

Comportement Mécanique des Matériaux Composites et Multi-
Matériaux
-S2- MI GM

CHAPITRE 2

Approche classique des composites : spécificité du calcul des composites

Une structure composite stratifiée consiste en un système de couches liées ensemble. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux isotropes ou anisotropes, et avoir des structures, des épaisseurs et des propriétés mécaniques différentes. Les caractéristiques du stratifié sont généralement calculées en utilisant les informations concernant le nombre de couches, leur séquence d'empilement, les propriétés géométriques et mécaniques qui doivent être connues. Un nombre fini de couches peut être combiné pour former de stratifiés. Le stratifié est caractérisé par 21 coefficients.

Ainsi, notre objectif est de fournir des équations permettant de prédire le comportement d'un stratifié en tant que système de couches avec des propriétés données. La seule restriction imposée au stratifié en tant qu'élément d'une structure composite concerne son épaisseur totale qui est supposée bien inférieure aux autres dimensions de la structure.

Rappel

a) État de contrainte tridimensionnelle en un point

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une coupure du solide, par une surface S , en deux parties A et B (Fig. 2.1)

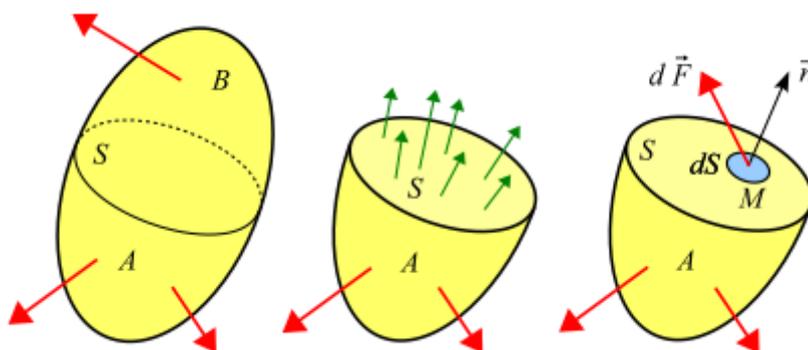


Fig. 2.1 Coupure et facette \vec{n} en M

La partie A, par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S . Soit dS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et \vec{n} le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S et dirigé vers l'extérieur de la partie A. Nous appellerons cet ensemble facette \vec{n} en M . Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M , la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

Remarque : une contrainte s'exprime en pascal (1 Pa = 1N/m²) ; dans la pratique, on utilise souvent le méga pascal (1MPa = 10⁶Pa = 1N/mm²)

Considérons, en un point M, le cylindre infiniment petit d'axe \vec{n} , de hauteur h et de section dS (Fig. 2.2).

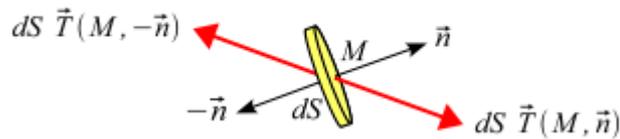


Fig. 2.2 Efforts sur les facettes \vec{n} et $-\vec{n}$

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant \vec{n} et sa projection sur la facette (Fig. 2.3) :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

σ_n est la contrainte normale et $\vec{\tau}_n$ est le vecteur cisaillement ou contrainte tangentielle. σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

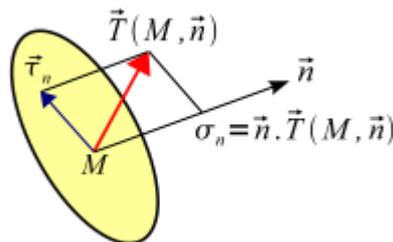


Fig. 2.3 Vecteur contrainte sur la facette \vec{n} en M

Tenseur des contraintes

Considérons le tétraèdre infiniment petit MABC construit sur les axes x, y et z (Fig.2.4). Soient \vec{n} de composantes (n_x, n_y, n_z) la normale unitaire au plan ABC dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et dS l'aire du triangle ABC.

