جامعة احمد زبانة بغليزان

AHMED ZABANA UNIVERSITY OF RELIZANE

Université de Ahmed ZABANA -Relizane–Faculté des Sciences et Technologie
Département de Génie Electrique

Systèmes non linéaires

Chapitre 2 : Plan de phase

Master I « Automatique et Système »

Année 2021/2022

Plan

- Systèmes du second ordre.
- Construction du portrait de phase.
- Elimination du temps implicite / explicite.
- Méthode des isoclines.
- Oscillateur de Van der Pol.
- Rappel systèmes linéaires : caractérisation des orbites par les valeurs propres. Index des points singuliers.
- Le théorème de l'index.
- Le théorème de Poincaré-Bendixson.
- La condition de Bendixson.

Systèmes du second ordre

Introduction

- La méthode du plan de phase a été une des premières techniques utilisée pour l'étude des solutions des équations différentielles non linéaires. Son principal inconvénient est qu'elle ne peut être appliquée qu'`a des équations du second ordre. De plus, étant une méthode graphique, elle peut être parfois fastidieuse, particulièrement pour les équations comportant des non linéarités polynomiales. Toutefois, une interprétation graphique est toujours souhaitable afin de mieux comprendre le comportement d'un système.
- Cette méthode graphique pour l'étude des systèmes du second ordre fut introduite par H. Poincaré. L'idée de base est de générer dans l'espace d'état d'un système dynamique du second ordre, (plan de phase), les trajectoires du mouvement, (solutions des équations non linéaires), correspondant `a des conditions initiales variées, et d'en examiner alors les caractéristiques qualitatives.
- On considère des systèmes du second ordre, c'est `a dire régis par une équation différentielle du second ordre. $f(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = 0$
- On peut associer à cette équation différentielle une représentation d'état d'ordre 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Systèmes du second ordre

Dentitions

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad et \quad \dot{X} = \frac{dX}{dt} \end{cases} \qquad (1)$$

1. Si *F* est fonction de *X* seulement, *F(X)*, le système est dit *autonome* .

2. Si *F* est fonction explicite du temps, *F(t,X)*, le système est dit *non autonome* .

3. *F* est appelé *un champ de vecteurs* .

4. Le plan R^2 est appelé *plan de phase* .

5. Tout point X de R^2 tel que $F(X) = 0$ est appelé *point Fixe*, *point critique* ou encore *point d'équilibre* .

6. Les solutions de (1) représentées dans l'espace $I \times R^2$ sont appelés *trajectoires* .

7. Les solutions de (1) représentées dans le plan de phase sont appelées *orbites*.

8. Le portrait de phase est l'ensemble des orbites dans *le plan de phase* .

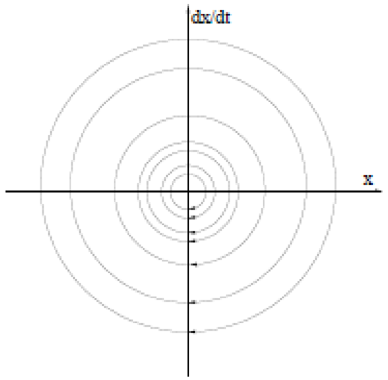
Systèmes du second ordre

Exemple:

- Soit l’équation différentielle modélisant le mouvement d’un ressort de raideur 1 et de $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$

A partir d’une position initiale x0, l’évolution de la position et de la vitesse est donnée parles équations paramétriques:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 cos(t) \\ \dot{x}(t) = -x_0 sin(t) \end{cases}$$



ce qui conduit a` une équation de la trajectoire dans le plan $(x, \dot{x})$

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2$$

qui est l’équation d’un cercle dépendant de la condition initiale x_0, voir figure

