

Chapitre VIII. Intégrale indéfinie. Calcul intégral.

L'intégrale indéfinie est le problème inverse de la recherche de la dérivée d'une fonction donnée.

§1. Primitives. Intégrale indéfinie.

VIII.1. Notion de primitives d'une fonction. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On cherche une fonction F définie et dérivable sur I vérifiant:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \quad (1)$$

Définition. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I , vérifiant l'équation (1).

Théorème. Si f admet une primitive, alors elle en admet une infinité et si F, G sont deux primitives de f sur I , alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$F(x) - G(x) = c, \quad \forall x \in I.$$

VIII.2. Intégrale indéfinie.

Définition. On appelle *intégrale indéfinie* de f sur $I \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des primitives de f sur I , si elles existent, qu'on note $\int f(x)dx, x \in I$.

Si F est une primitive de f , alors on écrit :

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

En pratique, on désigne souvent par l'intégrale indéfinie une certaine fonction primitive au lieu de l'ensemble des primitives de f .

VIII.3. Existence de l'intégrale indéfinie. Pour l'existence de l'intégrale indéfinie d'une fonction f , c'est à dire d'une primitive, on a la condition suffisante suivante:

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Conséquence. Les fonctions élémentaires réelles admettent toutes des primitives.

Remarque. Il existe des fonctions n'admettant de primitives au sens de la définition donnée.

§2. Calcul intégral.

L'opération de recherche de l'intégrale indéfinie est appelée **intégration ou primitivisation** et pour cela, on dit souvent **intégrer une fonction** au lieu de calculer son intégrale indéfinie.

VIII.4. Propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie. Les propriétés suivantes sont vraies:

- i) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$;
- ii) $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- iii) $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$ ou $d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$;
- iv) $\int dF(x) = F(x) + c$;
- v) si $\int f(x) dx = F(x) + c$, alors $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$.

VIII.5. Table des principales intégrales indéfinies. A partir de la table des dérivées des fonctions élémentaires, on établit la table suivante des primitives de fonctions élémentaires:

- i) $\int 0 dx = c$;
- ii) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$,
- iii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$ ($a > 0, a \neq 1$); $\int e^x dx = e^x + c$, $x \in \mathbb{R}$;
- iv) $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$ ($x \neq 0$);
- v) $\int \sin x dx = -\cos x + c$; $\int \cos x dx = \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$;
- vi) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- vii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + c, \end{cases}$, $-1 < x < 1$;
- viii) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arcctg} x + c, \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$;

BROCHURE D'EXERCICES D'ANALYSE 2
Intégrale indéfinie, intégrale définie et équations différentielles du premier ordre
avec réponses et corrigés par
OSMANOV H. et KHELIFATI S

pose $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)dx$. Dans ce cas, on a

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + c = G(\varphi(x)) + c.$$

Exemple. Calculer $F(x) = \int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, dx$. Remarquons tout d'abord que

$$\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, dx = \int \sqrt{\sin x} \sin' x \, dx = \int \sqrt{\sin x} d(\sin x).$$

Ainsi, en posant $t = \sin x$, on obtient :

$$\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, dx = \int \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + c = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + c.$$

Parfois le changement de variable n'est pas visible et on peut, dans certains cas, poser $x = \psi(t)$. Plus précisément, on a le théorème suivant:

Théorème 2. Soient f une fonction continue sur I et $\psi : J \rightarrow I$ une fonction inversible telle que $\psi \in C^1(J)$. Alors, en posant $x = \psi(t)$, on obtient la formule

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + c, \quad (3)$$

avec $t = \psi^{-1}(x) = \varphi(x)$, $dx = \psi'(t)dt$ et G une primitive de g . On revient ensuite à la variable x en remplaçant $t = \psi^{-1}(x)$, d'où

$$\int f(x)dx = G(\psi^{-1}(x)) + c. \quad (4)$$

Cette méthode est dite **méthode de substitution**.

Exemple. Calculer $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$. Dans cet exemple, le changement de variable n'est pas visible et il est préférable d'utiliser le théorème 2 en faisant le changement suivant: $x = \psi(t) = atg t$. Dans ce cas, on a

$$dx = a \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad (x^2 + a^2)^{3/2} = \frac{a^3}{\cos^3 t},$$

et en remplaçant dans l'intégrale, on obtient, après quelques transformations trigonométriques:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \int \frac{a \cos^3 t}{a^3 \cos^2 t} dt = \frac{1}{a^2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{a^2} \sin t + c.$$

Comme $t = \arctg \frac{x}{a}$, alors on a la résultat:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \sin \arctg \frac{x}{a} + c = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + c.$$

Remarques.

1) Le choix du changement de variable doit être judicieux et seule la pratique du calcul intégral permet de le déterminer.

2) Comme $dt = d\varphi = \varphi'(x)dx$ dans le théorème 1, il est préférable d'écrire l'intégrale sous la forme:

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + c.$$

3) Nous conseillons au lecteur de vérifier les résultats obtenus en calculant leurs dérivées qui

doivent être égales aux fonctions à intégrer.

VIII.8. Méthode d'intégration par parties. Un grand nombre d'intégrales se calculent par la méthode d'intégration par parties qui est donnée par le théorème suivant:

Théorème. Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que la fonction $u'v$ admet une primitive sur I . Alors la fonction uv' admet une primitive sur I et on a :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \quad (5)$$

En particulier le théorème est vrai si $u, v \in C^1(I)$.

Symboliquement, on écrit:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du .$$

Remarques.

1) Le choix de cette méthode n'a de sens que si l'intégrale figurant dans le membre de droite de la formule (5) est facile à calculer.

2) Le choix des fonctions u et v doit être judicieux et ce n'est que par la pratique des exercices que l'on pourra plus facilement faire ce choix.

3) La pratique montre qu'un bon nombre d'intégrales susceptibles d'être calculées par la méthode d'intégration par parties peuvent être classées en trois groupes:

a) $\int f(x) \log x \, dx, \int f(x) \arcsin x \, dx, \int f(x) \arccos x \, dx, \int f(x) \operatorname{arctg} x \, dx,$
 $\int f(x)(\arccos x)^2 dx, \int f(x)(\operatorname{arctg} x)^2 dx, \dots$ dans le cas où f admet une primitive;

b. $\int P(x) \cos \gamma x \, dx, \int P(x) \sin \gamma x \, dx, \int P(x) e^{\gamma x} dx$ où P est un polynôme
 $(\gamma \in \mathbb{R})$, dans ce cas, on pose $u(x) = P(x)$;

c. $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx, \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \int \sin(\log x) dx,$
 $\int \cos(\log x) dx, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$

Exemples. Comme pour les exemples précédents, la constante arbitraire est désignée par la lettre $c \in \mathbb{R}$.

1) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$. Posons $u = \operatorname{arctg} x$ et $v' = x$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{1}{1+x^2} \text{ et } v = \frac{x^2}{2} \text{ et, d'après la formule d'intégration par parties:} \\
 \int x \arctg x dx &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + c = \\
 &= \frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + c.
 \end{aligned}$$

2) $I_2 = \int x^n \log x \, dx$ ($n \neq -1$). Posons $u(x) = \log x$ et $v'(x) = x^n$.

Alors on a: $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et d'après la formule d'intégration par parties:

$$\int x^n \log x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\log x - \frac{1}{n+1} \right) + c.$$

3) Etablissons une formule récurrente pour calculer l'intégrale

$$I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}, \quad n \geq 1.$$

On a, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt = \\
 &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1},
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la formule de récurrence suivante:

$$I_{n+1} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2ka^2} I_n, \quad n \geq 1.$$

Comme I_n se calcule en fonction de I_{n-1} , I_{n-1} en fonction de I_{n-2} et ainsi de suite, alors il revient, en fin de compte, à calculer I_1 qui est égale à:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + c.$$

§3. Intégration de fractions rationnelles.

Les fractions rationnelles forment une classe importante de fonctions dont l'intégrale se calcule par les méthodes précédentes et dont l'intérêt réside dans le fait que:

1°/ l'intégration de nombreuses fonctions non rationnelles se ramène à celle de fractions rationnelles par des changements de variables;

2°/ il existe une méthode générale d'intégration d'une fraction rationnelle qui consiste, après l'avoir transformée, à intégrer une somme finie de fractions plus simples. Pour cela, rappelons le théorème sur la décomposition d'une fraction rationnelle réelle en une somme finie de fractions, appelées éléments simples.

BROCHURE D'EXERCICES D'ANALYSE 2
Intégrale indéfinie, intégrale définie et équations différentielles du premier ordre
avec réponses et corrigés par
OSMANOV H. et KHELIFATI S

VIII.9. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Théorème fondamental de décomposition. Soient $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que $\deg P < \deg Q$ et

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{n_2} \dots (x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{n_\ell},$$

avec $x_1, x_2, \dots, x_k, p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_\ell, q_\ell \in \mathbb{R}$,

$m_1, m_2, \dots, m_k, n_1, n_2, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$ et $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0$,

$i = 1, 2, \dots, \ell$. Alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ se décompose en une somme finie unique d'éléments simples de première et deuxième espèces comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \\ & + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{km_k}}{(x - x_k)^{m_k}} + \\ & + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_{12}x + N_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{1n_1}x + N_{1n_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}} + \\ & + \frac{M_{21}x + N_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{M_{22}x + N_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{M_{2n_2}x + N_{2n_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{n_2}} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{M_{\ell 1}x + N_{\ell 1}}{x^2 + p_\ell x + q_\ell} + \frac{M_{\ell 2}x + N_{\ell 2}}{(x^2 + p_\ell x + q_\ell)^2} + \dots + \frac{M_{\ell n_\ell}x + N_{\ell n_\ell}}{(x^2 + p_\ell x + q_\ell)^{n_\ell}}. \end{aligned}$$

avec $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{km_k}$,

$M_{11}, N_{11}, M_{12}, N_{12}, \dots, M_{\ell n_\ell}, N_{\ell n_\ell} \in \mathbb{R}$, $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, \ell$.

De manière condensée, cette décomposition s'écrit

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x - x_i)^j} \right) + \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j} \right).$$

VIII.10. Méthode des coefficients indéterminés. Exemple. Pour déterminer les coefficients A_{ij} , M_{ij} et N_{ij} , on a une méthode générale, dite méthode des coefficients indéterminés qu'on illustre par l'exemple suivant: soit à décomposer la fraction régulière

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}.$$

D'après le théorème, on a la formule de décomposition suivante :

BROCHURE D'EXERCICES D'ANALYSE 2
Intégrale indéfinie, intégrale définie et équations différentielles du premier ordre
avec réponses et corrigés par
OSMANOV H. et KHELIFATI S

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1} = \\ &= \frac{A(x-1)(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Mx + N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \\ &= \frac{(A+M)x^3 + (B+N-2M)x^2 + (B+M-2N)x + (-A+B+N)}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}. \end{aligned}$$

En identifiant coefficients dans les numérateurs, on obtient le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} A + M = 2 \\ B - 2M + N = 4 \\ B + M - 2N = 1 \\ -A + B + N = 2. \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique : $A = 2$, $B = 3$, $M = 0$ et $N = 1$. D'où la décomposition :

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Remarque. La méthode des coefficients indéterminés peut s'avérer longue et parfois il vaut mieux appliquer la méthode d'élimination dans le cas où le dénominateur Q n'admet que des racines réelles:

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}, \quad x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j.$$

Dans ce cas, les coefficients A_{ij} sont données par la formule suivante

$$A_{ij} = \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d}{dx^{m_i-j}} \left(\frac{P}{Q} (x - x_i)^{m_i} \right) \Big|_{x=x_i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m_i.$$

VIII.11. Méthode d'intégration d'une fraction rationnelle. Soit à intégrer une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Premier cas: si $\frac{P}{Q}$ est régulière (i.e.. $\deg P < \deg Q$), alors, d'après le théorème fondamental, on la décompose en une somme finie d'éléments simples qui sont de la forme: $\frac{A}{(x-a)^m}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $A, a, M, N \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $p^2 - 4q < 0$. En fonction de m et n , intégrer une fraction rationnelle régulière revient à calculer quatre types d'intégrales, à savoir:

type I : $\int \frac{A}{x-a} dx = A \log|x-a| + c \quad (\text{cas } m = 1) ;$

type II: $\int \frac{A}{(x-a)^m} dx = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c \quad (\text{cas } m > 1) ;$

type III: $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \quad (\text{cas } n = 1) ;$

type IV: $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx$ (cas $n > 1$).

Algorithme de calcul des intégrales de types III et IV. Sachant que

$p^2 - 4q < 0 \Leftrightarrow q - \frac{p^2}{4} > 0$ et en posant $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, on peut écrire :

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2.$$

Pour le calcul des intégrales de types III et IV, on pose $t = x + \frac{p}{2}$ et on a $dt = dx$.

VIII.12. Exemple. Calculer $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{(x+1)^3(x^2 + 3x + 3)^2} dx$.

La fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{(x+1)^3(x^2 + 3x + 3)^2}$ étant régulière, on peut la décomposer en éléments simples suivant la formule :

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{(x+1)^3(x^2 + 3x + 3)^2} &= \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Mx+N}{x^2 + 3x + 3} + \frac{Rx+S}{(x^2 + 3x + 3)^2}. \end{aligned}$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient: $A = -2$,
 $B = 2$, $C = -1$, $M = 2$, $N = 2$, $R = 1$, $S = 2$. D'où:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{(x+1)^3(x^2 + 3x + 3)^2} dx = \\ &= -2 \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^3} dx + 2 \int \frac{x+1}{x^2 + 3x + 3} dx + \int \frac{x+2}{(x^2 + 3x + 3)^2} dx. \end{aligned}$$

Pour les intégrales de types I et II, on obtient :

$$-2 \int \frac{dx}{x+1} = -2 \log|x+1| + c, \quad 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{2}{x+1} + c,$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3} = \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$$

Pour les intégrales de types III et IV, écrivons d'abord :

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{4}\right) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = t^2 + a^2.$$

En posant $t = x + \frac{3}{2}$ et $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2 + 3x + 3} dx &= \int \frac{t - \frac{1}{2}}{t^2 + a^2} dt = \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{1}{2} (\log(t^2 + a^2) - \frac{1}{2a} \arctg \frac{t}{a}) + c, \end{aligned}$$

et

$$\int \frac{x+2}{(x^2+3x+3)^2} dx = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{(t^2+a^2)^2} dt = \int \frac{t}{(t^2+a^2)^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}.$$

La dernière intégrale se calcule d'après la formule de récurrence de l'exemple 3) du n°VIII.8. Finalement, on trouve après arrangement des termes que

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3+2x^2+x-1}{(x+1)^3(x^2+3x+3)^2} dx = \\ &= -\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{x}{3(x^2+3x+3)} - 2\log|x+1| + \\ &+ \log(x^2+3x+3) - \frac{4\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+3)\right) + c. \end{aligned}$$

Deuxième cas. Si $\deg p \geq \deg Q$, alors en faisant la division euclidienne, on obtient

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}, \quad \deg R < \deg Q,$$

telle que S est un polynôme et $\frac{R}{Q}$ une fraction rationnelle régulière et, alors on a

$$\int \frac{P}{Q} dx = \int S dx + \int \frac{R}{Q} dx.$$

§ 4. Intégration de certaines classes de fonctions irrationnelles.

Certaines fonctions irrationnelles peuvent se ramener à une intégration de fractions rationnelles par un changement de variable.

VIII.13. Polynôme et fraction rationnelle de deux variables.

Définition 1. On appelle **polynôme de deux variables** u, v de degré n toute expression de la forme:

$$\begin{aligned} P(u, v) = & a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \dots + a_{n0}u^n + \\ & + a_{n-1,1}u^{n-1}v + \dots + a_{0n}v^n, \end{aligned}$$

où $a_{00}, a_{10}, \dots, a_{0n} \in \mathbb{R}$.

Définition 2. On appelle **fraction rationnelle de deux variables** u, v tout rapport de deux polynômes des variables u et v .

Une fraction rationnelle est donc une expression de la forme

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)},$$

où P, Q sont des polynômes des deux variables u, v .

Dans le cas où $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ sont des fonctions de la variable x , alors $R(\varphi(x), \psi(x))$ est dite fraction rationnelle de φ et ψ .

Exemples.

$$1) R(u, v) = \frac{1 + u^2 + 2uv^3}{5v^2 + u^2v - 3u^4};$$

$$2) R(x, \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 5x\sqrt{x^2 - 1}}, \quad u = x, \quad v = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$3) R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^2 x + 3\sin x + 2}{\cos x \sin^2 x + 2\cos^2 - 3\sin x - 6}.$$

Remarques. Dans l'exemple 2, la fonction $x \mapsto R(x) = R(x, \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 5x\sqrt{x^2 - 1}}$ est une fonction irrationnelle de la variable x seulement.

VIII.14. Intégrales de la forme $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad ad - bc \neq 0.$ Dans ce cas, la fonction R est irrationnelle en x . Posons

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

On obtient, après calcul:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt,$$

d'où

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

où R_1 est une fraction rationnelle en t .

Exemple 1. Calculer l'intégrale $I = \int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$

En posant $t^3 = \frac{1-x}{1+x}$, on obtient après calcul

$$x = \frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad dx = \frac{-6t^2}{(t^3+1)^2} dt,$$

d'où

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \dots = 6 \int \frac{t^3}{(t^3+1)(t^3-1)} dt = 3 \int \left(\frac{1}{t^3+1} - \frac{1}{t^3-1} \right) dt.$$

La dernière intégrale est une intégrale d'une fraction rationnelle en t qu'on peut résoudre par la méthode exposée précédemment. Le résultat trouvé est:

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \log \left| \frac{t^2 - 1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1+2t^2}{\sqrt{3}} + c, \text{ avec } t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Remarque. La méthode précédente peut se généraliser aux intégrales de la forme:

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx,$$

en posant $t^r = \frac{ax+b}{cx+d}$, où $r = \text{PPCM}(n_1, n_2, \dots, n_k)$, c'est à dire le plus petit commun multiple de $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Exemple 2. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$. Dans ce cas, on a

$a = d = 1, b = c = 0, n_1 = 2, n_2 = 5$ et $\text{PPCM}(2, 5) = 10$. En posant $t^{10} = x$, on obtient, après calcul $\sqrt{x} = t^5, \sqrt[5]{x^2} = t^4, dx = 10t^9 dt$, d'où

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} = 10 \int \frac{dt}{t^5(t+1)}.$$

La résolution de cette intégrale d'une fraction rationnelle donne

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})} = \log \left| \frac{x}{(1 + \sqrt[10]{x})^{10}} \right| + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + c.$$

VIII.15. Intégrales de différentielles binômiales de la forme

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \text{ où } m, n, p \text{ sont des nombre rationnels et } a, b \text{ des nombres réels.}$$

On démontre que ces intégrales peuvent être ramenées à des intégrales de fonctions rationnelles dans les trois cas suivants

1) Si p est entier, alors on pose $x = z^k$ où k est le dénominateur commun des fractions m et n .