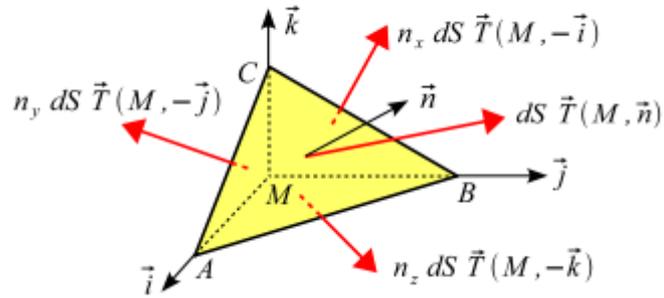


Fig. 2.4 Equilibre du tétraèdre (Cauchy)

On a

$$2dS\vec{n} = 2dSn_x\vec{i} + 2dSn_y\vec{j} + 2dSn_z\vec{k}$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS\vec{T}(M, \vec{n}) = n_x dS\vec{T}(M, \vec{i}) + n_y dS\vec{T}(M, \vec{j}) + n_z dS\vec{T}(M, \vec{k})$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\{\vec{n}\}$$

Où $[\sigma(M)]$ est le **tenseur des contraintes de Cauchy** en M.

Les composantes du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont :

$$\begin{matrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \\ \left\{ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix} \right. & \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Exemple : sur la facette \vec{i} (figure 2.4), le vecteur contrainte est

$$\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k}$$

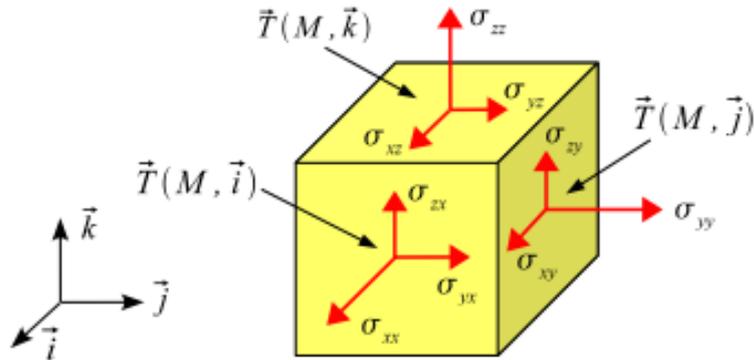


Fig. 2.5 Vecteur contrainte sur les facettes \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} en M

b) Equations d'équilibre

b.1. Equilibre en translation

La projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de côtés dx , dy et dz , est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure ci-dessous :

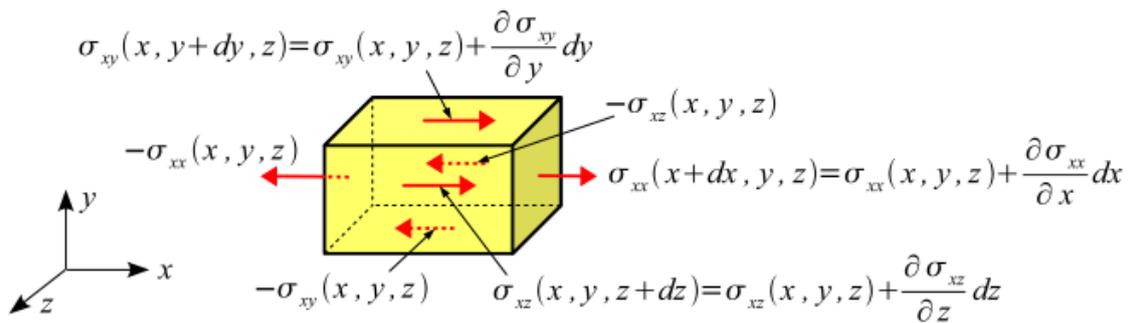


Fig. 2.6 Equilibre du parallélépipède suivant x .