Construction pratique des trajectoires de phase

- ✓ Une figure approximative du portrait de phase peut être donnée en traçant des trajectoires à partir d'un grand nombre de conditions initiales différentes.
- ✓ Il existe de nombreuses méthodes de construction des trajectoires de phase pour les systèmes linéaires ou non linéaires.
  - Méthode analytique.
  - Méthode des isoclines.
  - Méthode delta.
  - Méthode de Liénard.
  - Méthode de Pell.
- ***La méthode analytique :*** *utilise la solution analytique des équations différentielles décrivant le système. C'est donc une méthode d'utilisation limitée.*
- ***La méthode des isoclines :*** *est une méthode purement graphique qui est un bon complément de la précédente pour les systèmes pour lesquels on ne dispose pas d'une solution analytique.*

Construction pratique des trajectoires de phase

La méthode analytique

Il existe deux techniques pour générer analytiquement les trajectoires de phase. Toutes deux conduisent à une relation fonctionnelle entre les variables de phase (x_1, x_2) du type:

$$g(x_1, x_2, c) = 0$$

Première technique: A partir des équations d'état

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

on obtient les solutions pour les variables de phase sous forme de courbes paramétrées:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(t) \\ x_2 = g_2(t) \end{cases}$$

Des quelles on élimine la variable temps pour obtenir l'équation de la trajectoire dans le plan de phase $g(x_1, x_2, c) = 0$

Construction pratique des trajectoires de phase

Deuxième technique:

On élimine directement le temps en posant:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

puis l'on résout cette équation différentielle, quand elle est a` variables séparables, pour obtenir la relation fonctionnelle $g(x_1, x_2, c) = 0$

Cette technique est évidemment limitée par le type de non linéarité rencontrée. Toutefois, elle est particulièrement utilisée pour les systèmes linéaires par morceaux.

Construction pratique des trajectoires de phase

La méthode des isoclines

L'idée principale réside dans le mot isocline.

Définition :*Une isocline est une courbe dans le plan de phase définie comme le lieu des points des trajectoires de phase de pente α donnée.*

$$s(x_1,x_2) = s(x) = \alpha = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}$$

On remarque en effet que la tangente `a la trajectoire passant par le point (x_1, x_2) a pour pente :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}$$

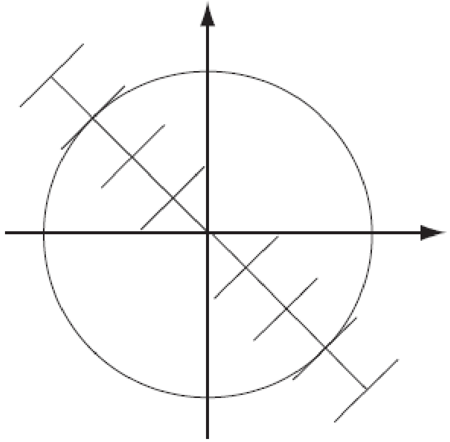
L'équation $s(x) = \alpha$ définit la courbe isocline dans le plan (x_1, x_2) le long de laquelle les tangentes `a la trajectoire de phase ont une pente $\alpha$. La procédure consiste à tracer la courbe isocline dans le plan de phase et `a tracer le long de cette courbe, de courts segments de droite de pente α Ces segments sont parallèles et leur direction est déterminée par le signe de $f_1(x), f_2(x)$, au point x. On répété ensuite la procédure pour différentes valeurs de la constante a.

Une fois le plan de phase rempli d'isoclines, à partir d'un point initial donné x_0, on construit la trajectoire partant de x_0 et reliant les segments entre eux.

Construction pratique des trajectoires de phase

Exemple:

Soit le système non linéaire donné par:



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -sin(x_1) \end{cases} \quad alors \quad s(x) = \frac{-sin(x_1)}{x_2} = \alpha$$

d’ou l’on peut déduire que les isoclines sont définies par les sinusoïdes paramétrées:

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha} sin(x_1)$$

***Nota:** Pour utiliser la méthode des isoclines, il est nécessaire que l’échelle en x_1 et en x_2 soit la même.*

Comportement qualitatif: étude des points singuliers

Définition

Un point singulier est un point d'´équilibre dans le plan de phase encore appelé point stationnaire. Un point d'´équilibre est défini par $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. On obtient donc les points d'équilibre en résolvant les ´équations non linéaires algébriques:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Les points d'équilibre d'un système du second ordre sont appelés points singuliers, du fait que si l'on désire calculer la pente en tout point de la trajectoire de phase, celle-ci est donnée par:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

En un point d'équilibre, cette pente n'est donc pas définie et plusieurs trajectoires peuvent se croiser en un même point.