2) Si $\frac{m+1}{n}$ est entier et p fractionnaire, alors on pose $a + bx^n = z^k$ où k est le dénominateur de p .

3) Si $\frac{m+1}{n}$ et p sont des nombres fractionnaires mais la somme $\frac{m+1}{n} + p$ est un nombre entier, alors on pose $\frac{a+bx^n}{x^n} = z^k$, où k est le dénominateur de la fraction p .

Remarque. En dehors de ces trois cas cités, l'intégrale d'une différentielle binômiale ne peut être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires.

VIII.16. Intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Dans ce cas,

$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ avec $a \neq 0$, et la fonction R est une fonction irrationnelle en x .

Méthodes de substitution d'Euler. On a une méthode générale d'intégration pour calculer ce type d'intégrale qu'on peut transformer en une intégrale d'une fraction rationnelle par des changements de variable de trois types.

i) Première substitution d'Euler. Cas $a > 0$. On pose alors

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x.$$

Etudions le cas $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a}x$. En élevant au carré les deux expressions et en simplifiant les calculs, on obtient

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient

$$\int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}\right) 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

où R_1 est une fraction rationnelle en t .

Les autres cas se traitent de la même manière.

ii) Deuxième substitution d'Euler. Cas $c > 0$. On pose alors

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Etudions le cas $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$. Après calcul, on obtient

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a - t^2}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient

$$\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a - t^2}\right) 2 \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt = \int R_2(t) dt,$$

où R_2 est une fraction rationnelle en t .

iii) Troisième substitution d'Euler. Cas où le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes $\alpha \neq \beta$, c'est à dire que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et donc

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

On pose alors $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \alpha)$ (ou $\pm t(x - \beta)$). Etudions le cas

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha).$$

Après calcul, on obtient

$$x = \frac{-a\beta + at^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\alpha - \beta)t}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2a(\alpha - \beta)t}{(t^2 - a)^2} dt.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient

$$\int \left(\frac{-a\beta + \alpha t^2}{t^2 - a}, \frac{a(\alpha - \beta)t}{t^2 - a} \right) \frac{2a(\alpha - \beta)t}{(t^2 - a)^2} dt = \int R_3(t) dt,$$

où R_3 est une fraction rationnelle en t .

Remarque. La méthode des substitutions d'Euler est générale pour ces types d'intégrales, mais elle peut mener à des calculs fastidieux. Il peut exister des méthodes plus simples et plus judicieuses pour la résolution de certaines intégrales de ce type (voir VIII. 17, cas V).

Exemple. Calculer l'intégrale $I_1 = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. Dans cet exemple, on a $a = b = c = 1$. Faisons la première substitution d'Euler en posant

$$t - x = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Elevons les deux expressions au carré et simplifions les termes identiques

$$(t - x)^2 = t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x(1 + 2t) = t^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1},$$

d'où

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1}, \quad dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2} dt, \quad 1 + x = \frac{t(t + 2)}{2t + 1}.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale I_1 et après simplification, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{1}{\frac{t(t+2)}{2t+1} \frac{t^2+t+1}{2t+1}} 2 \frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t(t+2)} = \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \log|t| - \log|t+2| + c. \end{aligned}$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} = \log \left| \frac{\sqrt{x^2+x+1} + x}{\sqrt{x^2+x+1} + x + 2} \right| + c.$$

§5. Intégration de certaines classes de fonctions transcendantes.

VIII.17. Intégrales de la forme: $\int R(\sin x, \cos x) dx$, où $R(\sin x, \cos x)$ étant une fonction transcendante en x .

Pour ce type d'intégrale, on peut faire le changement de variable universel :

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctg t.$$

On a dans ce cas:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient:

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_4(t)dt,$$

où R_4 est une fraction rationnelle en t .

Exemple 1. Calculer $I = \int \frac{dx}{5-3\cos x}$. Posons $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. On a
 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. En remplaçant ces expressions dans l'intégrale I , on obtient

$$\frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{1}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + c.$$

Remarque. La méthode générale exposée pour ce type d'intégrale peut mener à des calculs parfois très longs. Pour cela, il existe des méthodes plus efficaces et plus simples pour calculer ces intégrales si la fonction R possède certaines propriétés. Voici quelques cas:

I.

- 1) Si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, on peut poser $t = \cos x$,
- 2) Si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, on peut poser $t = \sin x$,
- 3) Si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, on peut poser $t = \operatorname{tg} x$. Ce dernier cas est valable si on a $R(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

II. Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Cas $m, n \in \mathbb{Q}$. En posant $u = \sin x$ ou $u = \cos x$, on se ramène à une intégrale de différentielle binômiale.

Cas $m, n \in \mathbb{Z}$.

- 1) Si l'un des deux exposants est pair et l'autre impair, on peut poser $t = \cos x$.
- 2) Si $m = 2k + 1$ et $n = 2\ell + 1$, alors on peut poser $t = \cos 2x$ et l'intégrale devient

$$-\frac{1}{2^{k+\ell+2}} \int (1+t)^\ell (1-t)^k dt.$$

- 3) Si $m = 2k$, $n = 2\ell$, alors on peut poser $t = \operatorname{tg} x$ et on se ramène au cas I.3), ou bien comme

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

alors l'intégrale devient

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^q dx.$$

En développant l'expression sous la dernière intégrale, on obtient des intégrales suivant les puissances paires et impaires de $\cos 2x$. Alors, on peut appliquer le cas 1).

Exemple. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$. On pose $t = \operatorname{tg} x$ et alors

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

En remplaçant dans l'intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right) dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

III. Intégrales de la forme $\int \sin ax \cos bxdx$. Dans ce cas, on applique les formules de trigonométrie suivantes:

$$\sin ax \cos bxdx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\sin ax \sin bxdx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x),$$

$$\cos ax \cos bxdx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x).$$

IV. Intégrales de la formes $\int \sin^n x dx$ et $\int \cos^n x dx$. Dans ce cas, on peut linéariser les fonctions à intégrer suivant les formules:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos^n x = \frac{1}{2^n}(\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \dots + \cos(-nx)),$$

$$\begin{aligned}\forall n = 2p, \sin^n x &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}(\cos nx - C_n^1 \cos(n-2)x + \\ &+ C_n^2 \cos(n-4)x + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(-nx))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall n = 2p+1, \sin^n x &= \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}(\sin \cos nx - C_n^1 \cos(n-2)x + \\ &+ C_n^2 \cos(n-4)x + \dots)\end{aligned}$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemple 1. Calculer $\int \cos^4 x dx$. On a

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right] + C.\end{aligned}$$

Exemple 2. Calculer $I = \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$. En posant $t = \operatorname{tg} x$, on obtient

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = 2 \int \frac{t}{\frac{1}{1+t^2}(t^4+1)} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2t dt}{t^4+1} =$$

$$= \int \frac{d(t^2)}{(t^2)^2 + 1} = \arctg t^2 + c = \arctg(\operatorname{tg}^2 x) + c.$$

V. Intégration des intégrales abéliennes de la forme $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ à l'aide de transformations trigonométriques si $a \neq 0$ et $c - \frac{b^2}{4a^2} \neq 0$. On peut montrer que cette intégrale se ramène à une intégrale de la forme $\int R_1(\sin t, \cos t) dt$ comme suit:

1) Si $a > 0$ et $c - \frac{b^2}{4a} > 0$, alors

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \int R\left(x, \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}\right) dx = \\ &= \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt, \text{ où } m^2 = a, n^2 = c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

En posant $mt = n \operatorname{tg} z$, on obtient une intégrale de la forme $\int R_1(\sin z, \cos z) dz$.

2) Si $a > 0$ et $c - \frac{b^2}{4a} < 0$, alors

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt.$$

En posant $t = \frac{n}{m \cos z}$, on obtient une intégrale de la forme $\int R_2(\sin z, \cos z) dz$.

3) Si $a < 0$ et $c - \frac{b^2}{4a} > 0$, alors

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}) dt.$$

En posant $t = \frac{n}{m} \sin z$, on obtient une intégrale de la forme $\int R_3(\sin z, \cos z) dz$.

4) Lorsque $a < 0$ et $c - \frac{b^2}{4a} < 0$, alors la fonction à intégrer n'a aucun sens.

Exemple. Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$. En posant $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} &= \int \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^6 \cos^6 t}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\cos t} = \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

VIII.19. Intégrale de fonctions transcendentes de la forme $\int R(e^x) dx$.

Dans ce cas, on pose $t = e^x$, et alors on a $dt = e^x dx = t dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$. En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt = \int \tilde{R}(t) dt,$$

où $\tilde{R}$ est une fraction rationnelle en t .

Remarque. La même méthode peut s'appliquer au cas où R est une fraction rationnelle en $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{th}x$, $\operatorname{cth}x$. (Voir aussi n° suivant).

Exemple. Calculer $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$. En posant $t = e^x$, on obtient, après transformation:

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{t - 1}{t + 1} \frac{dt}{t} = \dots = 2 \log(1 + e^x) - x + c.$$

VIII.20. Intégrale de fonctions transcendentes de la forme $\int R(\operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x) dx$.

Comme pour les intégrales des fractions de fonctions trigonométriques, on peut faire le changement de variable universel pour ce type d'intégrales en posant: $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ pour se ramener à une intégrale d'une fraction rationnelle en t . En effet, on a dans ce cas

$$\operatorname{sh}x = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{ch}x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2}{1 - t^2} dt.$$

Alors

$$\int R(\operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1 - t^2}, \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\right) \frac{dt}{1 - t^2}.$$

Remarque. Comme pour les intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x dx$, on peut appliquer les mêmes remarques pour calculer $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x dx$. Par exemple si m, n sont des nombres rationnels, alors on se ramène à une intégrale d'une différentielle binômiale en posant $t = \operatorname{sh}x$ ou $t = \operatorname{ch}x$.

VIII.21. Fonctions dont les primitives ne sont pas des fonctions élémentaires. Certaines intégrales de fonctions élémentaires simples ne peuvent être calculées par les méthodes exposées précédemment. Comme par exemple, les intégrales

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \frac{dx}{\log x}, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$$

existent, mais elles ne peuvent pas être exprimées sous forme de fonctions élémentaires, contrairement aux dérivées de fonctions élémentaires qui sont aussi élémentaires. Dans ces cas, ces intégrales définissent de nouvelles fonctions réelles, dites fonctions définies par une intégrales.

Enoncés des exercices du chapitre VIII.

Exercice 8.1. Vérifier que la fonction

$$F(x) = (-1)^k \cos x + 2(k-1), \quad x \in [(k-1)\pi, k\pi], \quad k \in \mathbb{Z},$$

est une primitive de la fonction $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.2.

i) Trouver la primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ passant par le point de coordonnées $(1, \pi)$.

ii) Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| + c = \log|1-x| + c = \int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{dx}{x-1}.$$

Exercice 8.3. Soit F une primitive de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Démontrer les relations suivantes:

- 1) si f est impaire, alors F est paire;
- 2) si f est paire, alors $F - F(0)$ est impaire;
- 3) si f est périodique de période T , $F(0) = F(T)$, alors la fonction F est périodique de période T sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.4.

i) Soit $F \in C([a, b[)$, $c \in]a, b[$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue au point c .

Supposons que F est une primitive de la fonction f sur chacun des intervalles $]a, c[$ et $]c, b[$. Démontrer que F est une primitive de f sur $]a, b[$.

ii) Montrer que la fonction $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ n'admet pas de

primitive sur $] -1, 1[$. (Comparer avec i)).

Exercice 8.5. i) En utilisant la table des intégrales, calculer :

$$1) \int \sqrt[m]{x^m} dx. \quad 2) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx.$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$$

$$4) \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$$

$$5) \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$6) \int \frac{(1 + 2x^2)}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}.$$

$$8) \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$$

ii) Mettre les intégrales suivantes sous la forme $\int f(\phi(x)) d\phi$, ensuite les calculer:

$$9) \int \frac{dx}{(2x-3)^5}.$$

$$10) \int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx.$$

$$11) \int \sin(2x-3) dx.$$

$$12) \int \frac{dx}{2x-7}.$$

- | | |
|--|--|
| 13) $\int \frac{dx}{x \ln x}$. | 14) $\int \frac{(\ln x)^m}{x} dx$. |
| 15) $\int e^{x^2} x dx$. | 16) $\int e^{-x^3} x^2 dx$. |
| 17) $\int \cos^2 x dx$. | 18) $\int \sin^2 x dx$. |
| 19) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$. | 20) $\int \cos x \sin 3x dx$. |
| 21) $\int \cos 2x \cos 3x dx$. | 22) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$. |
| 23) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$. | 24) $\int \frac{3+x}{3-x} dx$. |
| 25) $\int th^2 x dx$. | 26) $\int cth^2 x dx$. |
| 27) $\int 2^{2x} e^x dx$. | 28) $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$. |
| 29) $\int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx$. | 30) $\int (\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{x^2})^2 dx$. |

Exercice 8.6. A l'aide d'un changement de variable, calculer:

- | | |
|---|---|
| 1) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$. | 2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$. |
| 3) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$. | 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. |
| 5) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$. | 6) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$. |
| 7) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$. | 8) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$. |
| 9) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$. | 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$. |
| 11) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$. | 12) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} dx$. |
| 13) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$ (poser $x = \frac{1}{t}$, ou $x = \operatorname{atg} t$) . | |
| 14) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$. | 15) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$. |
| 16) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$. | 17) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$. |
| 18) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}}$. | 19) $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$. |
| 20) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1} dx$. | 21) $\int \frac{3x-2}{2-3x+5x^2} dx$. |
| 22) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$. | 23) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$. |
| 24) $\int \frac{xdx}{(1-x^2)^2}$. | 25) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$. |
| 26) $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$. | 27) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$. |
| 28) $\int \sin^6 x \cos x dx$. | 29) $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$. |

30) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

32) $\int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx$.

34) $\int \frac{\ln \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx$.

31) $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$.

33) $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

35) $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{1+x^2} dx$.

Exercice 8.7. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant:

$$\int \frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} du = dx, u = x \\ v = \frac{1}{x}, dv = -\frac{1}{x^2} dx \end{array} \right\} = x \frac{1}{x} - \int x \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = 1 + \int \frac{dx}{x}.$$

Exercice 8.8. En intégrant par parties, calculer:

1) $\int x^n \ln x dx$ ($n \neq -1$).

3) $\int \arccos x dx$.

5) $\int x \cos^2 x dx$.

7) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$.

9) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$.

11) $\int x^2 e^{-x} dx$.

13) $\int x^2 \cos^2 x dx$.

15) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$.

17) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$.

19) $\int x \tg^2 x dx$.

21) $\int x \sin^2 x dx$.

23) $\int (x^2 - 6x + 2)e^{3x} dx$.

25) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx$.

27) $\int e^{ax} \sin bx dx$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

29) $\int e^{\arccos x} dx$.

2) $\int x \arctg x dx$.

4) $\int \arctg \sqrt{x} dx$.

6) $\int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

8) $\int \ln(x^2 + 1) dx$.

10) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

12) $\int x^3 \sin x dx$.

14) $\int \ln^2 x dx$.

16) $\int e^x \sin x dx$.

18) $\int \arccos^2 x dx$.

20) $\int x^2 \arcsin 2x dx$.

22) $\int x^3 \arctg x dx$.

24) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.

26) $\int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

28) $\int \sin \ln x dx$;

30) $\int \left(\frac{\cos x}{e^x} \right)^2 dx$.

Exercice 8.9. Trouver les formules de récurrence pour les intégrales I_n ($n \in \mathbb{N}$) suivantes:

1) $I_n = \int x^n e^{ax} dx$, $a \neq 0$.

3) $I_n = \int x^\alpha \ln^n x dx$, $\alpha \neq -1$.

5) $I_n = \int \sin^n x dx$, $n > 2$.

7) $I_n = \int \sin^n x dx$, $n > 2$.

2) $I_n = \int \ln^n x dx$.

4) $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a}}$, $n > 2$.

6) $I_n = \int \cos^n x dx$, $n > 2$.

8) $I_n = \int \cos^n x dx$, $n > 2$.

$$9) I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad n > 2.$$

$$10) I_n = \int \frac{dx}{\cosh^n x}, \quad n > 2.$$

$$11) I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0.$$

Exercice 8.10. A l'aide de la méthode de décomposition des fonctions rationnelles en éléments simples, calculer les intégrales suivantes:

$$1) \int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)},$$

$$2) \int \frac{x dx}{2x^2 - 3x - 2}.$$

$$3) \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx,$$

$$4) \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}.$$

$$5) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx,$$

$$6) \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx.$$

$$7) \int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2 - 16x + 15)},$$

$$8) \int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

$$9) \int \frac{(2x^2 - 5) dx}{x^4 - 5x^2 + 6},$$

$$10) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

$$11) \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx,$$

$$12) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$13) \int \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^2 \frac{dx}{x},$$

$$14) \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}.$$

$$15) \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2},$$

$$16) \int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx.$$

$$17) \int \frac{7x^3 - 9}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} dx,$$

$$18) \int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3} dx.$$

$$19) \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)},$$

$$20) \int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$$

$$21) \int \frac{dx}{1 + x^3},$$

$$22) \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

$$23) \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx,$$

$$24) \int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}.$$

$$25) \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)},$$

$$26) \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2 + 1)}.$$

$$27) \int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2 + 1)} dx,$$

$$28) \int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx.$$

$$29) \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2},$$

$$30) \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

Exercice 8.11. Calculer les intégrales de fonctions irrationnelles suivantes:

$$1) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$2) \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$$

$$4) \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}.$$

$$5) \int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx.$$

$$6) \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$$

$$7) \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}.$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}.$$

$$9) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}.$$

$$10) \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x}.$$

Exercice 8.12. (Intégration de différentielles binômiales de la forme $x^m(a + bx^n)^p dx$).