Où $\rho dV = m$ et $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Il vient après simplification :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

b.2. Equilibre en rotation : réciprocity des contraintes tangentielles

La projection sur M_z de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (2.7) :

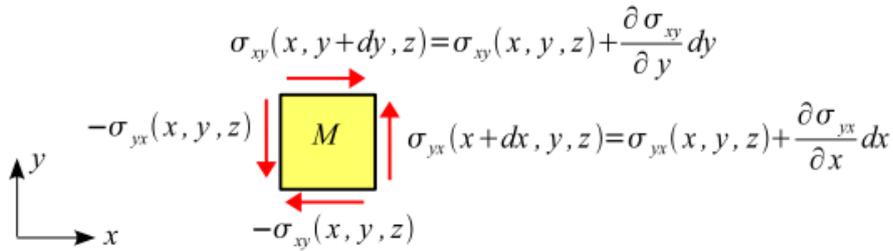


Fig. 2.7 Equilibre du parallélépipède en rotation suivant z

$$dx (dy dz \sigma_{yx}) - dy (dx dz \sigma_{xy}) = 0$$

Soit (réciprocité des contraintes tangentielles) :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

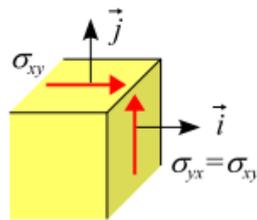


Fig. 2.8 Réciprocité des contraintes tangentielles

De même :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Dans le cas général, la somme des moments est :

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

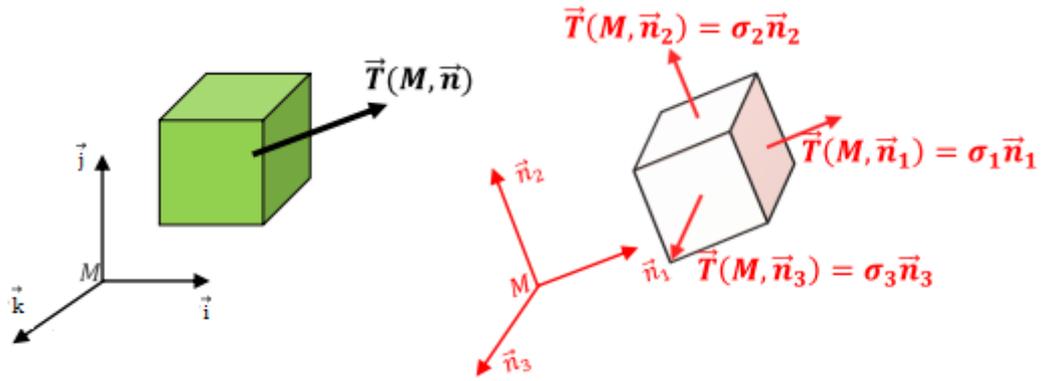
$$\vec{M} = dx\vec{i} \wedge dydz\sigma_{xy}\vec{j} + dx\vec{i} \wedge dydz\sigma_{xz}\vec{k} + dy\vec{j} \wedge dx dz\sigma_{yx}\vec{i} + dy\vec{j} \wedge dx dz\sigma_{yz}\vec{k} + dz\vec{k} \wedge dx dy\sigma_{zx}\vec{i} + dz\vec{k} \wedge dx dy\sigma_{zy}\vec{j}$$

A l'équilibre, on doit avoir $\vec{M} = \vec{0}$, d'où $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

c) État de contrainte tridimensionnel

Les contraintes principales dans un volume, s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



Les valeurs propres de l'équation sont :

$$P = \det[\sigma] - \sigma_n[I] = 0$$

$[I]$ est la matrice identité

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$= -\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

I_1 , I_2 et I_3 sont des invariants du tenseur de contraintes :

$$I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma]^2) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2$$

$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \det[\sigma] = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2$$

$$= \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Exemple

$$\sigma = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 20 \\ 30 & -20 & -10 \\ 20 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 50 - 20 + 10 = 40$$

$$I_2 = (50)(-20) + (-20)(10) + (10)(50) = -21$$

$$I_3 = \det[\sigma] = (50)(-20) + (-20)(10) + (10)(50) = -2.8$$

Etat de contraintes en un point est défini par :