Comportement qualitatif: étude des points singuliers

Exemple:

Soit le système gouverné par l'équation différentielle:

$$\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

que l'on peut réécrire sous forme d'équations d'état:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0.6x_2 - x_1(x_1 + 3) \end{cases}$$

Les points singuliers sont obtenus par la résolution des équations:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -0.6x_2 - x_1(x_1 + 3) = 0 \end{cases}$$

soit les deux points (0,0) et (-3,0)

Comportement qualitatif: étude des points singuliers

Cas des systèmes linéaires

Un système linéaire autonome s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases} \quad soit \quad \dot{x} = Ax \quad avec \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et possède un point d'équilibre unique, *x* 0, l'origine du plan de phase. La solution de l' équation $\dot{x} = Ax$ pour une condition initiale donnée par x_0 s'écrit:

$$x(t) = Me^{J_r t}M^{-1}x_0$$

où J_r est la forme de Jordan réelle de *A* et *M* est la matrice non singulière de passage vérifiant: $M^{-1}AM = J_r$. Suivant la nature des valeurs propres de A, J_r peut prendre différentes formes

Comportement qualitatif: étude des points singuliers

Premier cas: Forme diagonale

$$J_r = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- Pour $z = Mx$ alors: $$\begin{cases} z_1(t) = e^{\lambda_1 t} z_{10} \\ z_2(t) = e^{\lambda_2 t} z_{20} \end{cases}$$

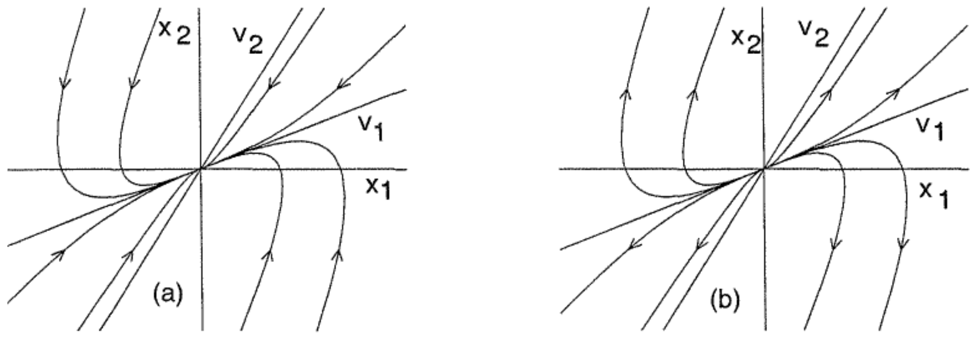
- ✓ Eliminant le temps entre les deux équations, on obtient l'équation de la courbe dans le plan de phase:

$$z_2(t) = \frac{z_{20}}{z_{10}^{\lambda_2/\lambda_1}} z_1^{\lambda_2/\lambda_1}(t)$$

- ✓ La forme des courbes de phases obtenues va ainsi dépendre du signe respectif des valeurs propres λ_1 et λ_2.

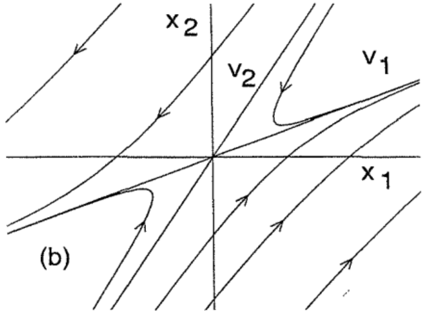
1. λ_1 et λ_2 de même signe > 0 *ou* > 0

Le point d'équilibre est un **nœud stable ou instable.**



1. λ_1 et λ_2 de signe opposé

Le point d'équilibre est un **point selle**.