- 1) $\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$.
- 2) $\int x^{-1} (1 + \sqrt[3]{x})^{-3} dx$.
- 3) $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}$.
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$.
- 5) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$.
- 6) $\int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} dx$.
- 7) $\int \frac{\sqrt{1 - x^4}}{x^5} dx$.
- 8) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.
- 9) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x^2} dx$.
- 10) $\int \sqrt[3]{x(1 - x^2)} dx$.
- 11) $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx$.
- 12) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx$.
- 13) $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1 + x^6}}$.

Exercice 8.13. Calculer les intégrales suivantes par la méthode de substitutions d'Euler:

- 1) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 4x - 4}}$.
- 2) $\int \frac{dx}{x \sqrt{2 + x - x^2}}$.
- 3) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 2x - 1}}$.
- 4) $\int \frac{dx}{(x - 1) \sqrt{x^2 + x + 1}}$.
- 5) $\int \frac{\sqrt{2x + x^2}}{x} dx$.
- 6) $\int \frac{dx}{(2x - 3) \sqrt{4x - x^2}}$.
- 7) $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx$.
- 8) $\int \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx$.
- 9) $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$.
- 10) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.
- 11) $\int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.
- 12) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$.
- 13) $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2 + x^2} dx$.
- 14) $\int \frac{(x - 1)}{x^2 \sqrt{2x^2 - 2x + 1}} dx$.
- 15) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Exercice 8.14. Calculer les intégrales des fonctions trigonométriques:

- 1) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.
- 2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.
- 3) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.
- 4) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.
- 5) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
- 6) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.
- 7) $\int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2}$.
- 8) $\int \cos^6 x dx$.
- 9) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.
- 10) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$.

- | | |
|--|--|
| 11) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$ | 12) $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx.$ |
| 13) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$ | 14) $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$ |
| 15) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx.$ | 16) $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}.$ |
| 17) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}.$ | 18) $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} dx.$ |
| 19) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$ | 20) $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}.$ |
| 21) $\int \sin^3 x dx;$ | 22) $\int \cos^4 x dx.$ |
| 23) $\int \cos^3 x \sin^5 x dx;$ | 24) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx;$ |
| 25) $\int \frac{dx}{\cos^4 x};$ | 26) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x};$ |
| 27) $\int \operatorname{tg}^4 x dx;$ | 28) $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$ |

Exercice 8.15. Calculer les intégrales des fonctions hyperboliques suivantes:

- | | |
|---|---|
| 1) $\int \operatorname{sh}^3 x dx;$ | 2) $\int \operatorname{ch}^2 x dx;$ |
| 3) $\int \operatorname{th}^3 x dx;$ | 4) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x};$ |
| 5) $\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x dx;$ | 6) $\int \operatorname{ch}^4 x dx;$ |
| 7) $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$ | |

Exercice 8.16. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes dans les parties indiquées:

- | | |
|---|---|
| 1) $f(x) = e^{- x }, x \in \mathbb{R};$ | 2) $f(x) = \cos x , x \in \mathbb{R};$ |
| 3) $f(x) = \log x , x \in]0, +\infty[;$ | 4) $f(x) = E(x) \sin \pi x (x \geq 0);$ |
| 5) $f(x) = 1 - x^2$ si $ x \leq 1$ et $f(x) = 1 - x $ si $ x > 1;$ | |
| 6) $f(x) = 1 + x - 1 - x .$ | |

Exercice 8.17. (Exercices divers). Calculer les intégrales suivantes en indiquant la méthode utilisée:

- | | |
|--|--|
| 1) $\int (x+1) \sqrt{x^2 + 2x} dx;$ | 2) $\int x \sin x \cos x dx;$ |
| 3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$ | 4) $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx;$ |
| 5) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx;$ | 6) $\int \frac{2x^5 - 3x^2}{1 + 3x^3 - x^6} dx;$ |
| 7) $\int x e^x dx;$ | 8) $\int \frac{dx}{e^x(3 + e^{-x})};$ |
| 9) $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx;$ | 10) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}} dx;$ |
| 11) $\int \sin^4 x dx;$ | 12) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$ |
| 13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x};$ | 14) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx;$ |

- 15) $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx;$
- 16) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x};$
- 17) $\int \frac{3 + x^3}{\sqrt{2 + 2x^2}} dx;$
- 18) $\int |x^2 - 2x| dx;$
- 19) $\int \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx;$
- 20) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 7x + 12} dx;$
- 21) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx;$
- 22) $\int e^{-x^2} x^5 dx .$
- 23) $\int (1 + e^{3x})^2 e^{3x} dx;$
- 24) $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx;$
- 25) $\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x};$
- 26) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$
- 27) $\int \frac{x dx}{x^3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}};$
- 28) $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$
- 29) $\int \frac{1}{1 + x^4} dx;$
- 30) $\int \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} dx;$
- 31) $\int \frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} dx;$
- 32) $\int \sqrt{1 - e^x} e^x dx;$
- 33) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x^2}} dx;$
- 34) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx;$
- 35) $\int \frac{x^7}{(1 + x^4)^2} dx;$
- 36) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx; :$
- 37) $\int e^{2x^2 + \ln x} dx;$
- 38) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$
- 39) $\int \sqrt[3]{3x - x^3} dx;$
- 40) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx;$
- 41) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}};$
- 42) $\int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx;$
- 43) $\int \frac{(\arctg x)^n}{1 + x^2} dx;$
- 44) $\int \frac{\cos^2 3x}{\sin 3x} dx;$
- 45) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx;$
- 46) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x} dx;$
- 47) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x^{\frac{3}{2}}} dx;$
- 48) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x + x^2}};$
- 49) $\int (\sin x + |\sin x|) dx;$
- 50) $\int \max(1, x^2) dx;$
- 51) $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{9x^2 - 4}} dx;$
- 52) $\int \cos^5 x dx;$
- 53) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx;$
- 54) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx;$
- 55) $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx.$

Exercice 8.18. Soit f une fonction monotone, continue et f^{-1} son inverse.

i) Montrer que si $\int f(x) dx = F(x) + c$, alors

$$\int f^{-1}(x) dx = x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + c.$$

ii) Etudier les exemples suivants:

1) $f(x) = x^n \ (n > 0);$

3) $f(x) = \arcsin x;$

2) $f(x) = e^x;$

4) $f(x) = \operatorname{argth} x.$

Réponses aux exercices du chapitre VIII.

Exercice 8.2. i) $F(x) = \arctg x + \frac{3\pi}{4}, x \in \mathbb{R}.$

Exercice 8.5.

- 1) $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + C$; 2) $\frac{2}{5} (\sqrt{x})^5 + x + C$;
3) $C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$; 4) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C$;
5) $\operatorname{tg} x - x + C$; 6) $-\frac{1}{x} + \arctg x + C$; 7) $\operatorname{tg} x + C$.
8) $\ln|x| + 2\arctg x + C$; 9) $-\frac{1}{8(2x-3)^4} + C$;
10) $-\frac{5}{33} 8 - 3x)^{11/5} + C$;
11) $-\frac{1}{2} \cos(2x-3) + C$; 12) $\frac{1}{2} \ln|2x-7| + C$;
13) $\ln(\ln x) + C$; 14) $\frac{\ln^{m+1} x}{m+1} + C$; 15) $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$;
16) $-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C$; 17) $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$;
18) $-\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x + C$; 19) $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$;
20) $-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$; 21) $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C$;
22) $e^x + \frac{1}{e^x} + C$; 23) $x - 2\arctg x + C$;
24) $-x - 6\ln|-3+x| + C$; 25) $x - \operatorname{th} x + C$; 26) $x - \operatorname{cth} x + C$;
27) $\frac{1}{1+2\ln 2} e^{x2^{2x}} + C$; 28) $-\frac{5^{-x}}{\ln 5} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$;
29) $\arcsin \frac{x}{2} + 2\ln(x + \sqrt{x^2+4}) + C$;
30) $4\sqrt[3]{4}x - \frac{12\sqrt[3]{2}}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} + C.$

Exercice 8.6.

- 1) $-2\ln(1 + \sqrt{x+1}) + 2\sqrt{x+1} + C$;
2) $\frac{2\sqrt{x-1}}{35} (5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + C$;
3) $-\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} + C$; 4) $\ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$.
5) $\sqrt{2} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-2} + C$; 6) $2\arctg \sqrt{x} + C$;
7) $-3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1 + \sqrt[3]{x+1}| + \frac{3}{2} (\sqrt[3]{x+1})^2 + C$;
8) $x + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2} (\sqrt[3]{x})^2 + \frac{6}{5} (\sqrt[5]{x})^5 + 6\sqrt[5]{x} + 6\ln|\sqrt[5]{x}-1| + C$;
9) $-2\sqrt{(e^x+1)} + \frac{2}{3} (\sqrt{(e^x+1)})^3 + C$; 10) $\ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$;
11) $2\sqrt{1+\ln x} - \ln|\ln x| + 2\ln|\sqrt{1+\ln x}-1| + C$;
12) $\frac{1}{2} \ln^2 |\operatorname{tg} x| + C$; 13) $-\frac{1}{a^2 x} \sqrt{a^2+x^2} + C$;
14) $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C$;

- 15) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C$; 16) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$;
 17) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$; 18) $\ln \frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} + C$
 19) $2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + C$;
 20) $\ln|3x^2-7x+1| + C$;
 21) $\frac{3}{10} \ln(2-3x+5x^2) - \frac{11}{5\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{10x-3}{\sqrt{31}} + C$;
 22) $3\sqrt{x^2-4x+5} + C$;
 23) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \ln(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}) + C$;
 24) $-\frac{1}{2(x^2-1)} + C$; 25) $\frac{1}{8} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+5}\right) + C$;
 26) $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3} + C$; 27) $\frac{1}{3} \ln^3 x + C$; 28) $\frac{1}{7} \sin^7 x + C$;
 29) $-\sin \frac{1}{x} + C$; 30) $-2 \cos \sqrt{x} + C$; 31) $-\ln(1+\cos x) + C$;
 32) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}^3 x + C$; 33) $-\frac{1}{6} \arccos^3 2x + C$;
 34) $-\frac{1}{2} \ln^2(\arccos x) + C$; 35) $-\frac{3}{4} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}} + C$.

Exercice 8.8.

- 1) $\frac{x^{n+1}}{1+n} (\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$; 2) $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$;
 3) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$; 4) $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$;
 5) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$;
 6) $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$;
 7) $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}) + C$; 8) $x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$;
 9) $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$;
 10) $x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C$;
 11) $-e^{-x}(x^2+2x+2) + C$;
 12) $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \sin x + 6x \cos x + C$;
 13) $\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + C$;
 14) $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$;
 15) $-\frac{8}{27(\sqrt{x})^3} (\frac{9}{4} \ln^2 x + 3 \ln x + 2) + C$;
 16) $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$;
 17) $\frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$;
 18) $x \arccos^2 x + 2 \arccos x \sqrt{1-x^2} - 2x + C$;
 19) $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C$;
 20) $\frac{x^3}{3} \arcsin 2x + \frac{(2x^2+1)\sqrt{1-4x^2}}{36} + C$;

- 21) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C;$
 22) $\frac{x^4 - 1}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + C;$
 23) $\frac{e^{3x}}{3} (x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{38}{9}) + C;$
 24) $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{|x|} + C;$
 25) $-\frac{1}{2x^2} (\ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4}) + C;$
 26) $\frac{x(2x^2 + a^2)}{8} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8} a^4 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C;$
 27) $\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C;$
 28) $\frac{x(\sin \ln x - \cos \ln x)}{2} + C;$
 29) $\frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{2} e^{\arccos x} + C;$
 30) $\frac{\sin 2x - \cos 2x - 2}{8} e^{-2x} + C.$

Exercice 8.9.

- 1) $I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1};$ 2) $I_n = x \ln^n x - n I_{n-1};$
 3) $I_n = \frac{x^{\alpha+1} \ln^n x}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1};$ 4) $I_n = \frac{x^{n-1} \sqrt{x^2 + a}}{n} - \frac{n-1}{n} a I_{n-2};$
 5) $I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};$ 6) $I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};$
 7) $I_n = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^{n-1} x}{n} - \frac{n-1}{n} I_{n-2};$ 8) $I_n = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};$
 9) $I_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2};$
 10) $I_n = \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2};$
 11) $I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \frac{1}{a^2} I_{n-1}.$

Exercice 8.10.

- 1) $\ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} \right| + C;$
 2) $\frac{1}{5} \ln[(x-2)^2 \sqrt{2x+1}] + C;$
 3) $\ln \left| \frac{(x-1)^4 (x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C;$
 4) $\frac{3}{11} \ln|3x+1| - \frac{1}{3} \ln|x| + \frac{2}{33} \ln|2x-3| + C;$
 5) $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 4x + 2 \ln x + 5 \ln(x-2) - 3 \ln(x+2) + C;$
 6) $\frac{1}{4} x + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x-1| - \frac{9}{16} \ln|2x+1| + C;$
 7) $\ln|2x-1| - 6 \ln|2x-3| + 5 \ln|2x-5| + C;$

- 8) $\ln \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}} + C;$
- 9) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} \right| + C;$
- 10) $x + \frac{1}{6} \ln x - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C;$
- 11) $\frac{6}{x+1} + \ln \left| \frac{x^2}{x+1} \right| + C;$
- 12) $x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + C;$
- 13) $4 \ln x + \frac{1}{x+1} - 3 \ln(x+1) + C;$
- 14) $\ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C;$
- 15) $-\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x+4} + 2 \ln \left| \frac{x+4}{x+2} \right| + C;$
- 16) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|} + C;$
- 17) $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4} \ln|x| - \frac{47}{4} \ln|-2+x| + 20 \ln|x-3| + C;$
- 18) $-\frac{x}{(x^2-1)^2} + C;$
- 19) $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C;$
- 20) $\frac{1}{3} \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$
- 21) $\frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$
- 22) $x + \frac{x^2}{2} + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{1+x^2}} - \operatorname{arctg} x + C;$
- 23) $\ln \frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + C;$
- 24) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C;$
- 25) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C;$
- 26) $-\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2} \ln(|1+x|) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C;$
- 27) $\frac{1}{4} \left[\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \operatorname{arctg} x - \frac{7}{(x-1)^2} \right] + C;$
- 28) $\ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{2} + C;$
- 29) $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C;$
- 30) $\frac{2-x}{4(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} + C.$

Exercice 8.11.

- 1) $2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C;$
- 2) $6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3\ln(1 + t^2) - 6\operatorname{arctgt} + C,$
 $t = \sqrt[5]{x+1}.$
- 3) $\frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1 + \sqrt[5]{x})^2(1 - \sqrt[5]{x} + 2\sqrt[3]{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt{7}} + C;$
- 4) $\frac{2}{(1 + \sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1 + \sqrt[4]{x}} + C;$
- 5) $\frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln(t^2 + t + 2) -$
 $-\frac{27}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C, \quad t = \sqrt[3]{2+x};$
- 6) $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C;$
- 7) $\ln \frac{x}{(1 + \sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + C;$
- 8) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[5]{x} + 48\sqrt[12]{x} + 3\ln(1 + \sqrt[12]{x}) +$
 $+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[5]{x} - \sqrt[12]{x} + 2) - \frac{171}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[12]{x} - 1}{\sqrt{7}} + C;$
- 9) $6\left[-\frac{1}{6}(x+1) + \frac{1}{9}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{(x+1)^4} + \frac{1}{7}\sqrt[5]{(x+1)^7} + \frac{1}{5}\sqrt[5]{(x+1)^5} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]$
- 10) $\ln \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right] + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$

Exercice 8.12.

- 1) $\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + \frac{24}{11}(\sqrt[5]{x})^{11} + \frac{36}{13}(\sqrt[5]{x})^{13} +$
 $+\frac{8}{5}(\sqrt{x})^5 + \frac{6}{17}(\sqrt[5]{x})^{17} + C;$
- 2) $3\left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \right| + \frac{2\sqrt[3]{x} + 3}{2(1 + \sqrt[3]{x})^2} \right] + C;$
- 3) $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1} - 1) - \frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right] +$
 $+\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x^2+1} + 1}{\sqrt{3}} + C;$
- 4) $\frac{1}{6}\ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C, \quad z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x};$
- 5) $\frac{1}{4}\ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C;$
- 6) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C;$
- 7) $\frac{1}{4}\ln \frac{\sqrt{1-x^4} + 1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + C;$
- 8) $\frac{3}{7}(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 3)\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} + C;$
- 9) $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^3} + x}{x\sqrt{3}} -$

- $$-\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt[3]{1+x^3} + x}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^3)^2} + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2}} \right| + C;$$
- 10) $\frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{6} \ln \frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$
 $t = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}};$
- 11) $\frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{3} \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + C, x > 0;$
- 12) $\frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}} - 21 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C;$
- 13) $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{12} \ln \frac{t^2+t+1}{t^2-t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{z\sqrt{3}} + C,$
 $t = \sqrt[6]{1+x^6}.$

Exercice 8.13.

- 1) $\frac{1}{2} \arccos \frac{2-x}{\sqrt{2}x} + C;$ 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + C;$
- 3) $\arcsin \frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C;$
- 4) $C - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1} \right|;$
- 5) $\ln \left| 1+x+\sqrt{2x+x^2} \right| - \frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}} + C;$
- 6) $C - \frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3} \right|;$
- 7) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \ln \left| x-1+\sqrt{x^2-2x-1} \right| + C;$
- 8) $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{1}{24}\sqrt{3} \ln \left| \sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1) \right| + C;$
- 9) $C - \frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})} - \frac{3}{2} \ln \left| 2x-1-2\sqrt{x^2-x+1} \right| + 2 \ln \left| x-\sqrt{x^2-x+1} \right|;$
- 10) $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C;$
- 11) $(x^2-5x+20)\sqrt{x^2+4x+5} - 15 \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}) + C;$
- 12) $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{95}{24}x - \frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{35}{8} \ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}) + C;$
- 13) $\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C;$
- 14) $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} + C;$
- 15) $\frac{3}{2(2t+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|2t+1|^3} + C, t = x + \sqrt{x^2+x+1}.$

Exercice 8.14.