- Le tenseur σ_{ij}
- Les invariants du tenseur de contraintes I_1, I_2 et I_3

Dans le repère $\{M; \vec{n}_1; \vec{n}_2; \vec{n}_3\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette \vec{n}

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$T^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

où n_1, n_2 et n_3 sont les composantes de \vec{n} . Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

on en déduit :

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

On peut déduire que la valeur maximale en M de la contrainte normale est égale :

$$\sigma_{max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

Et du cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2}$$

Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke a été généralisée aux états triaxiaux et aux matériaux anisotropes en écrivant de la manière la plus générale possible, que chaque élément du tenseur des contraintes est une combinaison linéaire de tous les éléments du tenseur :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{où } i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité C, symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général par 21 coefficients indépendants.

La forme matricielle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\epsilon}}$$

La forme inverse

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

Dans ces relations, $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{S}}$ sont des tenseurs de quatrième ordre, dont les composantes sont respectivement les coefficients de rigidité et de souplesse.

Relation déformation-déplacement :

Sous chargement, un milieu élastique subit des déplacements qui varient sur le domaine. Ces déplacements le long des axes de coordonnées x , y et z sont notés respectivement u , v et w . Pour les petites déformations, la forme linéaire suivante des relations déformation-déplacement est vérifiée :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Où ε_x , ε_y et ε_z désignent les déformations normales dans les directions x , y , z , respectivement, et γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} Dénoter les déformations de distorsion.

Relation contrainte-déformation :

En plus des relations déformation-déplacement, la résolution des problèmes d'élasticité nécessite les relations entre les contraintes et les déformations dans le milieu. La relation contrainte-déformation pour un milieu élastique linéaire anisotrope tridimensionnel, également connue sous le nom de loi de Hook, est exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$[C]$ appelé la matrice de rigidité ou matrice des coefficients élastiques.

Matrice de rigidité d'un matériau anisotrope et Nombres de constantes d'élasticité

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité (matrice des coefficients élastiques) est déterminée par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou matériau anisotrope.

La loi de comportement sous forme matricielle s'écrit :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}}$$

Matrice de rigidité d'un matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième. La matrice de rigidité dans ce cas est déterminée par 12 constantes indépendantes.

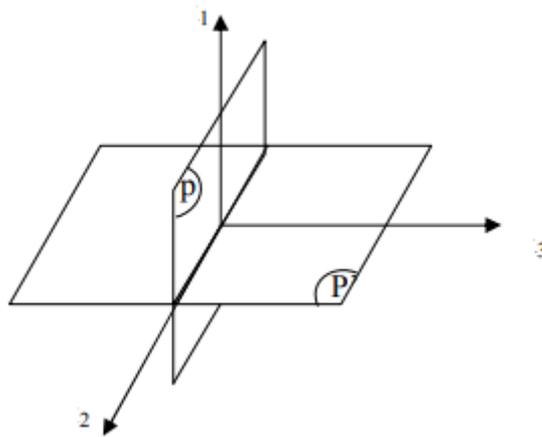


Fig. 2.6 Plans de symétrie d'un matériau orthotrope

La forme de la matrice de rigidité est donc :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

Matrice de rigidité d'un matériau cubique

Pour un matériau élastique homogène isotrope, toutes les directions ont les mêmes propriétés. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux, tel l'acier, le béton etc...

Dans le cas d'un matériau tridimensionnel isotrope, qui a les mêmes propriétés dans toutes les directions

La symétrie de la matrice de rigidité du matériau, $C_{ij} = C_{ji}$, peut être prouvée à partir de l'existence d'une densité d'énergie de déformation U . Lors de la différenciation de la densité d'énergie de déformation, on peut montrer $\partial U / \partial \varepsilon_x = \sigma_x$ et $\partial U / \partial \varepsilon_y = \sigma_y$. Différenciation

supplémentaire des contraintes, σ_x et σ_y , avec par rapport aux souches, ε_x et ε_y , respectivement, donne $\partial\sigma_x/\partial\varepsilon_x = \partial\sigma_y/\partial\varepsilon_y$ d'où l'on peut montrer que $C_{12} = C_{21}$.

