

Chapitre 2

Systemes d'equations lineaires

L'une des nombreuses applications des déterminants est la résolution des systèmes linéaires

Généralités

Définition On appelle système de m équations linéaires à n inconnues et à coefficients dans un K , tout système de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

($m = n$, $m > n$ ou $m < n$), où les x_j sont les inconnues, les a_{ij} et les b_i sont des éléments de K .

Appellations :

- 1) On appelle solution du système (S) tout élément $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vérifiant (S) .
- 2) On appelle système homogène associé à (S) le système tiré de (S) avec $b_i = 0, i = 1, \dots, m$.

Remarque Un tel système homogène (S_h) possède au moins la solution $(0, 0, \dots, 0)$ dite solution triviale

Définition On dit que deux systèmes linéaires sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Théorème Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit à une seule solution, soit à une infinité de solutions.

Notation matricielle

Peut s'écrire sous la forme matricielle : $(S) \Leftrightarrow AX = B$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

A est la matrice associée au système (S)

Exemple Soit $(S) \begin{cases} 2x + y + 5z = 10 \\ x - 3y - 7z = 5 \\ x - z = 11 \end{cases}$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Les méthodes de résolutions d'un système linéaire

a) Méthode de Cramer

Le système (S) est dit de Cramer si et seulement si A est carrée et inversible c'est-à-dire $\det A$ est non nul. Dans ce cas, (S) admet une unique solution donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A}$$

c'est les formules de Cramer.

Exemple Résoudre le système linéaire suivant : (S) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + 4y - 3z = 3 \\ -2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

On a $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\det A = 20 \neq 0$ donc (S) est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{20} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{20} = 2 \quad \text{et} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{20} = 3$$

donc (1; 2; 3) est une solution unique de ce système.

Remarque : si $AX = 0$ alors $X = 0$ est la solution unique du système de Cramer

b) Méthode de la matrice inverse

Soit (S) un système carré, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$.

Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par la méthode de la matrice inverse comme suit :

On a
$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Exemple Résoudre $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16 \\ 3x - 2y + 4z = -7 \\ x + y - z = 6. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\det A = 24 \neq 0$ alors A est inversible.

$$\text{com } A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{com } A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ 22 & -29 & -31 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{com } A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com } A)^t = \begin{pmatrix} -\frac{2}{24} & \frac{4}{24} & \frac{22}{24} \\ \frac{7}{24} & -\frac{2}{24} & -\frac{29}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{2}{24} & -\frac{31}{24} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{24} & \frac{4}{24} & \frac{22}{24} \\ \frac{7}{24} & -\frac{2}{24} & -\frac{29}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{2}{24} & -\frac{31}{24} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{24} \times 16 + \frac{4}{24} \times (-7) + \frac{22}{24} \times 6 \\ \frac{7}{24} \times 16 - \frac{2}{24} \times (-7) - \frac{29}{24} \times 6 \\ \frac{5}{24} \times 16 + \frac{2}{24} \times (-7) - \frac{31}{24} \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

alors $(3; -2; -5)$ est une solution unique de ce système.

Les opérations élémentaires

Définition Soit (S) un système linéaire de m équations, n inconnues et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les équations de (S) .

On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes :

- Multiplier une équation L_i par un scalaire non nul α .

Cette opération est notée : $L_i \rightarrow \alpha L_i$

-Ajouter à l'une des équations L_i un multiple d'une autre équation L_j .

Cette opération est notée : $L_i \rightarrow L_i + \beta L_j$.

-Echanger deux équation L_i et L_j : Cette opération est notée : $L_i \xleftrightarrow{\leftarrow} L_j$.

c) Méthode de Gauss

Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système (S') équivalent et dont la matrice est triangulaire supérieure.