- 1) $\frac{\cos^3 x}{15} (3 \cos^2 x - 5)C$; 2) $\frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$;
- 3) $-\frac{1}{2 \sin^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C$; 4) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{2}x + C$;
- 5) $C - \frac{1}{2 \sin^2 x} \cos x + \frac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$;
- 6) $\frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10 \operatorname{tg}^2 x + 1)}{3 \operatorname{tg}^3 x} + C$;
- 7) $C - \frac{1}{1 - \cos x}$;
- 8) $\frac{5}{16}x + \frac{\sin 2x}{12} \left(\cos^4 x + \frac{5}{4} \cos^2 x + \frac{15}{8} \right) + C$;
- 9) $-\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C$;
- 10) $x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$;
- 11) $\frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 2 \ln|\operatorname{tg} x| + C$;
- 12) $\frac{1}{4} \ln\left|\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right| + \frac{1}{4} \sin 2x + C$;
- 13) $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$; 14) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C$;
- 15) $\ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C$;
- 16) $\frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}\right) + C$;
- 17) $C - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}$;
- 18) $\frac{\cos x (\cos x - \sin x)}{4} - \frac{1}{4} \ln|\cos x - \sin x| + C$;
- 19) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$; 20) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$;
- 21) $\frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + C$;
- 22) $\frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + C$;
- 23) $\frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x + C$;
- 24) $\frac{1}{192} \sin 6x - \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16}x + C$;
- 25) $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$;
- 26) $\frac{1}{2} \frac{\sin x - \cos^2 x \ln(1 + \sin x) + \cos^2 x \ln(\cos x)}{\cos^2 x} + C$;
- 27) $\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$;
- 28) $-\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln(\sin x) + C$.

Exercice 8.15.

- 1) $\frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C$;
- 2) $\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2}x + C$;

- 3) $C - \frac{1}{2} \operatorname{th}^2 x - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{th} x - 1) - \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{th} x);$
- 4) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} 2x) + C;$
- 5) $\frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x - \frac{1}{8} x + C;$
- 6) $\frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{3}{8} x + C;$
- 7) $\operatorname{argth}(\sqrt{\operatorname{th} x}) - \operatorname{arctg}(\sqrt{\operatorname{th} x}) + C.$

Exercice 8.16

- 1) $F(x) = 2 - e^{-x} + C$ si $x \geq 0$ et $F(x) = e^x + C$ si $x < 0$;
- 2) $F(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) \cdot \sin x + 2E\left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right);$
- 3) $F(x) = x \log x - x + C$ si $x \geq 1$ et
 $F(x) = -(x \log x - x) - 2 + C$ si $0 < x < 1$;
- 4) $F(x) = \frac{E(x)}{\pi} (E(x) - (1)^{E(x)} \cos \pi x), \quad x \geq 0;$
- 5) $F(x) = x - \frac{1}{3} x^3$ si $|x| \leq 1$ et $x(1 - \frac{1}{2}|x|) + \frac{1}{6} \operatorname{sgn} x$ si $|x| > 1$;
- 6) $F(x) = \frac{1}{2} (1+x)|1+x| + \frac{1}{2} (1-x)|1-x|.$

Exercice 8.17.

- 1) $\frac{1}{3} \left(\sqrt{x^2 + 2x} \right)^3 + C;$
- 2) $\frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x + C;$
- 3) $2e^{\sqrt{x}} + C;$
- 4) $\operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C;$
- 5) $-\frac{3}{x-1} + 2 \ln|x-1| + \frac{2}{3} \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} (2x+1) + C;$
- 6) $C - \frac{1}{3} \ln|1 + 3x^3 - x^6|;$
- 7) $(e^x(x-1) + C$ si $x \geq 0$, $-e^x(x-1) - 2 + C$ si $x < 0$;
- 8) $C - \ln(3 + e^{-x});$
- 9) $6\sqrt[3]{(1+x)^2} \left(\frac{(1+x)^2}{16} - \frac{1+x}{5} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} + \frac{1}{4} \right) + C;$
- 10) $2\sqrt{1+x^2} + 3 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$
- 11) $\frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x + C;$
- 12) $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C;$
- 13) $C - \frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) \right];$
- 14) $2x - \operatorname{tg} x + C;$
- 15) $-\frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + \frac{3}{4} \ln|t-1| - \frac{16}{27} \ln|t-2| -$
 $-\frac{17}{108} \ln|t+1| + C, \quad t = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x+1};$
- 16) $C - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + 3 \ln|\operatorname{tg} x|;$

- 17) $\frac{3}{2}\sqrt{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{6}x^2\sqrt{2+2x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{2+2x^2} + C;$
- 18) $\frac{x^3}{3} - x^2$ si $x < 0$, $-\frac{x^3}{3} + x^2$ si $0 \leq x \leq 2$,
 $\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{8}{3}$ si $x > 2$;
- 19) $3\sqrt{(x^2+2x+2)} - 4\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C;$
- 20) $-\ln(x-3) + 2\ln(x-4) + C$
- 21) $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{9}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}) + C;$
- 22) $-\frac{e^{x^2}}{2}(x^4+2x^2+2) + C;$
- 23) $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3 + C;$
- 24) $\frac{1}{e^{\cos x}} + C;$
- 25) $\ln \frac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t+1}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1+2t^2}{\sqrt{3}} + C, \quad t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$
- 26) $C - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{ctg} 2x);$
- 27) $\frac{5}{4}t^4 - \frac{5}{9}t^9 + C, \quad t = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}};$
- 28) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C;$
- 29) $\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right) + C;$
- 30) $C - \frac{1}{2} \ln|1-\ln^2 x|;$
- 31) $3\ln|x-2| + 2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2(1+x^2)} + C;$
- 32) $-\frac{2}{3}(\sqrt{1-e^x})^3 + C;$
- 33) $\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{(1+2x^2)} + C;$
- 34) $\sin x - \operatorname{arctg}(\sin x) + C;$
- 35) $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x^4} + \ln(1+x^4) \right) + C;$
- 36) $6\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} + \frac{6}{5}(\sqrt[6]{x})^5 - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C;$
- 37) $\frac{1}{4}e^{2x^2} + C;$
- 38) $-t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C, \quad t = \sqrt{1-x^2};$
- 39) $\frac{3t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \quad t = \frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x};$
- 40) $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C;$
- 41) $\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - 2\operatorname{arctg} t + C, \quad t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x};$
- 42) $\frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} \left[(t-1)^3 + \frac{1}{(t-1)^3} \right] + \left[(t-1)^2 - \frac{1}{(t-1)^2} \right] + \right.$
 $\left. + \left[(t-1) - \frac{1}{t-1} \right] \right\} + \frac{1}{2} \ln|t-1| + C,$
 $t = x + \sqrt{x^2-2x+2}.$

- 43) $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$ et $\ln|\operatorname{arctg} x| + C$ si $n = -1$;
- 44) $\frac{1}{3} \left(\cos 3x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{3x}{2} \right| \right) + C$;
- 45) $\frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| - \frac{3}{2} \cos x - \frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} + C$;
- 46) $\ln|\ln \sin x| + C$;
- 47) $\frac{2}{3} \ln(1 + \sqrt{x^3}) + C$;
- 48) $C - \ln(1 - x + \sqrt{5 - 2x + x^2})$;
- 49) $-\cos x(1 + \operatorname{sgn}(\sin x) + 2E(\frac{x}{\pi}))$;
- 50) x si $|x| \leq 1$, $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x$ si $|x| > 1$;
- 51) $\frac{2}{9} \sqrt{9x^2 - 4} - \frac{1}{3} \ln(3x + \sqrt{9x^2 - 4}) + C$;
- 52) $\frac{1}{80} \sin 5x + \frac{5}{48} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x + C$;
- 53) $-\frac{1}{2} \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C$;
- 54) $\frac{8}{15} \sqrt[5]{x^{15}} + C$
- 55) $\frac{1}{\ln b - \ln a} \left(\frac{b^x}{a^x} - \frac{a^x}{b^x} \right) - 2x + C$

Corrigés détaillés de certains exercices du chapitre VIII.

Exercice 8.5.

- 2) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)dx =$
 $= \int (x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} + x - x^{\frac{1}{2}} + 1)dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 1)dx =$
 $= \int x^{\frac{3}{2}}dx + \int dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C.$
- 4) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2} \int (\frac{1}{\cos^2 x} + 1)dx = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x) + C.$
- 8) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx =$
 $= \int \frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)}dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2})dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{1+x^2}dx =$
 $= \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C.$
- 10) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx = \int (8-3x)^{\frac{6}{5}}dx = -\frac{1}{3} \int (8-3x)^{\frac{6}{5}}d(8-3x) =$
 $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{11} (8-3x)^{\frac{11}{5}} + C = -\frac{5}{33} \sqrt[5]{(8-3x)^{11}} + C.$
- 16) $\int e^{-x^3}x^2dx = -\frac{1}{3} \int e^{-x^3}d(-x^3) = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C.$
- 27) $\int 2^{2x}e^xdx = \int 4^xe^xdx = \int (4e)^xdx = \frac{1}{\ln(4e)}(4e)^x + C = \frac{1}{\ln 4 + 1}(4e)^x.$
- 29) $\int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx =$
 $= \int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{4+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} =$
 $= \arcsin \frac{x}{2} + 2 \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C.$

Exercice 8.6.

- 2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx.$ Posons $t = \sqrt{x-1}$, alors on a: $x = 1+t^2$ et $dx = 2tdt$.

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx &= \int \frac{(1+t^2)^3}{t} 2tdt = 2 \int (1+t^2)^3 dt = \\ &= 2 \int (1+3t^2+3t^4+t^6)dt = \\ &= 2t + 2t^3 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{2}{7}t^7 + C = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)^3} + \frac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} + C = \\
 &= \frac{2}{35}\sqrt{x-1}(5x^3 + 6x^2 + 8x + 16) + C.
 \end{aligned}$$

7) $\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$. Posons $t = \sqrt[3]{x+1}$. Alors on a $x = t^3 - 1$ et $dx = 3t^2 dt$.

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = 3 \int (t-1 + \frac{1}{t+1}) dt = \\
 &= \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3 \ln|t+1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3 \ln|\sqrt[3]{x+1} + 1| + C.
 \end{aligned}$$

9) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$. Posons $t = e^x$. Alors on a $e^x dx = dt$ et $dx = \frac{dt}{t}$.

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \int \frac{t^2}{\sqrt{t+1}} \frac{dt}{t} = \int \frac{t+1-1}{\sqrt{t+1}} dt = \int (\sqrt{t+1} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}) dt = \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3} - 2\sqrt{t+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3} - 2\sqrt{e^x+1} + C.
 \end{aligned}$$

11) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$. Posons $t = \sqrt{1+\ln x}$. Alors on a

$$\ln x = t^2 - 1, \quad x = e^{t^2-1} \quad \text{et} \quad dx = 2te^{t^2-1} dt.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx &= \int \frac{t \cdot 2te^{t^2-1}}{e^{t^2-1} \cdot (t^2-1)} dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = 2 \int (1 + \frac{1}{t^2-1}) dt = \\
 &= \int (2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt = 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \\
 &= 2\sqrt{1+\ln x} + \ln|\sqrt{1+\ln x} - 1| - \ln|\sqrt{1+\ln x} + 1| + C.
 \end{aligned}$$

15) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$. Posons $x = \operatorname{tg} t$. Alors on a

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\cos t}.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^4 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t} dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3\sin^3 t} + C.$$

Comme $\sin t = \cos t \cdot \operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, alors

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C.$$

17) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$. Posons $x = \frac{3}{t}$. Alors on a $dx = -\frac{3}{t^2} dt$ et $x^2 = \frac{9}{t^2}$.

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} &= \int \frac{-\frac{3}{t^2} dt}{\frac{9}{t^2} \sqrt{\frac{9}{t^2} - 9}} dt = -\int \frac{t}{9\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{18} \int \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \frac{1}{9} \sqrt{1-t^2} + C = \frac{1}{9} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{x}\right)^2} + C = \frac{1}{9} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} + C. \end{aligned}$$

19) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$. Posons $x = 2 \sin t$. Alors on a $dx = 2 \cos t dt$.

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= \int 4 \sin^2 t \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \\ &= 16 \int \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int \sin^2 2t dt = \\ &= 2 \int (1 - \cos 4t) dt = 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C = 2t - \sin 2t \cos 2t + C = \\ &= 2t - 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{4} (2 - x^2) \sqrt{4 - x^2} + C. \end{aligned}$$

20) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1} dx$. Posons $3x^2 - 7x + 1 = t$. Alors on a $(6x-7)dx = dt$.

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|3x^2 - 7x + 1| + C.$$

23) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$. Transformons la fonction à intégrer de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx &= \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4) + 3 - \frac{1}{2}}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx = \\ &= \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4)}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx = \\ &= \frac{1}{8} J_1 + \frac{5}{2} J_2. \end{aligned}$$

Calculons séparément J_1 et J_2 . Pour calculer la première intégrale, posons $4x^2 + 4x + 3 = t$. Alors on a $(8x+4)dx = dt$. En remplaçant dans J_1 , on obtient

$$J_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{4x^2+4x+3} + C.$$

La deuxième intégrale se calcule directement comme suit:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+2}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|2x+1 + \sqrt{(2x+1)^2+2}| + C = \frac{1}{2} \ln|2x+1 + \sqrt{4x^2+4x+3}| + C. \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \ln|2x+1 + \sqrt{4x^2+4x+3}| + C.$$

26) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$. Posons $t = x^3 + 1$. Alors on a $3x^2 dx = dt$.

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 1)^3} + C.$$

33) $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$. Posons $t = \arccos 2x$. Alors on a: $-\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} = dt$.

En remplaçant dans l'intégrale donnée, on obtient:

$$\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int t^2 dt = -\frac{1}{2} \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{6} \arccos^3 2x + C.$$

Exercice 8.8.

5) $\int x \cos^2 x dx$. Avant d'intégrer par parties transformons d'abord l'intégrale comme suit:

$$\int x \cos^2 x dx = \int x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{x}{2} dx + \int \frac{x \cos 2x}{2} dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx.$$

Calculons maintenant $\int x \cos 2x dx$. Posons pour cela:

$x = u$ et $\cos 2x dx = dv$. D'où $dx = du$ et $v = \frac{1}{2} \sin 2x$ et, alors:

$$\int x \cos 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Ainsi

$$\int x \cos^2 x dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.$$

10) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Posons $x^2 = u$ et $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = dv$. Alors on a

$$du = 2x dx \text{ et } v = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2},$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} &= x^2 \sqrt{1+x^2} - \int 2x \sqrt{1+x^2} dx = x^2 \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \\ &= x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C. \end{aligned}$$

14) $\int \ln^2 x dx$. Posons $\ln^2 x = u$ et $dx = dv$. Alors on a $du = 2 \ln x \frac{dx}{x}$, $v = x$ et

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx.$$

En appliquant encore une fois cette méthode pour l'intégrale $\int \ln x dx$, on obtient

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x}) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

17) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$. Posons $\sqrt{a^2 + x^2} = u$ et $dx = dv$. Alors on a

$$du = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx, \quad v = x \text{ et}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \\
 &= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx + a^2 \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 2 \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C \Rightarrow \\
 \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C.
 \end{aligned}$$

22) $\int x^3 \arctg x dx$. Posons $u = \arctg x$ et $x^3 dx = dv$. Alors on a $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^4}{4}$ et

$$\begin{aligned}
 \int x^3 \arctg x dx &= \frac{x^4}{4} \arctg x - \int \frac{x^4}{4} \frac{dx}{1+x^2} = \\
 &= \frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \\
 &= \frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{1}{4} \int (x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}) dx = \\
 &= \frac{x^4}{4} \arctg x - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \arctg x + C.
 \end{aligned}$$

27) $\int e^{ax} \sin bxdx$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$. Posons $e^{ax} = u$ et $\sin bxdx = dv$. Alors on a $du = ae^{ax} dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$ et

$$\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

On applique maintenant la même méthode pour calculer l'intégrale $\int e^{ax} \cos bxdx$ en posant $e^{ax} = u$, $\cos bxdx = dv$. Alors $du = ae^{ax} dx$, $v = \frac{1}{b} \sin bx$ et

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Ainsi on obtient

$$\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bxdx + C.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 (1 + \frac{a^2}{b^2}) \int e^{ax} \sin bxdx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx + C \Rightarrow \\
 \int e^{ax} \sin bxdx &= -\frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + C = \\
 &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.
 \end{aligned}$$

Exercice 8.9.

1) $J_n = \int x^n e^{ax} dx$, $a \neq 0, n \geq 1$. Posons $x^n = u$ et $e^{ax} dx = dv$. Alors on a $du = nx^{n-1} dx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$ et

$$\begin{aligned}
 J_n &= x^n \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} nx^{n-1} dx = \\
 &= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} J_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Ainsi $J_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} J_{n-1}$ avec $J_0 = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$.

3) $J_n = \int x^\alpha \ln^n x dx$, $\alpha \neq -1$, $n \geq 1$. Posons $\ln^n x = u$ et $x^\alpha dx = dv$. Alors on a $du = n \frac{\ln^{n-1} x}{x} dx$, $v = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et:

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln^n x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} n \frac{\ln^{n-1} x}{x} dx = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln^n x - \frac{n}{\alpha+1} \int x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln^n x - \frac{n}{\alpha+1} J_{n-1}. \end{aligned}$$

Donc $J_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \ln^n x - \frac{n}{\alpha+1} J_{n-1}$.

5) $J_n = \int \sin^n x dx$, $n > 2$. Posons $\sin^{n-1} x = u$ et $\sin x dx = dv$. Alors on a $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$, $v = -\cos x$ et

$$\begin{aligned} J_n &= \int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx = \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n, \end{aligned}$$

c'est à dire que

$J_n + (n-1) J_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) J_{n-2}$ et donc

$$J_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

10) $J_n = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x}$, $n > 2$.

Tout d'abord on transforme l'intégrale donnée et puis on applique la formule d'intégration par parties:

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^n x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} - \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^n x} dx = \\ &= J_{n-2} - \int \operatorname{sh} x \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^n x} dx. \end{aligned}$$

Posons ensuite $\operatorname{sh} x = u$ et $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^n x} dx = dv$. Alors on a

$$\begin{aligned} adu &= \operatorname{ch} x dx, \quad v = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch}^n x} = -\frac{1}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} \text{ et} \\ J_n &= J_{n-2} + \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} = \\ &= J_{n-2} + \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} J_{n-2} = \\ &= \frac{n-2}{n-1} J_{n-2} + \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x}. \end{aligned}$$

Donc $J_n = \frac{n-2}{n-1} J_{n-2} + \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x}$.