En utilisant les propriétés de symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité sous la forme :

$$[D] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Cette forme exprime les contraintes en fonction de déformations. La loi de comportement $\bar{\sigma} = \bar{C}\bar{\varepsilon}$ se réduit à :

$$\bar{\sigma} = \lambda \cdot \text{Trace}(\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{I} + 2\mu \cdot \bar{\varepsilon}$$

Qui s'écrit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

La matrice des coefficients élastiques est égale à :

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Où λ et μ sont appelés les coefficients de Lamé qui dépendent de la particule considérée. Leurs expressions en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson ν sont données comme suit :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \lambda + 2\mu = \frac{E \cdot (1 + \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Ou encore :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

La matrice de rigidité isotrope peut s'écrire également comme suit :

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$C_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad C_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

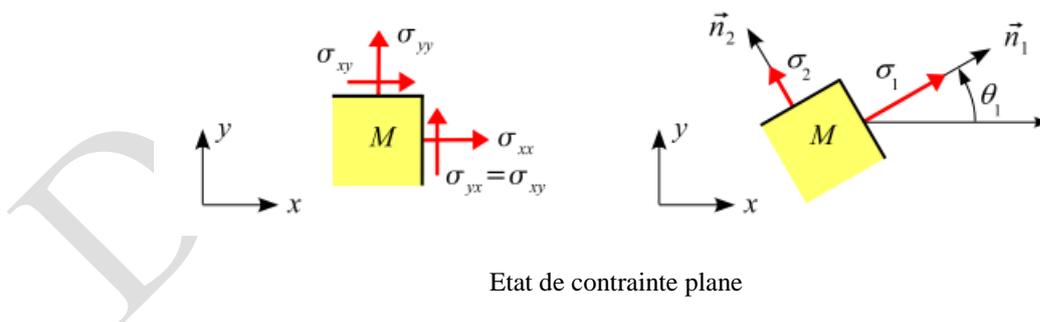
Les termes diagonaux qui relient les déformations de distorsion aux contraintes de cisaillement sont communément appelés module de cisaillement G et sont obtenus en termes de module d'élasticité et de coefficient de Poisson comme :

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

État de contrainte plane

En un point M , l'état de contrainte est dit plan par rapport aux deux directions \vec{i} et \vec{j} (figure 3.11a), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Etat de contrainte plane

Le vecteur contrainte sur la facette \vec{k} est nul :

$$\vec{T}(M, \vec{k}) = \vec{0}$$

La direction \vec{k} est donc direction principale et la contrainte principale associée est nulle :

$$\vec{n}_3 = \vec{k}, \sigma_3 = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

L'application de la loi de HOOKE

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma][I]$$

montre que la matrice des déformations aura la forme :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

La matrice des contraintes est plane, mais celle des déformations ne l'est pas.

Le développement la dernière ligne de la loi de HOOKE permet de calculer ε_z

$$[\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\sigma][I]$$

Or compte tenu de la relation entre les traces des matrices des contraintes et des déformations :

$$\text{tr}[\sigma] = \frac{E}{1-2\nu} \text{tr}[\varepsilon]$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

La déformation ε_z suivant une perpendiculaire au plan des contraintes n'est donc pas indépendante.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} C_{12} & C_{12} - \frac{\nu}{1-\nu} C_{12} & 0 \\ C_{12} - \frac{\nu}{1-\nu} C_{12} & C_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}}_{\{\varepsilon\}}$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\sigma = Q\varepsilon$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad \text{et} \quad Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Où la matrice Q est appelée matrice de rigidité matérielle réduite. Si l'état de contrainte est connu, le champ de déformation en chaque point peut être obtenu à partir de l'inverse de l'équation contrainte-déformation :

$$\varepsilon = S\sigma$$

Où

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}$$

Avec

$$S_{11} = \frac{1}{E}, \quad S_{12} = \frac{1-\nu}{E} \quad \text{et} \quad S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$$