Exemple

Soit le système linéaire
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

1. Résolution par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = 0 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_3 + 36x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 0 \end{cases}$$

Donc $x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 1.$

2. Résolution par la méthode de Gauss en écriture matricielle :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{array} \right)$$

Donc $x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 1.$

Exercice Résoudre par méthode de Gauss le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x - y + z = 3 \\ -x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

Solution : (15; 4; -8) est la solution unique du système. (faites les calculs)

Le cas général

Soit (S) le système suivant :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

Comment résoudre (S) ?

On extrait de (S) le système (S') suivant :

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 - (a_{1,k+1}x_{k+1} + a_{1,k+2}x_{k+2} + \dots + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 - (a_{2,k+1}x_{k+1} + a_{2,k+2}x_{k+2} + \dots + a_{2n}x_n) = b'_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k = b_k - (a_{k,k+1}x_{k+1} + a_{k,k+2}x_{k+2} + \dots + a_{kn}x_n) = b'_k \end{cases}$$

$$(S') \Leftrightarrow MX' = B' \text{ avec } X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_k \end{pmatrix} \text{ et } M \text{ une matrice carrée d'ordre } k \text{ telle que}$$

$\det M \neq 0$.

(S') est donc un système de Cramer, qui a pour solution unique X' telle que :

$$x_1 = \frac{\det M_1}{\det M}, x_2 = \frac{\det M_2}{\det M}, \dots, x_k = \frac{\det M_k}{\det M}$$

où M_j sont les matrices obtenues en remplaçant la colonne j dans M par la colonne b' .

1^{er} cas : Si le vecteur $X = \left(\frac{\det M_1}{\det M}, \frac{\det M_2}{\det M}, \dots, \frac{\det M_k}{\det M}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n \right)$ vérifie le système (S) alors X est solution de (S).

2^{ème} cas : sinon (S) n'a pas de solutions.

Exemple Soit le système $(S) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 5 \\ x - 5y = -11 \dots \dots \dots (3) \end{cases}$

On a $m = 3, n = 2$

On extrait de (S) le système (S') suivant : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

on trouve $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $b' = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\det M = -13 \neq 0$, par méthode de Cramer on obtient :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{29}{13} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{11}{13}$$

Alors (S') admet une unique solution $(x, y) = \left(\frac{29}{13}, \frac{11}{13}\right)$. La solution $\left(\frac{29}{13}, \frac{11}{13}\right)$ ne vérifie pas l'équation $x - 5y = -11$. Donc le système (S) n'admet pas de solutions.

Exemple Soit le système $(S) \begin{cases} 3x + 2y + 2z - t = 0 \\ 4x - y - 5z + 2t = 0 \\ 2x + 5y + 9z - 4t = 0. \dots \dots (3) \end{cases}$

On a $m = 3, n = 4$

Tous les déterminants d'ordre 3 extraits de la matrice associée au système (S) sont nuls.

On extrait de (S) le système (S') suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = -2z + t \\ 4x - y = 5z - 2t \end{cases}$

on trouve $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $b' = \begin{pmatrix} -2z + t \\ 5z - 2t \end{pmatrix}$, $\det M = -11 \neq 0$, par méthode de Cramer on

obtient : $x = \frac{\begin{vmatrix} -2z+t & 2 \\ 5z-2t & -1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{1}{11}(8z - 3t)$ et $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2z+t \\ 4 & 5z-2t \end{vmatrix}}{-11} = \frac{1}{11}(-23z + 10t)$.

On remplace dans la troisième équation (3)

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 9z - 4t &= \frac{2}{11}(8z - 3t) + \frac{5}{11}(-23z + 10t) + 9z - 4t \\ &= \frac{16}{11}z - \frac{6}{11}t - \frac{115}{23}z + \frac{50}{11}t + 9z - 4t \\ &= \left(\frac{16}{11} - \frac{115}{11} + 9\right)z + \left(-\frac{6}{11} + \frac{50}{11} - 4\right)t \\ &= 0 \quad \forall z, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc le système (S) admet une infinité de solutions

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{11}(8z - 3t), \frac{1}{11}(-23z + 10t), z, t \right) \right\} \quad z, t \in \mathbb{R}.$$