BROCHURE D'EXERCICES D'ANALYSE 2
Intégrale indéfinie, intégrale définie et équations différentielles du premier ordre
avec réponses et corrigés par
OSMANOV H. et KHELIFATI S

Exercice 8.10.

5) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$. La fraction $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$ n'est pas régulière. En faisant la division euclidienne, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} &= x^2 + x + 1 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \\ &= x^2 + x + 1 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)}.\end{aligned}$$

Décomposons la fraction rationnelle régulière $\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)}$ en éléments simples de type

I. On a la formule de décomposition:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x+2}.$$

En réduisant la fraction du second membre au même dénominateur et en égalisant les numérateurs, on obtient

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Dx(x-2).$$

Cette égalité est une identité en x . En donnant à la variable x les valeurs $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, on peut déterminer coefficients A , B , D . On a

$$x = 0 \Rightarrow -8 = -4A \Rightarrow A = 2.$$

$$x = 2 \Rightarrow 40 = 8B \Rightarrow B = 5.$$

$$x = -2 \Rightarrow -24 = 8D \Rightarrow D = -3.$$

Ainsi on obtient la décomposition suivante:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx &= \int (x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

14) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$. Tout d'abord factorisons le dénominateur

$Q(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$. Nous avons

$$\begin{aligned}x^3 + 5x^2 + 8x + 4 &= x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 6x + 2x + 4 = \\ &= x^2(x+2) + 3x(x+2) + 2(x+2) = \\ &= (x+2)(x^2 + 3x + 2) = (x+2)^2(x+1).\end{aligned}$$

Dans ce cas, la fraction rationnelle se décompose en éléments simples de types I et II.

$$\frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{A_1}{(x+2)^2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{B}{x+1}.$$

En réduisant la fraction du second au même dénominateur et égalisant les numérateurs, on obtient

$$x^2 = A_1(x+1) + A_2(x+2)(x+1) + B(x+2)^2.$$

En égalisant les coefficients, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 = A_2 + B \\ 0 = A_1 + 3A_2 + 4B \\ 0 = A_1 + 2A_2 + 4B \end{cases}$$

La résolution de ce système donne: $A_1 = -4$, $A_2 = 0$, $B = 1$ et la décomposition est:

$$\frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{-4}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Ainsi

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = -4 \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \int \frac{dx}{x+1} = \frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C.$$

25) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$. Le dénominateur possède deux racines réelles simples

$x = 0$, $x = -1$ et une complexe simple. Dans ce cas, la fraction rationnelle $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}$ se décompose en éléments simples de types I et III. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+1)x(x+1)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x^2+1} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}. \end{aligned}$$

En réduisant la fraction du second membre au même dénominateur et égalisant les numérateurs, on obtient

$$1 = A(x^2+1)(x+1) + B(x^2+1)x + (Mx+N)x(x+1)$$

$$\text{et } x = 0 \Rightarrow 1 = A, \quad x = -1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Pour trouver les coefficients M et N , égalisons les coefficients de x^3 et x^2 . On obtient

$$\begin{cases} 0 = A + B + M \\ 0 = A + B + N. \end{cases},$$

La résolution du système donne $M = -\frac{1}{2}$ et $N = -\frac{1}{2}$. Par conséquent

$$\frac{1}{(x^2+1)x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2x^2+1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)x(x+1)} &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{2(x+1)} dx - \int \frac{x+1}{2(x^2+1)} dx = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| - \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

30) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$. Le dénominateur comporte deux racines complexes doubles. La

fraction rationnelle se décompose en éléments simples de types III et IV. Nous avons

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+2)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+2}.$$

En réduisant la fraction du second membre au même dénominateur et égalisant les numérateurs, on obtient

$$x^3+x-1 = M_1x+N_1 + (M_2x+N_2)(x^2+2).$$

En égalisant les coefficients de x^3, x^2, x^1, x^0 , on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 1 = M_2 \\ 0 = N_2 \\ 1 = M_1 + 2M_2 \\ -1 = N_1 + 2N_2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient $M_2 = 1$, $N_2 = 0$, $M_1 = -1$, $N_1 = -1$. Par

conséquent

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2} + \frac{x}{x^2 + 2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx &= -\int \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2} dx + \int \frac{x}{x^2 + 2} dx = \\ &= -\int \frac{x dx}{(x^2 + 2)^2} - \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$ séparément. On a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 2 - x^2}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2} - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx. \end{aligned}$$

Posons $x = u$ et $\frac{xdx}{(x^2 + 2)^2} = dv$. On a alors

$$du = dx \text{ et } v = -\frac{1}{2(x^2 + 2)}$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4(x^2 + 2)} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4(x^2 + 2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4(x^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{2 - x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{2} + C.$$

Exercice 8.11

2) $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$. Comme le plus petit commun multiple (ppcm) de 2 et 3 est 6, alors on

peut poser $x + 1 = t^6$. Ce qui donne $x = t^6 - 1$, $dx = 6t^5 dt$. En remplaçant dans l'intégrale donnée, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{1 - t^3}{1 + t^2} \cdot 6t^5 dt = -6 \int \frac{t^8 - t^5}{1 + t^2} dt = \\ &= -6 \int (t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t-1}{1+t^2}) dt = \\ &= -\frac{6}{7} t^7 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{3}{2} t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} - 6 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= -\frac{6}{7} \sqrt[6]{(x+1)^7} + \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} + \frac{3}{2} \sqrt[6]{(x+1)^4} - \\ &\quad - 2\sqrt[6]{(x+1)^3} - 3\sqrt[6]{(x+1)^2} t^2 + 6\sqrt[6]{x+1} + \\ &\quad + 3 \ln(\sqrt[6]{(x+1)^2} + 1) - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+1} + C. \end{aligned}$$

6) $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$. Tout d'abord transformons la fonction à intégrer sous la forme $R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})$. On a

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx.$$

Posons alors $\frac{x+1}{x-1} = t^2$. Ce qui donne $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ et $dx = -\frac{4tdt}{(t^2-1)^2}$.

En substituant dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = -4 \int \frac{tdt}{(t+1)^3(t-1)}.$$

Décomposons maintenant la fraction rationnelle régulière $\frac{t}{(t+1)^3(t-1)}$ en éléments simples. On a

$$\frac{t}{(t+1)^3(t-1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B_1}{(t+1)^3} + \frac{B_2}{(t+1)^2} + \frac{B_3}{t+1}.$$

$$t = A(t+1)^3 + B_1(t-1) + B_2(t-1)(t+1) + B_3(t-1)(t+1)^2.$$

$$t = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}.$$

$$t = -1 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{2}.$$

En égalisant les coefficients de t^3 et t^0 , on déduit

$$t^3 : 0 = A + B_3 \Rightarrow B_3 = -\frac{1}{8}.$$

$$t^0 : 0 = A - B_1 - B_2 - B_3 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{(t+1)^3(t-1)} &= \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^3} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= \frac{1}{8} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{8} \ln|t+1| + C = \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{t}{4(t+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= -4 \int \frac{tdt}{(t+1)^3(t-1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{t}{(t+1)^2} + C, \end{aligned}$$

avec $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. En remplaçant t , on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2} \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C.$$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$. On a : $\text{ppcm}(2, 3, 4) = 12$, alors on pose $\sqrt[12]{x} = t$, et donc

BROCHURE D'EXERCICES D'ANALYSE 2
Intégrale indéfinie, intégrale définie et équations différentielles du premier ordre
avec réponses et corrigés par
OSMANOV H. et KHELIFATI S

$x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$. En remplaçant dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}} &= \int \frac{12t^{11}dt}{t^6 + t^4 + 2t^3} = 12 \int \frac{t^8}{t^3 + t + 2} dt = \\ &= 12 \int (t^5 - t^3 - 2t^2 + t + 4 + \frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2}) dt = \\ &= 12(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 4t) + 12 \int \frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} dt = \\ &= 2t^6 - 3t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 48t + 12 \int \frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} dt.\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on la décompose en éléments simples. On a

$$\frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} = \frac{3t^2 - 6t - 8}{(t+1)(t^2 - t + 2)}$$

et

$$\frac{3t^2 - 6t - 8}{(t+1)(t^2 - t + 2)} = \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{t^2 - t + 2} \left(\frac{11}{4}t - \frac{17}{2} \right) = \frac{A}{t+1} + \frac{Mt + N}{t^2 - t + 2}.$$

$$3t^2 - 6t - 8 = A(t^2 - t + 2) + (Mt + N)(t+1).$$

$$t^2 : 3 = A + M$$

$$t^1 : -6 = -A + M + N$$

$$t^0 : -8 = 2A + N.$$

En résolvant ce système on obtient $A = \frac{1}{4}$, $M = \frac{11}{4}$, $N = -\frac{17}{2}$. Ainsi on trouve

$$\frac{3t^2 - 6t - 8}{(t+1)(t^2 - t + 2)} = \frac{1}{4(t+1)} + \frac{11t - 34}{4(t^2 - t + 2)}.$$

D'où il découle

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^2 - 6t - 8}{(t+1)(t^2 - t + 2)} dt &= \\ &= \int \frac{\frac{1}{4}}{t+1} dt + \int \frac{11t - 34}{4(t^2 - t + 2)} dt = \frac{1}{4} \ln|t+1| + \frac{1}{4} \int \frac{11t - 34}{t^2 - t + 2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln|t+1| + \frac{11}{8} \int \frac{2t-1}{t^2 - t + 2} dt - \frac{57}{8} \int \frac{dt}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \\ &= \frac{1}{4} \ln|t+1| + \frac{11}{8} \ln|t^2 - t + 2| - \frac{57}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{7}} + C.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}} &= \\ &= 2t^6 - 3t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 48t + 12 \int \frac{3t^2 - 6t - 8}{t^3 + t + 2} dt = \\ &= 2t^6 - 3t^4 - 8t^3 + 6t^2 + 48t + 3 \ln|t+1| + \\ &\quad + \frac{33}{2} \ln|t^2 - t + 2| - \frac{171}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{7}} + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[5]{x} + 48\sqrt[12]{x} + 3 \ln(1 + \sqrt[12]{x}) + \frac{33}{2} \ln(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 2) - \frac{171}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[12]{x} - 1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

Exercice 8.12.

1) $\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$. On a $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = 4$, c'est à dire on est dans le premier cas (voir cours n°VIII.15). On pose alors $x = z^6$ et on a $dx = 6z^5 dz$. Il vient alors que

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx &= \int z^3 (1 + z^2)^4 \cdot 6z^5 dz = \\
 &= 6 \int z^8 (1 + 4z^2 + 6z^4 + 4z^6 + z^8) dz = \\
 &= 6 \int (z^8 + 4z^{10} + 6z^{12} + 4z^{14} + z^{16}) dz = \\
 &= \frac{2}{3} z^9 + \frac{24}{11} z^{11} + \frac{36}{13} z^{13} + \frac{8}{5} z^{15} + \frac{6}{17} z^{17} + C.
 \end{aligned}$$

En remplaçant $z = \sqrt[3]{x}$, on trouve

$$\begin{aligned}
 &\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx = \\
 &= x \left(\frac{2}{3} \sqrt{x} + \frac{24}{11} \sqrt[3]{x^5} \right) + x^2 \left(\frac{36}{13} \sqrt[3]{x} + \frac{8}{5} \sqrt{x} + \frac{6}{17} \sqrt[3]{x^5} \right) + C.
 \end{aligned}$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. On a $m = 0$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{3}$ et

$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ est un entier. On est dans le troisième cas (voir cours n°VIII.15). On pose alors $\frac{1+x^3}{x^3} = z^3$. Ce qui donne $x = \frac{1}{\sqrt[3]{z^3-1}}$ et $dx = -\frac{z^2 dz}{\sqrt[3]{(z^3-1)^4}}$.

En remplaçant dans l'intégrale donnée, nous obtenons

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = - \int \frac{\sqrt[3]{z^3-1}}{z} \cdot \frac{z^2 dz}{\sqrt[3]{(z^3-1)^4}} = - \int \frac{z}{z^3-1} dz.$$

Décomposons la fraction rationnelle régulière $\frac{z}{z^3-1}$ en éléments simples. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{z^3-1} &= \frac{z}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{Mz+N}{z^2+z+1} \\
 \Rightarrow z &= A(z^2+z+1) + (Mz+N)(z-1).
 \end{aligned}$$

Egalisons les coefficients de z^2, z^1, z^0 .

$$z^2 : 0 = A + M$$

$$z^1 : 1 = A + N - M$$

$$z^0 : 0 = A - N$$

En résolvant ce système, on trouve $A = \frac{1}{3}$, $M = -\frac{1}{3}$, $N = \frac{1}{3}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{z^3-1} &= \frac{1}{3(z-1)} - \frac{z-1}{3(z^2+z+1)}. \\
 \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= - \int \frac{z}{z^3-1} dz = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{z-1} dz + \frac{1}{3} \int \frac{z-1}{z^2+z+1} dz = \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{2}(2z+1) - \frac{3}{2}}{z^2+z+1} dz = \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{6} \int \frac{(2z+1)dz}{z^2+z+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+z+1} = \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{6} \ln|z^2+z+1| - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{6} \ln|z^2+z+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

De cette façon nous avons trouvé que

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{6} \ln \frac{|z^2+z+1|}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C$$

avec $z = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

8) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$. On a $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = 2$

On est dans le deuxième cas (voir cours n°VIII. 15). Posons alors

$$1 + \sqrt[4]{x} = z^3 \Rightarrow x = (z^3 - 1)^4, \quad dx = 4(z^3 - 1)^3 3z^2 dz.$$

En substituant dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 12 \int \frac{z \cdot (z^3 - 1)^3 \cdot z^2}{(z^3 - 1)^2} dz = 12 \int z^3 (z^3 - 1) dz = \\ &= \frac{12}{7} z^7 - 3z^4 + C = \frac{12}{7} (\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^7 - 3(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^4 + C = \\ &= \frac{3}{7} (\sqrt[4]{x} + 4\sqrt{x} - 3) \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} + C. \end{aligned}$$

Exercice 8.13.

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. : $-\frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \frac{1}{2} \frac{2x+4}{\sqrt{(x+2)^2}}$ On peut appliquer la première

substitution d'Euler en posant: $\sqrt{x^2+4x-4} = x+t$. Ce qui donne

$$x^2+4x-4 = x^2+2xt+t^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{t^2+4}{4-2t}, \quad dx = \frac{4+4t-t^2}{2(2-t)^2} dt \text{ et}$$

$$\sqrt{x^2+4x-4} = \frac{t^2+4}{4-2t} + t = \frac{4+4t-t^2}{4-2t}.$$

D'où il découle

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} &= \int \frac{\frac{4+4t-t^2}{2(2-t)^2}}{\frac{t^2+4}{4-2t} \cdot \frac{4+4t-t^2}{4-2t}} dt = \int \frac{2dt}{t^2+4} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+4x-4} - x}{2} + C. \end{aligned}$$

4) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$. Appliquons la première substitution d'Euler.

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+t \Rightarrow x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \quad dx = \frac{2t-2t^2-2}{(1-2t)^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2-1}{1-2t} + t = \frac{t-t^2-1}{1-2t}.$$

En remplaçant dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{\frac{2t-2t^2-2}{(1-2t)^2}}{\frac{t^2+2t-2}{1-2t} \cdot \frac{t-t^2-1}{1-2t}} dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2+2t-2} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2-3} = \frac{2}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} \right| + C \end{aligned}$$

avec $t = \sqrt{x^2+x+1} - x$.

6) $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. Le polynôme $4x-x^2$ admet deux racines réelles

$x = 0$ et $x = 4$. On peut appliquer la troisième substitution d'Euler en posant $\sqrt{4x - x^2} = t \cdot x$. Ce qui donne

$$4x - x^2 = x^2 t^2 \Rightarrow x = \frac{4}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{8t dt}{(1+t^2)^2},$$

$$\sqrt{4x - x^2} = \frac{4t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad 2x - 3 = \frac{5-3t^2}{1+t^2}.$$

En substituant dans l'intégrale, on trouve

$$\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{-\frac{8t dt}{(1+t^2)^2}}{\frac{5-3t^2}{1+t^2} \cdot \frac{4t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{3t^2-5} =$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{5}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}} \ln \left| \frac{3t - \sqrt{15}}{3t + \sqrt{15}} \right| + C$$

avec $t = \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x}$.

9) $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$. On applique la première substitution d'Euler en posant

$\sqrt{x^2 - x + 1} = x + t$. Ce qui donne

$$x^2 - x + 1 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+2t} \Rightarrow$$

$$dx = \frac{-2t^2 - 2t - 2}{(1+2t)^2} dt, \quad x - \sqrt{x^2 - x + 1} = -t.$$

En remplaçant dans l'intégrale, on trouve

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{\frac{-2t^2 - 2t - 2}{(1+2t)^2}}{-t} dt = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1+2t)^2} dt.$$

Décomposons la fraction rationnelle $\frac{t^2 + t + 1}{t(1+2t)^2}$ en éléments simples. On a

$$\frac{t^2 + t + 1}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B_1}{1+2t} + \frac{B_2}{(1+2t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t + 1 = A(1+2t)^2 + B_1 t(1+2t) + B_2 t.$$

En donnant certaines valeurs à la variable t , on détermine les coefficients inconnues:

$$t = 0 \Rightarrow A = 1.$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} B_2 \Rightarrow B_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$t = 1 \Rightarrow 3 = 9A + 3B_1 + B_2 \Rightarrow B_1 = -\frac{3}{2}.$$

Donc, nous avons

$$\frac{t^2 + t + 1}{t(1+2t)^2} = \frac{1}{t} - \frac{\frac{3}{2}}{1+2t} - \frac{\frac{3}{2}}{(1+2t)^2}.$$

D'où

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1+2t)^2} dx =$$

$$= 2 \int \frac{1}{t} dx - 2 \int \frac{\frac{3}{2}}{1+2t} dx - 2 \int \frac{\frac{3}{2}}{(1+2t)^2} dx =$$

$$= 2 \ln|t| - \frac{3}{2} \ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C,$$

avec $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$.

Exercice 8.14.

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx$.