Les S_{ij} dans l'équation ci-dessus sont appelés coefficients de souplesse

d) *Caractéristiques mécaniques des matériaux composites*

➤ **Fractions volumiques et massiques**

Un des facteurs les plus importants qui déterminent les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite est la proportion relative de matrice et de renfort. Cette proportion peut être exprimée soit en fraction volumique, soit en fraction massique. Les fractions massiques sont plus faciles à mesurer lors de l'élaboration des matériaux. Par contre, les fractions volumiques interviennent directement dans les modèles théoriques décrivant le comportement mécanique des matériaux. Il est donc nécessaire de savoir passer de l'une à l'autre de ces fractions. Ces expressions seront établies pour un matériau à deux phases, puis étendues à un matériau à plus de deux phases.

- **Fractions volumiques**

Considérons un volume v_c de matériau composite, composé d'un volume v_f de fibres et d'un volume v_m de matrice. Par la suite, les indices c, f et m seront systématiquement utilisés comme indices respectifs des caractéristiques du matériau composite, des fibres et de la matrice. La fraction volumique des fibres est :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}$$

La fraction volumique de la matrice est :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c}$$

Avec

$$V_m = 1 - V_f$$

Puisque

$$v_c = v_f + v_m$$

- Fractions massiques

Les fractions massiques sont définies de la même manière à partir des masses m_c, m_f, m_m respectives de matériau composite, de fibres et de matrice. Les fractions massiques ou fractions en masse de fibres et de matrice s'écrivent respectivement :

$$M_f = \frac{m_f}{m_c}$$

$$M_m = \frac{m_m}{m_c}$$

$$M_m = 1 - M_f$$

Relations entre fractions volumiques et massiques.

Les relations entre les fractions volumiques et massiques font intervenir les masses volumiques ρ_c, ρ_f, ρ_m respectives de matériau composite, de fibres et de matrice. Les masses et les volumes sont liés par les relations :

$$m_c = \rho_c v_c$$

$$m_f = \rho_f v_f$$

$$m_m = \rho_m v_m$$

La masse totale du matériau composite est :

$$M_c = M_f + M_m$$

Ou

$$\rho_c v_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m$$

La masse volumique du matériau composite s'écrit donc en fonction des fractions volumiques suivant :

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f)$$

De même, en partant du volume total du composite :

$$v_c = v_f + v_m$$

Nous obtenons :

$$\frac{m_c}{\rho_c} = \frac{m_f}{\rho_f} + \frac{m_m}{\rho_m}$$

D'où l'expression de la masse volumique en fonction des fractions massiques :

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m}}$$

Les relations entre fractions massiques et fractions volumiques peuvent maintenant être établies, en partant des relations de définition :

$$M_f = \frac{m_f}{m_c} = \frac{\rho_f v_f}{\rho_c v_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f$$

et

$$M_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m$$

Les relations inverses s'obtiennent de la même manière, soit :

$$V_f = \frac{\rho_c}{\rho_f} M_f$$

$$V_m = \frac{\rho_c}{\rho_m} P_m$$

Où la masse volumique est déterminée cette fois par l'expression :

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{M_f}{\rho_f} + \frac{M_m}{\rho_m}}$$

Les expressions précédentes entre fractions volumiques et fractions massiques peuvent être étendues au cas d'un nombre quelconque de constituants. Les expressions générales s'écrivent pour n constituants :

$$M_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} V_i$$

Avec

$$\rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i$$

Et

$$V_i = \frac{\rho_c}{\rho_i} M$$

Avec

$$\rho_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\rho_i}}$$

Règle des mélanges

L'une des façons d'estimer les propriétés des composites consiste à additionner les propriétés des constituants individuels en fonction de leur contribution au volume global du matériau. Cette méthode est communément appelée la règle des mélanges. La règle des mélanges utilise la fraction volumique des constituants pour estimer les propriétés du composite. Par exemple, dans le cas d'une couche composite fibrée continue, on a une fraction volumique de fibres V_f et une fraction volumique de matrice V_m , qui doivent satisfaire :

