Université de Relizane **2021-2022**

1er année: Mathématiques et Informatique **Algèbre II**

TD 1
Structures algébriques

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1) Montrer que $*$ est commutative, associative, et admet un élément neutre.
2) Déterminer les éléments symétrisables.

Exercice 2

Montrer que $(G; *)$ est un groupe, et préciser s'il est abélien (commutatif) :
$G =]-1; 1[$ et $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Exercice 3

On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition définie par

$$x * y = x + y - xy$$

. Cette loi est-elle associative, commutative ? Admet-elle un élément neutre ? Un réel x admet-il un inverse pour cette loi ?

Exercice 4

Soit $(G; \cdot)$ un groupe. Démontrer que les parties suivantes sont des sous-groupes de G :
1) $C(G) = \{x \in G / \ \forall y \in G, \ x \cdot y = y \cdot x\}$, $C(G)$ s'appelle le centre de G;
2) $a \cdot H \cdot a^{-1} = \{a \cdot h \cdot a^{-1}, \ h \in H\}$ où $a \in G$ et H est un sous-groupe de G

Exercice 5

Les applications suivantes sont elles des homomorphismes de groupes?
1) $f : (\mathbb{R}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times), \ \ x \longrightarrow x^n, \ n \in \mathbb{N}^*$.
2) $g : (\mathbb{C}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}^*_+, \times), \ \ z \longrightarrow |z|$.