Comportement qualitatif: étude des points singuliers

Deuxième cas: Forme complexe conjuguée

$$J_r = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

- En coordonnées polaires $r(t) = \sqrt{z_1^2(t) + z_2^2(t)}$, $\theta(t) = arctg\left[\frac{z_2(t)}{z_1(t)}\right]$ l'équation de la trajectoire est donnée par:

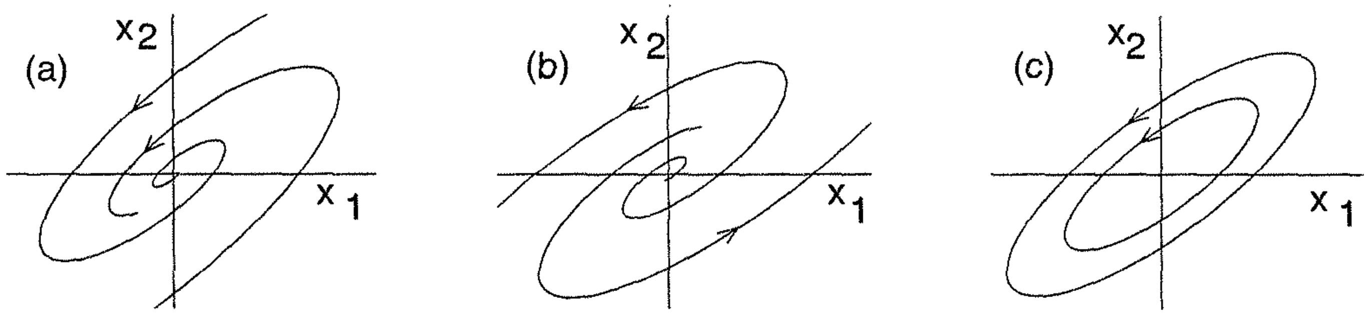
$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \theta_0 + \beta t \end{cases}$$

ce qui définit une spirale logarithmique.

Le point d'équilibre est un **foyer stable** ou **instable**.

Cas particulier: $\alpha = 0$

Le point d'équilibre est un **centre**.



Comportement qualitatif: étude des points singuliers

Cas non linéaire - Comportement local

- ✓ En examinant le portrait de phase du système non linéaire donne comme l'Exemple précédent, on peut constater que dans le voisinage des deux points d'équilibre, le comportement du système s'identifie à celui d'un système linéaire, foyer stable pour (0,0) et point selle pour (-3,0) .
- ✓ Ces observations faites dans un cas particulier peuvent être généralisées et le comportement qualitatif d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre peut être déterminé par linéarisation autour de ce point. Ces résultats sont donc valides **localement**.

Comportement qualitatif: étude des points singuliers

Principe de la méthode :

Soit $X_e \sim (\alpha, \beta)$ point d'´équilibré d'un système non linéaire donné par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

✓ La procédure se décompose en trois étapes:

❖ Changement de coordonnées:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - \alpha \\ X_2 = x_2 - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = F_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 = F_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX$$

❖ Linéarisation:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(X_1,X_2)}{\partial X_1}_{|0} & \frac{\partial F_1(X_1,X_2)}{\partial X_2}_{|0} \\ \frac{\partial F_2(X_1,X_2)}{\partial X_1}_{|0} & \frac{\partial F_2(X_1,X_2)}{\partial X_2}_{|0} \end{pmatrix}$$

est **la matrice Jacobéenne** de $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ évaluée au point $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

.

l'index

- ✓ L’index est une propriété topologique des systèmes en rapport avec une région déterminée du plan de phase. Elle est invariante pour des petites perturbations continues du système considère. Cette propriété permet, entre autres, d’´établir des conditions nécessaires pour l’existence de cycles limites.

Définition : *(Index en un point du plan de phase). Trois choix sont effectues :*

1. Une courbe autour du point auquel l’index est évalue. Cette courbe est choisie de manière arbitraire, mais comprise dans un disque de taille suffisamment petite. Théoriquement, le disque est de taille infinitésimale.