Posons $\cos x = t$. Ce qui donne $\sin x dx = -dt$. En remplaçant dans la dernière intégrale, on obtient

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = -\int (1 - t^2) t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

4) On a

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 2 \int dx + \int \cos^2 x dx = \\ &= \operatorname{tg} x - 2x + \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \operatorname{tg} x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

5) $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$.

Calculons les deux intégrales séparément. Pour la première, on a

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos \frac{x}{2}}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Pour calculer la deuxième intégrale, nous allons appliquer la méthode d'intégration par parties. Posons pour cela: $\cos x = u$ et $\frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = dv$. Ce qui donne

$$du = -\sin x dx \text{ et } v = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2 \sin^2 x},$$

et

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx &= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \int \frac{\sin x dx}{2 \sin^2 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \int \frac{dx}{2 \sin x} = \\ &= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

En combinant les deux résultats, on obtient

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

7) $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} dx$. Posons $\cos x = t$. On a alors $\sin x dx = -dt$ et en remplaçant dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} dx = -\int \frac{dt}{(1 - t)^2} = \frac{1}{1 - t} = \frac{1}{1 - \cos x}.$$

10) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x} = \int \operatorname{ctg}^8 x dx$. Posons $\operatorname{ctg} x = t$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x, \quad dx &= -\frac{dt}{1 + t^2} \text{ et en remplaçant dans l'intégrale, on obtient} \\ \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x} &= -\int \frac{t^8}{1 + t^2} dt = -\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2}) dt = \\ &= -\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} t + C = \end{aligned}$$

$$= x - \frac{\operatorname{ctg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + C.$$

12)

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx &= \\ &= \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos 2x} dx = \\ &= \int \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\cos 2x} dx = \int \frac{2 - (1 - \cos^2 2x)}{2 \cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} - 2x)} + \frac{1}{4} \sin 2x + C = -\frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x)| + \frac{1}{4} \sin 2x + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} \right| + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

14) $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$. Pour calculer cette intégrale, appliquons la substitution universelle en posant: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Ce qui donne

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En remplaçant dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{8t^2 + 2} = \\ &= \int \frac{dt}{4t^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C. \end{aligned}$$

Exercice 8.14.

16) $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$. Cette intégrale peut se calculer par la substitution universelle en posant $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Ce qui donne $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 + \frac{8t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 8t + 5} = \\ &= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{(t + \frac{4}{5})^2 + 1 - \frac{16}{25}} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{(t + \frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}} = \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5t+4}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) + 4}{3} + C. \end{aligned}$$

20) $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$. On peut calculer cette intégrale en appliquant la substitution suivante: $\operatorname{tg} x = t$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \\ \sin^2 x &= \cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 - \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2} = \int \frac{1+t^2}{1+2t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{1+2t^2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} t) + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.\end{aligned}$$

Exercice 8.16

5) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$. La fraction rationnelle régulière se décompose en éléments simples de types I, II et III.

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

Comme précédemment, on obtient

$$2x^3 + 4x^2 + x + 2 = A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2.$$

$$x^3 : 2 = A_1 + M$$

$$x^2 : 4 = A_2 - 2M$$

$$x^1 : 1 = A_2 - 2N + M$$

$$x^0 : 2 = -A_1 + A_2 + N.$$

La résolution de ce système donne $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $M = 0$, $N = 1$, et, donc:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \\ &= 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

9) $\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$. (intégrale d'une fonction irrationnelle de la forme

$\int R(x, \sqrt{x+1}, \sqrt[3]{x+1}) dx$. On pose dans ce cas $x+1 = t^6$. Ce qui donne:

$x = t^6 - 1$ et $dx = 6t^5 dt$. En remplaçant dans l'intégrale, on obtient:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx &= \\ &= \int \frac{(t^6-1)^2 + t^3}{t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int t^3 [(t^6-1)^2 + t^3] dt = \\ &= 6 \int (t^{15} - 2t^9 + t^3 + t^6) dt = \frac{3}{13} t^{16} - \frac{6}{5} t^{10} + \frac{3}{2} t^4 + \frac{6}{7} t^7 + C.\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx = 6 \sqrt[3]{(x+1)^2} \left(\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{x+1}{5} + \frac{\sqrt{x+1}}{7} + \frac{1}{4} \right) + C.$$

$$16) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^8 x}}{\frac{\sin^3 x \cos^5 x}{\cos^8 x}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^6 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Posons $\operatorname{tg} x = t$. Alors on a $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$.

En remplaçant ces expressions dans la dernière intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} &= \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{t^3} = \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^3} dt = \\ &= \int \frac{dt}{t^3} + 3 \int \frac{dt}{t} + 3 \int t dt + \int t^3 dt = \\ &= -\frac{1}{2t^2} + 3 \ln|t| + 3 \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + 3 \ln|\operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

27) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}} = \int x^{-3} (1 + x^{-1})^{-\frac{1}{5}} dx$. On a $m = -3$, $n = -1$,

$p = -\frac{1}{5}$, $\frac{m+1}{n} = 2$. On est dans le premier cas. Posons alors $1 + x^{-1} = z^5$. Ce qui donne

$$x = \frac{1}{z^5 - 1}, dx = -\frac{5z^4 dz}{(z^5 - 1)^2}$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}} &= -5 \int \frac{(z^5 - 1)^3}{z} \cdot \frac{z^4 dz}{(z^5 - 1)^2} = -5 \int z^3 (z^5 - 1) dz = \\ &= -\frac{5}{9} z^9 + \frac{5}{4} z^4 + C \text{ avec } z = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

31) $\int \frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$. La fraction rationnelle se décompose en éléments simples de

la façon suivante:

$$\frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{M_1x + N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Déterminons maintenant les coefficients. On a

$$\begin{aligned} 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1 &= \\ &= A(x^2+1)^2 + (M_1x + N_1)(x-2)(x^2+1) + (M_2x + N_2)(x-2). \end{aligned}$$

En égalisant les coefficients de x^4, x^3, x^2, x^1, x^0 on obtient le système d'équations suivant:

$$x^4 : 3 = A + M_1$$

$$x^3 : 2 = -2M_1 + N_1$$

$$x^2 : 3 = 2A + M_1 - 2N_1 + M_2$$

$$x^1 : 0 = N_1 - 2M_1 - 2M_2 + N_2$$

$$x^0 : -1 = A - 2N_1 - 2N_2$$

En résolvant ce système nous obtenons

$$A = 3, M_1 = 0, M_2 = 1, N_1 = 2, N_2 = 0.$$

et donc

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{3}{x-2} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \\ &= 3 \ln|x-2| + 2 \arctg x + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \\ &= 3 \ln|x-2| + 2 \arctg x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

38) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$. On a $m = 5$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 3$.

On est dans le deuxième cas. On pose alors $1 - x^2 = z^2$. Ce qui donne
 $x = \sqrt{1-z^2}$, $dx = -\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\int \frac{(\sqrt{1-z^2})^5}{z} \cdot \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} = -\int (1-z^2)^2 dz = \\ &= -\int dz + 2\int z^2 dz - \int z^4 dz = -z + \frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + C. \end{aligned}$$

En remplaçant $z = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{5}(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2} + C.$$

41) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}$. On peut appliquer la deuxième substitution

d'Euler en posant $\sqrt{1-2x-x^2} = xt - 1$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} 1 - 2x - x^2 &= x^2 t^2 - 2xt + 1 \Rightarrow x = \frac{2(t-1)}{1+t^2} \Rightarrow \\ dx &= \frac{2+4t-2t^2}{(1+t^2)^2} dt, \quad 1 + \sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2t(t-1)}{1+t^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{1+2t-t^2}{t(t-1)(1+t^2)} dt.$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \frac{1+2t-t^2}{t(t-1)(1+t^2)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Mt+N}{1+t^2} \\ \Rightarrow 1+2t-t^2 &= A(t+1)(1+t^2) + Bt(1+t^2) + (Mt+N)t(t-1). \end{aligned}$$

$$t = 0 \Rightarrow A = -1.$$

$$t = 1 \Rightarrow B = 1.$$

En égalisant les coefficients de t^3 , t^2 , on détermine les valeurs de M et N .

$$t^3 : 0 = A + B + M \Rightarrow M = 0.$$

$$t^2 : -1 = -A - M + N \Rightarrow N = -2.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}} &= \int \frac{1+2t-t^2}{t(t-1)(1+t^2)} dt = \\ &= -\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{2}{1+t^2} dt = \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| - 2\arctan t + C \end{aligned}$$

avec $t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2} + 1}{x}$.

45) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \cos^3 x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$. Appliquons la méthode d'intégration par parties, en posant

$$\cos^3 x = u, \quad du = -3\cos^2 x \sin x dx, \quad \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = dv, \quad v = -\frac{1}{2\sin^2 x}.$$

D'où il découle

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx = \\ &= -\frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sin x} dx + \frac{3}{2} \int \sin x dx = \\ &= -\frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{3}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

Chapitre IX. Intégrale définie (de Riemann)

L'intégrale définie (ou de Riemann) est un puissant outil mathématique dont les applications sont nombreuses telles que le calcul des aires, le travail d'une force, le calcul de limites de suites etc.

§1. Construction de l'intégrale de Riemann.

IX.1. Définition de l'intégrale définie. Soient f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ et $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, une subdivision finie quelconque de $[a, b]$ qu'on désignera par D . Formons les sommes suivantes, appelées **sommes intégrales de**

Riemann, $\sigma(D; \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ où les points ξ_i , $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ sont choisis arbitrairement et $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Définition. Le nombre $I \in \mathbb{R}$ est appelé **intégrale définie ou intégrale de Riemann** de f sur le segment $[a, b]$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall D, \forall \xi_i : (\lambda_D < \delta \Rightarrow |\sigma(D, \xi) - I| < \epsilon).$$

On note dans ce cas

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

et on dit que f est **intégrable** sur $[a, b]$ si le nombre I existe (indépendamment du choix des ξ_i).

Remarques.

1) On définit aussi cette intégrale par $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ avec $\lambda = \max_{i=1, \dots, n} |\Delta x_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$, c'est à dire la limite des sommes intégrales de Riemann, indépendamment du choix des ξ_i quand $\lambda \rightarrow 0$ (dans ce cas $n \rightarrow +\infty$).

On désigne par $\mathcal{R}[a, b]$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$: $f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f$ est intégrable sur $[a, b]$.

2) On peut construire l'intégrale de Riemann suivant une autre démarche en construisant d'abord l'intégrale de fonctions dites en escaliers (ou étagées), ensuite on la généralise à des fonctions plus générales. Une fonction est dite en escaliers sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que

$$f(x) = c_i, x \in [x_{i-1}, x_i[, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

3) Il existe d'autres types d'intégrales: intégrale de Stieljes-Riemann, intégrale de Lebesgue etc.

4) Comme l'intégrale de Riemann ne dépend pas du choix des ξ_i , alors dans la suite de ce cours, on notera les sommes intégrales de Riemann liées à la subdivision D par σ_D au lieu de $\sigma(D, \xi)$.

Exemple. Montrons à l'aide de la définition que $\forall c \in \mathbb{R}, \int_a^b c dx = c(b-a)$. En effet, dans ce cas $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$ et pour toute subdivision D de $[a, b]$ et pour tous points ξ_i , on a

$$\sigma_D = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= c((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) = c(x_n - x_0) = c(b-a),$$

c'est à dire que toutes les sommes intégrales de Riemann sont constantes, égales à $c(b-a)$.

En particulier, $\int_a^b dx = b-a$.

§2. Conditions d'intégrabilité d'une fonction.

Dans ce paragraphe, on établit des conditions d'intégrabilité d'une fonction sous forme de théorèmes qu'on admettra.

IX.2. Condition nécessaire.

Théorème. Toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est nécessairement bornée sur ce segment.

Remarques.

1) La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction de Dirichlet définie sur $[0, 1]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$$

est bornée, mais pas intégrable sur $[0, 1]$ (voir exercice 9.5).

2) D'après le théorème, toute fonction non bornée n'est pas intégrable au sens de Riemann.

IX.3. Sommes de Darboux. Propriétés. Pour établir des conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité au sens de Riemann, on introduit dans ce n° la notion de sommes intégrales de Darboux qui sera nécessaire pour la suite.

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et soit $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ une subdivision finie de $[a, b]$. Comme f est bornée sur chaque segment $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), alors sur chacun d'eux, $m_i = \inf f$ et $M_i = \sup f$ existent.

Définition. Les sommes :

$$\bar{S}_D = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$\underline{S}_D = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

sont appelées respectivement, **sommes supérieure et inférieure de Darboux**, correspondant à la subdivision D de $[a, b]$.

IX.4. Propriétés des sommes de Darboux. Les propriétés suivantes sont vraies.

Propriété 1). Pour toute subdivision D de $[a, b]$ et pour tous les ξ_i , on a : $\underline{S}_D \leq \sigma_D \leq \bar{S}_D$.

Propriété 2). Pour toute subdivision fixe D de $[a, b]$ et pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir les ξ_i tels que l'on ait : $0 \leq \bar{S}_D - \sigma_D < \epsilon$.

De même, on peut choisir les ξ_i tels que : $0 \leq \sigma_D - \underline{S}_D < \epsilon$.

Conséquence. $\bar{S}_D = \sup_{\xi_i} \sigma(D; \xi_i)$; $\underline{S}_D = \inf_{\xi_i} \sigma(D; \xi_i)$.

Propriété 3). Pour toutes subdivisions quelconques D et D' de $[a, b]$, on a toujours :

$$\underline{S}_D \leq \bar{S}_{D'} \text{ et } \underline{S}_{D'} \leq \bar{S}_D.$$

Conséquence. L'ensemble des sommes inférieures (resp. supérieures) de Darboux est majoré (resp. minoré).

Définition. Les nombres $\bar{I} = \inf_{\{D\}} \bar{S}_D$ et $I = \sup_{\{D\}} \underline{S}_D$ qui existent et sont appelés respectivement les **intégrales supérieure et inférieure (de Darboux) de f sur $[a, b]$** .

Propriété 5. $I \leq \bar{I}$.

Conséquence. $\forall D, \underline{S}_D \leq I \leq \bar{I} \leq \bar{S}_D$.

Propriété 6. $\bar{S}_D - \underline{S}_D = \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i$, où $\omega_i(f) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')|$ est appelée **oscillation de f sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$** .

Lemme de Darboux. Le lemme suivant joue un rôle important pour établir des conditions d'intégrabilité :

Lemme. $\bar{I} = \lim_{\lambda_D \rightarrow 0} \bar{S}_D$ et $I = \lim_{\lambda_D \rightarrow 0} \underline{S}_D$.

IX.5. Théorème fondamental d'intégrabilité. Dans ce n° , on établit des conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité d'une fonction, regroupées dans le théorème fondamental suivant :

Théorème fondamental. Soit f une fonction définie et bornée sur le segment

$[a, b]$, alors les propositions suivantes sont équivalentes:

- 1) f est intégrable sur $[a, b]$;
- 2) $\lim_{\lambda_D \rightarrow 0} (\bar{S}_D - \underline{S}_D) = 0$;
- 3) $\forall \epsilon > 0$, il existe une subdivision D de $[a, b]$ telle que $\bar{S}_D - \underline{S}_D < \epsilon$;
- 4) $\bar{I} = \underline{I}$.

Corollaire. Pour qu'une fonction f soit intégrable sur le segment $[a, b]$, il faut et il suffit que

$$\lim_{\lambda_D \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i = 0.$$

§ 3. Classes de fonctions intégrables.

Dans ce §, on établit des conditions suffisantes d'intégrabilité pour certaines classes concrètes de fonctions, qui par leurs propriétés satisfont à la condition suffisante du corollaire précédent.

.

IX.6. Conditions suffisantes d'intégrabilité.

Théorème 1 (Intégrabilité des fonctions continues). Toute fonction continue sur le segment $[a, b]$ est intégrable sur ce segment.

Certaines fonctions bornées présentant des points de discontinuité sur un segment peuvent être intégrables. Pour cela, introduisons la terminologie suivante: on dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ **recouvre le point** $x \in \mathbb{R}$ ou est un **recouvrement du point** $x \in \mathbb{R}$ si $x \in I$. On a le théorème suivant.

Théorème 2. (Intégrabilité de certaines fonctions discontinues). Si f est une fonction définie et bornée sur un segment $[a, b]$ et si $\forall \epsilon > 0$, il existe un nombre fini d'intervalles recouvrant tous les points de discontinuité de f dont la somme de leurs longueurs est inférieure à ϵ , alors la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

Corollaire. Toute fonction bornée et continue sur un segment $[a, b]$, sauf en un nombre fini de points, est intégrable sur ce segment. En particulier, toute fonction continue par morceaux sur un segment est intégrable.

Conséquence. Si deux fonctions f, g , définies sur un segment $[a, b]$, diffèrent en un nombre fini de points, alors si l'une est intégrable sur $[a, b]$, l'autre l'est aussi et on a:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Théorème 3. (Intégrabilité des fonctions monotones). Toute fonction monotone sur un

segment $[a, b]$ est intégrable sur ce segment.

Théorème 4. (Intégrabilité de fonctions composées). Soient f une fonction intégrable sur un segment $[a, b]$ $M = \sup_{[a, b]} f$ et $m = \inf_{[a, b]} f$. Si g est une fonction définie et continue sur le segment $[m, M]$, alors la fonction composée $h(x) = g(f(x))$ est intégrable sur $[a, b]$.

§4. Propriétés des intégrales définies.

Dans ce paragraphe, on étudie certaines propriétés importantes des fonctions intégrables telles que la linéarité, les formules d'estimation et de moyenne, ainsi que de composition.

IX.7. Opérations sur les fonctions intégrables.

Propriété 1. Soient $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Alors

a) $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f \in \mathcal{R}([a, b])$, et on a :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx; \\ \text{ii)} \quad & \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx; \end{aligned}$$

b) $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^n \in \mathcal{R}[a, b]$.

Remarque. Attention, en général: $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$.

Propriété 2. Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$, $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Cela signifie que: $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow \forall [\alpha, \beta] \subset [a, b], f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$.

Propriété 3). Par convention, on pose :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

Propriété 4) (Additivité ou relation de Chasles de l'intégrale). Si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et on a la relation :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

appelée **relation de Chasles** pour les intégrales définies.

