\vec{∇}\^\vec{F}=\left[\begin{array}{c}\frac{1}{r}\frac{∂F\_{z}}{∂θ}-\frac{∂F\_{θ}}{∂z}\\\frac{∂F\_{r}}{∂z}-\frac{∂F\_{z}}{∂r}\\\frac{1}{r}\left(\frac{r ∂F\_{θ}}{∂r}-\frac{∂r F\_{r}}{∂θ}\right)\end{array}\right].\vec{e}\_{i}$$ | $$\vec{rot}\vec{F}=\vec{∇}\^\vec{F}=\left[\begin{array}{c}\frac{1}{rsinθ}\left(\frac{∂sinθ F\_{φ}}{∂θ}-\frac{∂F\_{θ}}{∂φ}\right)\\\frac{1}{rsinθ}\left(\frac{∂F\_{r}}{∂φ}-\frac{∂rsinθ F\_{φ}}{∂r}\right)\\\frac{1}{r}\left(\frac{ ∂\left(r F\_{θ}\right)}{∂r}-\frac{∂F\_{r}}{∂θ}\right)\end{array}\right].\vec{e}\_{i}$$ |

* **Opérateur Laplacien**

Le dernier opérateur est le Laplacien, noté Δ (delta), soit encore :

* **Laplacien scalaire:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Expression en coordonnées cartésiennes$$∆f\left(x, y, z\right)=∇.∇f=$$$$\frac{∂^{2}f}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}f}{∂y^{2}}+\frac{∂^{2}f}{∂z^{2}}$$ | Expression en coordonnées cylindriques$$∆f\left(x, y, z\right)=∇.∇f=$$$$\frac{1}{r}\frac{∂}{∂r}\left(r\frac{∂f}{∂r}\right)+\frac{1}{r^{2}}\frac{∂^{2}f}{∂θ^{2}}+\frac{∂^{2}f}{∂z^{2}}$$ | Expression en coordonnées sphériques$$∆f\left(x, y, z\right)=∇.∇f=$$$$\frac{1}{r^{2}}\frac{∂}{∂r}\left(r^{2}\frac{∂f}{∂r}\right)+\frac{1}{r^{2}sinθ}\frac{∂}{∂θ}\left(sinθ\frac{∂f}{∂θ}\right)+\frac{1}{r^{2}sin^{2}θ}\frac{∂^{2}f}{∂φ^{2}}$$ |

* **Laplacien vectoriel:**

$$\vec{∆} \vec{F}=\vec{∇}^{2} \vec{F}=\left(\frac{∂^{2}}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}}{∂y^{2}}+\frac{∂^{2}}{∂z^{2}}\right).\left(\begin{array}{c}F\_{x}\\F\_{y}\\F\_{z}\end{array}\right).\vec{e}\_{i}=\left[\begin{array}{c}\frac{∂^{2}F\_{x}}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}F\_{x}}{∂y^{2}}+\frac{∂^{2}F\_{x}}{∂z^{2}}\\\frac{∂^{2}F\_{y}}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}F\_{y}}{∂y^{2}}+\frac{∂^{2}F\_{y}}{∂z^{2}}\\\frac{∂^{2}F\_{z}}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}F\_{z}}{∂y^{2}}+\frac{∂^{2}F\_{z}}{∂z^{2}}\end{array}\right].\vec{e}\_{i}=\left[\begin{array}{c}∆F\_{x}\\∆F\_{y}\\∆F\_{z}\end{array}\right].\vec{e}\_{i}$$