2. Une paramétrisation de la courbe dans le sens trigonométrique positif.

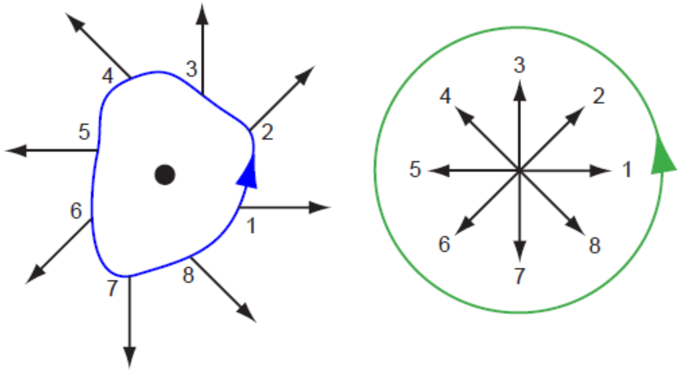
3. Une suite arbitraire de points de la courbe dans le sens de la paramétrisation. Les points sont alors numérotes selon cette progression (x_i, $i = 1, . . . , n$). Le dernier point x_n correspond au point initial x_1 ($x_1 = x_n$). En chacun des points choisis x_i, $i = 1, . . . n$, le vecteur $f(x_i)$, correspondant au système $\dot{x} = f(x)$, est ´évalue. On obtient ainsi une suite de vecteurs $f_i = f(x_i)$. numérotes de $i = 1$ à $i = n$. Les vecteurs sont ensuite reportés sur un autre espace de telle sorte que leurs origines se confondent. L’index mesure alors l’angle modulo 2π que l’extrémité des vecteurs f_i parcourent dans le sens trigonométrique positif.

L’index est indépendant à la fois de la courbe choisie (pour autant quelle soit comprise dans un disque de taille suffisamment petite), des points choisis x_i et de leur nombre n.

Index

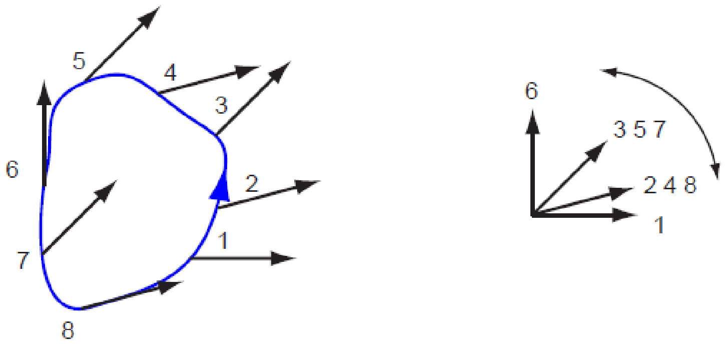
Exemple

Index $+1$



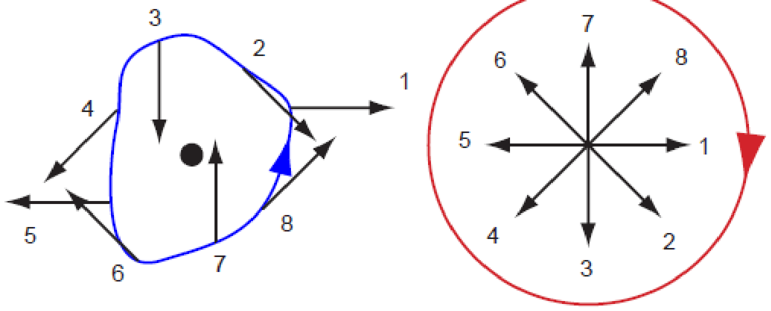
$\theta = 2k\pi, k = +1$

Index 0



$\theta = 0$

Index -1



$\theta = 2k\pi, k = -1$

Théorème de l'index

Théorème *(Th. de l'index de Poincaré) Soit* $\boldsymbol{N}$ *le nombre de nœuds, centres et de foyers et* $\boldsymbol{S}$ *le nombre de points selles. Si un cycle limite existe, les points singuliers (points* x_e *tels que* $f(x_e) = 0$*) que le cycle encercle sont tels que* $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{S} + \mathbf{1}$.

Théorème *(Sommation des index) Soit une courbe particulière donnée. L'index de cette courbe est la somme des index de tous les points d'équilibre compris à l'intérieur de cette courbe.*