IX.8. Inégalités. Estimations. Le calcul de certaines intégrales définies n'est pas toujours possible. Dans ce cas, on donne des estimations en les comparant à d'autres intégrales. Pour cela, on établit dans ce n^o, quelques inégalités importantes.

Propriété 5. Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Corollaire 1. Si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$, alors:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Corollaire 2. Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Propriété 6. Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et $M = \sup_{[a, b]} |f|$, alors $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ et on a :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq M(b-a).$$

Remarque. L'inverse est faux, c'est à dire que $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ n'implique pas que $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Par exemple, la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

n'est pas intégrable sur $[0, 1]$, mais $|f| = 1$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Propriété 7. Soit f continue et positive, $f \geq 0$, sur $[a, b]$. S'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \alpha > 0.$$

IX.9. Première formule de la moyenne. Une des formules importantes des intégrales définies est la formule de la moyenne, appelée aussi formule de Lagrange, dont les applications

théoriques et pratiques sont nombreuses.

Théorème. Soient $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Si g garde un même signe sur $[a, b]$, alors il existe un nombre α , $m \leq \alpha \leq M$ avec $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$, tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx.$$

Si, de plus, la fonction f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_a^b g(x)dx.$$

Corollaire (formule de la moyenne). Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors il existe α , $m \leq \alpha \leq M$, tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha(b-a).$$

Si, de plus, f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a).$$

Le nombre réel $\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ est appelée **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.

IX.10.. Deuxième formule de la moyenne.

Théorème. Soient $g \in \mathcal{R}[a, b]$ et f une fonction décroissante (resp. croissante) et positive sur $[a, b]$, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx$$

$$\left(\text{resp. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_\xi^b g(x)dx \right).$$

Corollaire (deuxième formule de la moyenne). Soient $g \in \mathcal{R}[a, b]$ et f une fonction monotone sur $[a, b]$, alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Remarque. Si f n'est pas définie en a ou b , et si $f(a+0)$ et $f(b-0)$ existent, alors la deuxième formule de la formule peut se généraliser comme suit:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0) \int_a^{\xi} g(x)dx + f(b-0) \int_{\xi}^b g(x)dx.$$

§5. Méthodes d'intégration dans les intégrales définies.

Le calcul d'une intégrale à l'aide des sommes intégrales telle que définie au n°[IX.1] n'est pas toujours commode et peut mener à des calculs compliqués. Cependant, il existe des méthodes de calcul plus simples, et ce, à l'aide des primitives des fonctions à intégrer. Pour cela, on établit d'abord la relation entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction sur un segment $[a, b]$.

IX.11. L'intégrale définie comme fonction d'une de ses bornes. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$. On sait que pour tout $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, en particulier, $\forall x \in [a, b]$, $f \in \mathcal{R}[a, x]$ (ou $f \in \mathcal{R}[x, b]$). Posons:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Il est clair que Φ est une fonction définie sur $[a, b]$ avec:

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0, \quad \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt,$$

et l'on dit que Φ est une **fonction définie par une intégrale**.

Théorème. Si f est intégrable sur $[a, b]$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors Φ est continue sur $[a, b]$, c'est à dire que $\Phi \in C[a, b]$.

Remarque. La fonction f peut être discontinue sur $[a, b]$. On exige seulement qu'elle soit intégrable sur $[a, b]$.

IX.12. Existence de primitives pour une fonction continue.

Théorème. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et continue en $x_0 \in [a, b]$. Alors la fonction

$$x \mapsto \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

est dérivable en x_0 et on a :

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Le théorème signifie qu'en tout point de continuité de f , la fonction Φ est dérivable et sa dérivée est égale à la valeur prise par f en ce point.

Corollaire. Si f est continue sur $[a, b]$, alors elle admet une primitive sur $[a, b]$ égale à

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ainsi, toute primitive F de $f \in C([a, b])$ s'écrit

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c, \quad x \in [a, b],$$

où c est une constante réelle, c'est à dire que c est une fonction définie par une intégrale.

Remarques.

1) Si $f \in C([a, b])$, alors $\forall x \in [a, b] \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

2) Si on prend $\Phi(x) = \int_x^b f(t)dt$, alors $\Phi'(x) = -f(x)$, en vertu de la convention

$$\int_x^b f(t)dt = - \int_b^x f(t)dt.$$

3) On peut introduire à l'aide de l'intégrale définie de nouvelles fonctions définies par des intégrales qui ne sont pas élémentaires, par exemple:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt, \quad \dots f(x) = \int_a^x \frac{1}{\log t} dt \quad (a > 1)$$

respectivement fonction erreur, fonction sinus intégral, cosinus intégral et logarithme intégral.

4) Si f n'est pas continue sur $[a, b]$, elle peut admettre ou ne pas admettre des primitives sur $[a, b]$.

IX.13. Formule d'intégration de Newton-Leibnitz. Dans le cas des fonctions continues sur un segment $[a, b]$, on a une formule fondamentale du calcul de l'intégrale de Riemann à l'aide de primitives, exprimée par le théorème suivant.

Théorème. (Formule de Newton-Leibnitz). Si f est continue sur $[a, b]$, et si F est une primitive de f , alors on a:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Exemple.
$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\log 2 - \log 1) = \frac{1}{2} \log 2.$$

IX.14. Changement de variable dans l'intégrale définie. Comme dans l'intégrale indéfinie, la méthode du changement de variable s'applique aussi dans le calcul de l'intégrale définie d'une fonction satisfaisant à certaines conditions. On a le théorème suivant:

Théorème. Soient $x \mapsto f(x)$ une fonction définie sur le segment $[a, b]$ et $t \mapsto x = \phi(t)$ une fonction définie sur le segment $[\alpha, \beta]$ vérifiant les conditions suivantes:

- i) $f \in C[a, b]$;
- ii) $\phi \in C^1[\alpha, \beta]$;
- iii) $\phi[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$.

Alors on a la formule du changement de variable suivante:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Remarques.

1) Lors d'un changement de variables, ne pas oublier de changer les bornes.

2) La méthode du changement de variable est souvent plus efficace que la formule de Newton-Leibnitz comme le montre l'exemple suivant: soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$
 Dans ce cas, il est préférable de faire le changement de variable suivant:

posons $x = \phi(t) = \sin t$. Alors on a

$\phi(0) = 0$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\phi[0, \frac{\pi}{2}] = [0, 1]$, $\phi \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$, $f \in C[0, 1]$. D'après la formule du changement de variable, on a donc:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 0 - (0 + 0) \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Si on veut, dans cet exemple, appliquer la formule de Newton-Leibnitz, ce serait un peu long pour calculer une primitive de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ qui est $F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$.

3) Attention aux conditions du théorème. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant. On a, d'une part :

$$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

et d'autre part:

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \tan^2 x)}.$$

En posant $t = \tan x$, on obtient $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\tan 0 = 0$, $\tan \pi = 0$. D'où :

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Donc $0 = \pi$. Ce qui est absurde!

4) On peut affaiblir les conditions du théorème.

IX.15. Formule d'intégration par parties dans l'intégrale définie. Comme pour le changement de variable, la méthode d'intégration par parties s'applique aussi dans le calcul de l'intégrale définie. On a le théorème suivant:

Théorème. Soient u, v deux fonctions ayant des dérivées continues sur le segment $[a, b]$, $u, v \in C^1[a, b]$. Alors on a la formule suivante d'intégration par parties:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

Exemple. Calculer $\int_1^2 xe^x dx$. Posons $u = x$, $v' = e^x$. Alors on a $u' = 1$, $v = e^x$ et $u, v \in C^1[1, 2]$. Donc

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (e^x(x-1)) \Big|_1^2 = e^2 - 0 = e^2.$$

Remarque. On peut affaiblir les conditions du théorème.

§6. Applications de l'intégrale définie en analyse..

X.16. Calcul de la limite d'une suite numérique. Dans certains cas, le problème du calcul de la limite d'une suite numérique peut se ramener au calcul d'une intégrale définie si le terme général de la suite donnée peut se mettre sous la forme d'une somme intégrale de Riemann. En choisissant de manière adéquate la fonction à intégrer, l'intervalle d'intégration ainsi que les points ξ_i , alors la limite de la suite donnée n'est finalement que l'intégrale définie de cette fonction sur l'intervalle choisi. Donnons un exemple de cette méthode.

Soit à calculer la limite de la suite (x_n) définie par :

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ecrivons le terme général x_n sous forme d'une somme intégrale de Riemann. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} &= \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \right) = \sigma_n. \end{aligned}$$

Dans ce cas, posons $x_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$ et $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$.

Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ne dépend pas du choix des ξ_i et on peut prendre $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$, d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\frac{i}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) \Big|_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2. \end{aligned}$$

IX.17. Formule de Taylor avec reste intégral. Dans ce n°, on donne une nouvelle formule de Taylor avec reste intégral. On a le théorème suivant.

THEOREME 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ayant une dérivée d'ordre $(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, continue au voisinage $V \subset I$ du point x_0 , c'est à dire $f \in C^{n+1}(V)$. Alors $\forall x \in V$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Cette formule est appelée **formule de Taylor** pour la fonction f en x_0 avec **reste-intégral**.

§7. Applications de l'intégrale définie en géométrie.

IX.18. Calcul de l'aire d'une figure plane. Soit f une fonction définie et bornée sur un segment $[a, b]$. La partie du plan Oxy limitée par les droites $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses Ox et la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ est une figure plane, appelée **trapèze curviligne** et sa surface est appelée **aire du trapèze curviligne**. Désignons par σ cette aire et déterminons la formule permettant de la calculer. Pour cela, on a le théorème suivant:

Théorème. Si f est continue et positive sur $[a, b]$, alors on a $\sigma = \int_a^b f(x) dx$.

Remarques.

1) Si f est continue et change de signes un nombre fini de fois, alors $\sigma = \int_a^b |f(x)| dx$.

2) Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ et si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont les points de discontinuité (de première espèce) de cette fonction, alors on a

$$\sigma = \int_a^{\alpha_1} |f(x)| dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |f(x)| dx + \int_{\alpha_k}^b |f(x)| dx.$$

Exemple. Calculer l'aire σ de la figure plane limitée par les droites $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ et $y = \sin x$. On a $\sin x \geq 0$, $x \in [0, \pi]$ et

$$\sigma = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

IX.19. Aire d'une figure plane limitée par deux courbes. Soient f_1, f_2 deux fonctions définies et intégrables (en particulier continues) sur un segment $[a, b]$ vérifiant la condition $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Alors l'aire de la surface limitée par les droites $x = a$, $x = b$ et les courbes d'équations $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ est égale à

$$\sigma = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Exemple. Calculer l'aire de la figure plane limitée par les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$. Déterminons tout d'abord le segment d'intégration $[a, b]$. Pour cela, cherchons les points d'intersection de ces deux courbes. Aux points d'intersection, les coordonnées sont égales, d'où

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

Les racines sont $x = 0$, $x = 1$. Pour $x = 0$, on a $y = 0$ et pour $x = 1$, $y = 1$. D'où les points d'intersection sont $M_1(0, 0)$ et $M_2(1, 1)$. L'intervalle d'intégration est alors $[0, 1]$ et on a $\sqrt{x} \geq x^2$ sur $[0, 1]$, d'où

$$\sigma = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

IX.20. Aire d'un secteur curviligne en coordonnées polaires. Soit $\rho = f(\theta)$ l'équation d'une courbe en coordonnées polaires où $\theta \mapsto f(\theta)$ est une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$. L'aire σ du secteur délimité par la courbe $\rho = f(\theta)$ et les rayons vecteurs $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ se calcule par la formule

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

IX.21. Longueur d'un arc de courbe d'équation $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Soit f une fonction définie et continue sur un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset X$. Pour le calcul de l'arc de courbe compris entre les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, on a le théorème suivant.

Théorème. Si $f \in C^1[a, b]$, alors la **longueur de l'arc** de courbe $\widehat{AB}$ est égale à:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Exemple. Calculer la longueur de la chaînette d'équation

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad -b \leq x \leq b \quad (b > 0, a > 0).$$

On obtient après calcul:

$$y'^2 = \sinh^2 \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} = \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{a}} = \cosh \frac{x}{a}.$$

D'où

$$L = \int_{-b}^b \cosh \frac{x}{a} dx = \frac{1}{a} \sinh \frac{x}{a} \Big|_{-b}^b = 2a \sinh \frac{b}{a}.$$

Remarque.

1) Si la courbe est définie par des équations paramétriques:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions continues ainsi que leurs dérivées et $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ ne s'annulent pas sur le segment considéré, alors la longueur L est donnée par la formule:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

2) Si la fonction est définie en coordonnées polaires $\rho = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, alors la longueur de l'arc de courbe est donnée par la formule:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\sigma.$$

Exemple. Calculer la longueur de l'astroïde d'équations: $x = a \cos^3 t$, $y = a^3 \sin t$. La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées, calculons d'abord le quart de la longueur de cette courbe se trouvant dans le premier quadrant. On a

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \cos^2 t \sin^4 t} dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 3a \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}, \end{aligned}$$

donc $L = 6a$.

IX.22. Volume d'un solide de révolution. Soit f une fonction définie et positive sur un segment $[a, b]$ et (C) sa courbe représentative d'extrémités les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. La partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ obtenue par la rotation autour de l'axe Ox du trapèze curviligne limité par les droites $x = a$, $x = b$, l'axe Ox et l'arc $\widehat{AB}$ est appelée **solide de révolution** engendré par f sur $[a, b]$. Pour le calcul du volume V de ce solide de révolution, on a le théorème suivant:

Théorème. Si f est définie, positive et continue sur $[a, b]$, alors on a

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

IX.23. Aire d'une surface de révolution. Soit f une fonction définie et positive sur un segment $[a, b]$ et (C) sa courbe représentative, d'extrémités $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$, qu'on désigne par $\widehat{AB}$. La partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ obtenue par la rotation de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ autour de l'axe Ox est appelée **surface de révolution** engendrée par f sur $[a, b]$. Pour le calcul de l'aire σ d'une surface de révolution, on a le théorème suivant:

Théorème. Si $f \in C^1[a, b]$, alors on a

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

§8. Applications en mécanique.

IX.24. Coordonnées du centre de gravité d'une courbe. Soit une courbe matérielle AB d'équation $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Alors les coordonnées (x_g, y_g) du centre de gravité de la courbe s'expriment par les intégrales définies suivantes: si $f \in C^1([a, b])$,

$$x_g = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}, \quad y_g = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx}.$$

Exemple. Trouver les coordonnées du centre de gravité de la demi-circonférence se trouvant au dessus de l'axe Ox . L'équation de la courbe est dans ce cas: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ et on a:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

En remplaçant ces expressions dans les formules correspondantes, on obtient:

$$x_g = \frac{\int_{-a}^a x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx} = \frac{\left[-a\sqrt{a^2 - x^2} \right]_{-a}^a}{\left[a \arcsin \frac{x}{a} \right]_{-a}^a} = \frac{0}{\pi a} = 0.$$

$$y_g = \frac{\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\pi a} = \frac{a \int_{-a}^a dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}.$$

Enoncés des exercices du chapitre IX.

Exercice 9.1. A l'aide de la définition de l'intégrale définie, calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1) $\int_b^a \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b);$ | 2) $\int_b^a x^m dx \quad (0 < a < b, m \neq -1);$ |
| 3) $\int_b^a \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b);$ | 4) $\int_0^a a^x dx \quad (a > 0);$ |
| 5) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx;$ | 6) $\int_0^x \cos t dt.$ |

Exercice 9.2. Soit f une fonction bornée et croissante sur $[0, 1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Exercice 9.3. Démontrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur les segments indiqués:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin \frac{\pi}{x}, & x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ | sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. |
| 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ | sur $[0, 1]$. |

Exercice 9.4. Soit f continue sur un segment $[a, b]$ sauf au point $x_0 \in]a, b[$ qui est un point de discontinuité de première espèce. Montrer alors que f n'admet pas de primitive sur $[a, b]$. En déduire que toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ n'admet pas de primitive sur ce segment.

Exercice 9.5. Démontrer que la fonction de Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 1, & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}$$

n'est intégrable sur aucun segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 9.6. En appliquant la formule de Newton-Leibniz calculer les intégrales suivantes:

- | | |
|---|--|
| 1) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^3}.$ | 2) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$ |
|---|--|

$$3) \int_1^e (e^x - 1)^4 e^x dx.$$

$$5) \int_{e^3}^0 \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx.$$

$$7) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2} dx.$$

$$9) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

$$11) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{x}} \frac{\sin(\frac{1}{x}) dx}{x^2}.$$

$$13) \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{2x} \cos x dx.$$

$$15) \int_2^0 |1 - x| dx.$$

$$17) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$$

$$19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sh^3 x dx$$

$$21) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} tg^4 x dx$$

$$23) \int_{-1}^2 \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx.$$

$$25) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$27) \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$29) \int_1^0 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$31) \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$4) \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$6) \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$8) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

$$10) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}.$$

$$12) \int_1^e \ln^3 x dx.$$

$$14) \int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$16) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$$

$$18) \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$$

$$20) \int_3^4 \frac{x^2 + 3}{x - 2} dx$$

$$22) \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

$$24) \int_0^1 \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$26) \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$$

$$28) \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^{x-2}}{x^3} dx.$$

$$30) \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

$$32) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx.$$

$$33) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$35) \int_0^1 ch^2 3x dx$$

$$37) \int_3^3 \ln x dx$$

$$39) \int_{\frac{\pi}{2}}^1 \sqrt[3]{\sin x} dx$$

$$41) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + x \sin^2 x) dx$$

$$43) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x^7 - x^5 + 2x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx.$$

$$45) \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

$$47) \int_0^1 \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} + 1} dx.$$

$$49) \int_0^9 x \sqrt[3]{1 - x} dx$$

$$51) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$34) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 2 \sin^2 x}$$

$$36) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$38) \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$$

$$40) \int_0^1 x(2 - x^2)^{12} dx$$

$$42) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} (x^2 \sin 5x + \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^3 x) dx$$

$$44) \int_0^2 e^{x^2} x dx.$$

$$46) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$48) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}.$$

$$50) \int_0^1 x^{15} \sqrt{1 + 3x^8} dx$$

$$52) \int_0^{\ln 2} sh^4 x dx.$$

Exercice 9.7. A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes:

$$1) \int_9^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$$

$$2) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x}}$$

$$3) \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$$

$$4) \int_0^{\pi} \sin^6 x dx$$

$$5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx$$

$$6) \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^3}$$

$$7) \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$8) \int_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$9) \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Exercice 9.8. En appliquant la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

$$1) \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

$$2) \int_1^e |\ln x| dx.$$

$$3) \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$4) \int_1^{e^{-1}} \arccos x dx.$$

$$5) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$6) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x \arctan x dx.$$

Exercice 9.9. Calculer les intégrales suivantes:

$$1) \int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2| + |x-3|} dx;$$

$$2) \int_{-\ln 2}^0 \sqrt{1-e^{2x}} dx;$$

$$3) \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx;$$

$$4) \int_0^1 \arcsin \sqrt{x} dx;$$

$$5) \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx;$$

$$6) \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1};$$

$$7) \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx, \quad f \in C([0,1]), \quad f(x) > 0, \quad x \in [0,1].$$

$$8) \int_0^e (x \ln x)^2 dx;$$

$$9) \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$10) \int_0^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx;$$

$$11) \int_{-a}^a f(x) dx \text{ si } f \in C(\mathbb{R}) \text{ vérifiant la relation:}$$

$$pf(x) + qf(-x) = 1, \quad x, p, q \in \mathbb{R} \text{ avec } p + q \neq 0.$$

Exercice 9.10. En utilisant les sommes intégrales de Riemann, calculer les limites suivantes:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right);$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{2^n-1} \left(1 + \frac{k}{2^n} \right) \frac{1}{2^n} \right);$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right).$$

Exercice 9.11. En négligeant les infiniments petits d'ordres supérieurs, calculer les limites suivantes:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right];$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \right);$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0);$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2}{n+\frac{1}{n}} \right);$

Exercice 9.12. Calculer les dérivées suivantes:

- 1) $\frac{d}{dx} \int_b^x \sin x^2 dx;$
- 2) $\frac{d}{da} \int_{x^2}^b \sin x^2 dx;$
- 3) $\frac{d}{db} \int_b^a \sin x^2 dx;$
- 4) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^a \sqrt{1+t^2} dt;$
- 5) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^a \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$
- 6) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$

Exercice 9.13. Calculer les limites suivantes:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tgt} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt}.$

Exercice 9.14. Démontrer que $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Exercice 9.15. Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$. Démontrer que la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

est croissante pour $x > 0$.