$$V_f + V_m = 1$$

Sur la base de la règle des mélanges, une propriété p est estimée à partir des propriétés des constituants, p_f et p_m , comme

$$p = p_f V_f + p_m V_m = p_f V_f + p_m (1 - V_f)$$

Exemple

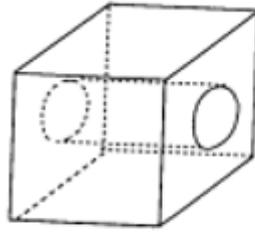
- Propriété de rigidité longitudinale

La propriété de rigidité longitudinale (direction des fibres) E_1 , du composite peut être calculée à partir des modules de Young des constituants E_f et E_m , en utilisant cette règle de mélange comme :

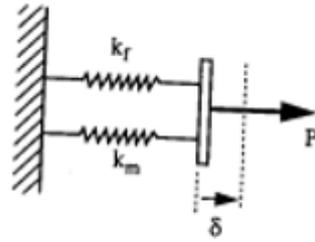
$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

Cette équation peut être déduite par analogie du calcul de la raideur globale de deux ressorts connectés en parallèle. La fibre est supposée totalement collée à la matrice, et la déformation finale totale Δl du composite est identique dans la fibre et dans la matrice, $\Delta l = \Delta l_f = \Delta l_m$ la force totale provoquant la déformation est portée en partie par les fibres et en partie par la matrice :

$$F = F_f + F_m$$



volume unitaire



représentation de la rigidité

Figure : Modèle de règle des mélanges d'une rigidité longitudinale d'une couche composite

En supposant que chaque constituant agit comme une barre axiale de longueur l avec une relation force-déplacement $\Delta l = Fl/ES$ où S est l'aire de la section transversale,

La rigidité k caractérise les performances mécaniques du matériau composite dans le domaine élastique

$$F = \frac{\Delta l ES}{l}$$

$$F = F_f + F_m$$

$$\frac{\Delta l E_1 S}{l} = \frac{\Delta l E_f S_f}{l} + \frac{\Delta l E_m S_m}{l}$$

Étant donné que les aires de section transversale sont proportionnelles aux fractions de fibres $S_f = V_f S, S_m = V_m S$, on obtient :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

- Propriété de rigidité transversale

Pour le module d'élasticité dans une direction perpendiculaire aux fibres, les calculs et les hypothèses peuvent nécessiter un modèle plus sophistiqué qui inclut la forme des fibres et la quantité de fibres dans la matrice. Cependant, de bonnes estimations du module sont obtenues en modélisant la fibre et la matrice comme deux cordes élastiques connectées en série. Avec ce modèle, la déformation totale au point d'application de la charge dans une direction perpendiculaire à la fibre est la somme des déviations subies par la fibre et la matrice. L'expression résultante du module transverse est :

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

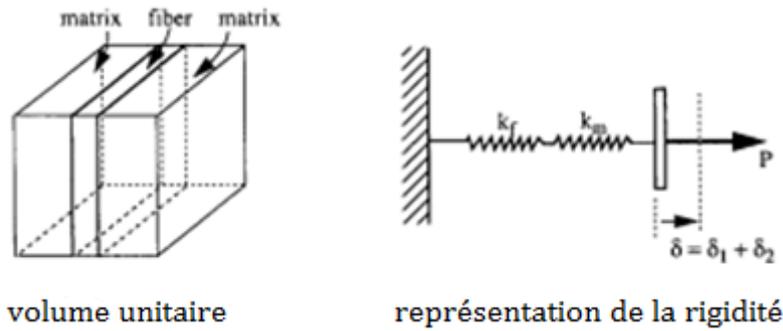


Figure : Modèle de règle des mélanges d'une rigidité transversale d'une couche composite

En utilisant des arguments similaires, le coefficient de poisson et le module de cisaillement du composite peuvent être obtenus sous la forme suivante :

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$$

et

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}$$