Exercice 9.16. Calculer les intégrales suivantes:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^2 f(x)dx \quad \text{si} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \\ 2) \int_0^1 f(x)dx \quad \text{si} \quad f(x) &= \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t; \\ t \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 9.17. Calculer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué:

- 1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ dans l'intervalle $[1, 4]$;
- 2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ dans l'intervalle $\left[1, \frac{3}{2}\right]$;
- 3) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin^2 x$ dans l'intervalle $[0, \pi]$;
- 4) $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ dans l'intervalle $[0, 2]$.

Exercice 9.18. Démontrer les relations suivantes:

- 1) si la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$,
alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = (b-a) \int_0^1 f(a+b-x)dx$;
- 2) si la fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$;
- 3) si la fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ et

appliquer le résultat obtenu au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Exercice 9.19. Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$, $a > 0$. Montrer que

$$1) \int_{-a}^a f(x)dx = 0 \quad \text{si } f \text{ est impaire;}$$

$$2) \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \text{ si } f \text{ est paire.}$$

Donner une interprétation géométrique de ces deux résultats.

Exercice 9.20. Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$, de période $T > 0$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R} : \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Exercice 9.21. En introduisant la nouvelle variable $t = x + \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{1/2}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$$

Exercice 9.22. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left(\cos \log \frac{1}{x} \right)' \right| dx.$$

Exercice 9.23. Soit f continue et positive sur $[a, b]$, $a < b$ et soit $M = \sup_{[a,b]} f$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

- i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.
- ii) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, I_n > \delta^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon)$.
- iii) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 9.24. Soit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- i) Démontrer la formule de récurrence $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
- ii) Calculer I_n et en déduire I_7 et I_8 .

Exercice 9.25. Soit $f \in C([a, b])$ telle que

$$\forall \alpha, \beta, a \leq \alpha < \beta \leq b, \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0.$$

Montrer que $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Exercice 9.26. Soit $f \in C^1([1, a])$, $a > 1$. Montrer que

$$\int_1^a E(x) f'(x) dx = E(a) f(a) - \sum_{k=1}^{E(a)} f(k),$$

avec $E(x)$ est la partie entière de x .

Exercice 9.27. Soit $\{f, g\} \subset C([0, +\infty[)$, $g > 0$ sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{g}$ croissante sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction

$$h(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{\int_0^x g(u) du}$$

est croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9.28. (Inégalité de Cauchy-Schwartz).

Soit $\{f, g\} \subset C([a, b])$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

Exercice 9.29. Soit f continue sur $[a, b]$ et vérifiant la relation

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Démontrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a).$$

Applications de l'intégrale définie.

Exercice 9.30.

- 1) Trouver l'aire de la figure délimitée par les courbes $y^2 = 9x$ et $y = 3x$.
- 2) Trouver l'aire de la figure délimitée par l'hyperbole équilatère $xy = a^2$, l'axe Ox et les droites $x = a$, $x = 2a$.
- 3) Trouver l'aire comprise entre la courbe $y = 4 - x^2$ et l'axe Ox .
- 4) Trouver l'aire de la figure délimitée par la courbe $y = x^3$, la droite $y = 8$ et l'axe Oy .
- 5) Trouver l'aire du domaine délimité par une demi-onde de sinussoïde et l'axe Ox .
- 6) Trouver l'aire comprise entre la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ et la parabole $y = \frac{x^2}{2}$.

- 7) Calculer l'aire comprise entre la courbe $y = x(x-1)^2$ et l'axe Ox .
- 8) Le cercle $x^2 + y^2 = a^2$ est partagé en trois régions par l'hyperbole $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$. Calculer l'aire de chacune de ces régions.
- 9) Calculer l'aire délimitée par la courbe $y = |\ln x|$, l'axe Ox et les droites $x = 0, 1, x = 10$.
- 10) Calculer l'aire délimitée par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 11) Calculer l'aire délimitée par la courbe $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.
- 12) Calculer l'aire délimitée par les courbes $y = \ln x$ et $y = x \ln x$.
- 13) Calculer l'aire délimitée par la courbe $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ et son asymptote.
- 14) Calculer l'aire délimitée par la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ et son asymptote.

Exercice 9.31.

- 1) Calculer la longueur de la courbe $y = x^{\frac{3}{2}}$ entre les limites $x = 0$ et $x = 4$.
- 2) Calculer la longueur de la courbe $y = 1 - \ln \cos x$ entre les limites $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$.
- 3) Calculer la longueur de la courbe $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

Exercice 9.32.

- 1) Calculer la longueur de la courbe définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \end{cases}$$

- 2) Calculer la longueur de la courbe

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \end{cases}$$

Exercice 9.33.

- 1) Trouver la longueur de la première spire de la spirale d'Archimède $\rho = a\varphi$ à partir du pôle, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
- 2) Calculer la longueur de la courbe $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$).

Exercice 9.34.

- 1) On fait tourner l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de l'axe Ox . Trouver le volume du corps de révolution engendré par cette rotation.
- 2) Trouver le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox d'un arc de sinuséide $y = \sin x$.

- 3) La figure délimitée par la parabole $y^2 = 4x$ et la droite $x = 4$ tourne autour de l'axe Ox . Trouver le volume du corps de révolution ainsi engendré.
- 4) On fait tourner la figure $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, $0 \leq x \leq a$ autour de l'axe Ox . Trouver le volume du corps de révolution ainsi engendré.
- 5) On fait tourner la figure $y = 2x - x^2$, $y = 0$ autour de l'axe Ox . Trouver le volume du corps de révolution ainsi engendré.

Exercice 9.35. Calculer le volume du solide compris entre le cylindre de base le cercle de rayon $r > 0$ et un plan incliné passant par le diamètre de la base du cylindre (voir dessin). Calculer en particulier le volume si $r = 10 \text{ cm}$ et $h = 6 \text{ cm}$.

Exercice 9.36.

- 1) Trouver l'aire de la surface obtenue en faisant tourner la parabole $y^2 = 4ax$ autour de l'axe Ox à partir de l'origine au point d'abscisse $x = 3a$.
- 2) Trouver l'aire de la surface obtenue en faisant tourner l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) autour de l'axe Ox .
- 3) Trouver l'aire de la surface obtenue en faisant tourner la chaînette $y = ach\frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$) autour de l'axe Ox .

Exercice 9.37.

- 1) Trouver le centre de gravité du quart d'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$).

Réponses aux exercices du chapitre IX.

Exercice 9.1. 1) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; 2) $\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$; 3) $\ln \frac{b}{a}$; 4) $\frac{a-1}{\ln a}$; 5) 1; 6) $\sin x$.

Exercice 9.6.

- 1) $\frac{7}{22}$; 2) 12; 3) $\frac{(e-1)^5}{5}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 2; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}$;
8) $\arctan \frac{1}{7}$; 9) 2; 10) 0; 11) 1; 12) $6 - 2e$; 13) $\frac{e^\pi - 2}{5}$; 14) 1;
15) 1; 16) $\frac{\pi}{2 \sin \alpha}$; 17) $\frac{\pi}{12}$; 18) π ; 19) $\frac{1}{3}(2 - 3ch2 + ch^3 2)$;
20) $\frac{11}{2} + 7 \ln 2$; 21) $\frac{\pi}{6} + \frac{8\sqrt{3}}{27}$; 22) $\frac{1}{4} \arctan \frac{4}{7}$; 23) $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$;
24) $\frac{\pi}{4}$; 25) $\ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$; 26) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 27) $2 - \ln 2$; 28) $\frac{1}{2}(e - e^{\frac{1}{4}})$;
29) $\sin 1$; 30) $\frac{\pi}{4}$; 31) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$; 32) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$;
33) $\ln 2$; 34) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 35) $\frac{1}{12} \sinh 6 + \frac{1}{2}$; 36) $\frac{\pi(9 - 4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$;
37) $3 \ln 3 - 2$; 38) $\pi^3 - 6\pi$; 39) 0; 40) $\frac{8191}{26}$; 41) $\frac{\pi}{2}$;
42) $6 \sin \frac{1}{9} \pi$; 43) $2\sqrt{3}$; 44) $\frac{e^4 - 1}{2}$; 45) $\frac{\pi}{16}$; 46) $2(\sqrt{2} - 1)$;
47) $2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{e^2 + 1}{2}$;
48) $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\arctan \frac{1}{2} \sqrt{2} - \arctan \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$;
49) $-\frac{468}{7}$; 50) $\frac{29}{270}$; 51) $\frac{1}{6}$; 52) $\frac{3}{8} \ln 2 - \frac{225}{1024}$.

Exercice 9.7. 1) $7 + 2 \ln 2$; 2) $\frac{32}{3}$; 3) $\ln \left(\frac{e + \sqrt{1 + e^2}}{1 + \sqrt{2}} \right)$; 4) $\frac{5}{16} \pi$; 5) $\frac{177}{560} \sqrt{2}$;
6) $\frac{\pi}{32}$; 7) $\frac{\pi^2}{4}$; 8) $\frac{1}{32}(\pi + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 8)$; 9) $\frac{\pi}{16}$,

Exercice 9.8.

- 1) $\frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$; 2) $2(1 - \frac{1}{e})$; 3) π ; 4) 1; 5) 4π ; 6) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 9.9. 1) $2 + \frac{9}{4} \log 3 - \frac{3}{4} \log 5$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 - \sqrt{3})$;
3) $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi^2}{4}$; 6) $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{18} \pi$; 7) $\frac{1}{2}$;
8) $\frac{5e^3}{27}$; 9) $\frac{\pi}{4}$; 10) $\sqrt{2} - \frac{1}{3} \sqrt{10} - \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{10} + 3)$;
11) $\frac{2a}{p+q}$.

Exercice 9.10.

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\ln 2$; 4) $\frac{1}{p+1}$; 5) $\frac{4}{e}$; 6) $\frac{4}{e}$.

Exercice 9.11.

1) $\frac{5}{6}\pi$, 2) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, 3) $x + \frac{1}{2}$, 4) $\frac{1}{\ln 2}$.

Exercice 9.12.

1) 0; 2) $-\sin a^2$; 3) $\sin b^2$; 4) $2x\sqrt{1+x^4}$;
5) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; 6) $(\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x)$.

Exercice 9.13. 1) 1; 2) $\frac{\pi^2}{4}$; 3) 0; 4) 1.

Exercice 9.16. 1) $\frac{5}{6}$, 2) $\frac{t}{2}$.

Exercice 9.17. 1) $\frac{20}{9}$, 2) $2 \ln \frac{6}{5}$, 3) $\frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{2}$, 4) $2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}$.

Exercice 9.18. 3) $\frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 9.21. $\frac{3}{2}e^{5/2}$.

Exercice 9.22. $4n$.

Exercice 9.24. ii) $I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 2k \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$

où $(2k-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)$ et $(2k)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2k)$.

$I_7 = \frac{16}{35}$, $I_8 = \frac{35}{256}\pi$.

Exercice 9.30.

1) $\frac{1}{2}$, 2) $a^2 \log 2$, 3) $10\frac{2}{3}$, 4) 12,

5) 2, 6) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$, 7) $\frac{1}{12}$, 8) $a^2[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})]$,

$a^2[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})]$ et

$a^2[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})]$; 9) $(9.9) - (8.1)\frac{1}{\ln 10}$;

10) πab ; 11) $\frac{4}{3}a^2$; 12) $3 - e$; 13) 2; 14) π .

Exercice 9.31.

1) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$, 2) $\log_{tg} \frac{3\pi}{8}$, 3) 2.

Exercice 9.32.

1) $8a$; 2) $2\pi^2 a$.

Exercice 9.33.

1) $a\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})$, 2) $p[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$.

Exercice 9.34. 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$, 2) $\frac{\pi^2}{2}$, 3) 32π , 4) $\frac{3}{7}\pi ab^2$, 5) $\frac{16}{15}\pi$.

Exercice 9.35. $V = \frac{2}{3}r^2 h$, $V = 400 \text{ cm}^3$.

Exercice 9.36.

1) $\frac{56}{3}\pi a^2$; 2) $2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin \ell}{\ell}$; $\ell = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;

3) $\pi a(2b + a \sinh \frac{2b}{a})$.

Exercice 9.37. $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

Corrigés détaillés de certains exercices du chapitre IX.

Exercice 9.1. Les fonctions considérées dans cet exercice sont continues, et par conséquent l'intégrale ne dépend pas du choix des points de partage du segment et des points ξ_i .

1) $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ ($0 < a < b$). En partageant le segment $[a, b]$ en n parties arbitraires par les points x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) et en posant

$$\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}, \quad 0 < x_i < \xi_i < x_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

on trouve que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i^2} \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Delta x_i}{x_i x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i x_{i+1}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

2) $\int_a^b x^m dx$ ($0 < a < b$, $m \neq -1$). Soit $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$. Partageons le segment $[a, b]$ en n parties par les points $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ de façon à ce que ces points forment la suite géométrique :

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 q^i, \quad x_n = b \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dans ce cas, on obtient

$$q^n = \frac{x_n}{x_0} = \frac{b}{a}, \quad q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \quad x_i = a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i}{n}}, \quad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Choisissons ξ_i comme suit: $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} a^m \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{im}{n}} \left[a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i+1}{n}} - a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i}{n}} \right] = \\ &= a^{m+1} \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i(m+1)}{n}}. \end{aligned}$$

La somme $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i(m+1)}{n}}$ est la somme d'une suite géométrique avec le premier terme

égal à 1 et de raison égale à $\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n}}$. On a donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i(m+1)}{n}} = \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{m+1} - 1}{m+1},$$

$$\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n}} - 1$$

et, en remplaçant dans l'expression de S_n , on obtient:

$$S_n = a^{m+1} \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}-1}}{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n}-1}} = \frac{(b^{m+1} - a^{m+1}) \frac{(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}{\frac{(\frac{b}{a})^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{m+1}{n}} (m+1)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b x^m dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{b}{a})^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{m+1}{n}}} = \\ &= \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}. \end{aligned}$$

Exercice 9.6.

1) On a

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} &= \frac{1}{5} \int_{-2}^{-1} \frac{d(11+5x)}{(11+5x)^3} = \left[-\frac{1}{10(11+5x)^2} \right]_{-2}^{-1} = \\ &= -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{36} - 1 \right) = \frac{7}{72}. \end{aligned}$$

$$3) \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \int_0^1 (e^x - 1)^4 d(e^x - 1) = \left[\frac{(e^x - 1)^5}{5} \right]_0^1 = \frac{(e-1)^5}{5}.$$

$$5) \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^3} \frac{d(\ln x + 1)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2 \left[\sqrt{1+\ln x} \right]_1^{e^3} = 2.$$

$$7) \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dx}{(x + \frac{3}{4})^2 - (\frac{5}{4})^2} = \frac{1}{5} \left[\ln \left| \frac{4x-2}{4x+8} \right| \right]_2^3 = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned} 10) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx &= \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin x)^{-\frac{1}{3}} - (\sin x)^{\frac{5}{3}} \right) d(\sin x) = \\ &= \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{\sin^2 x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{8} \left[\sqrt[3]{\sin^8 x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1 \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - 1 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{21\sqrt[3]{4} - 36}{32}.$$

$$\begin{aligned} 14) \int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \left[\ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \right]_{sh1}^{sh2} = \\ &= \ln \left| sh2 + \sqrt{1+sh2\sqrt{[3]}\sin^8 x^2} \right| - \ln \left| sh1 + \sqrt{1+sh1^2} \right| = \\ &= \ln|sh2 + ch2| - \ln|sh1 + ch1| = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} &= \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arctg} \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{2 \sin \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40) \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx. \text{ Comme } f(x) = e^{x^2} \sin x \text{ est impaire, alors } \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = 0. \text{ En effet} \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_{-\pi}^0 (\sin x) e^{x^2} dx + \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = - \int_{\pi}^0 (\sin(-x)) e^{(-x)^2} dx + \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = \\ = - \int_{\pi}^0 (\sin(-x)) e^{(-x)^2} dx + \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = - \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 43) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{2x^7 - x^5 + 2x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{2x^7 - x^5 + 2x^3 - x}{\cos^2 x} dx + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= 0 + \operatorname{tg} x \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}, \text{ car } \frac{2x^7 - x^5 + 2x^3 - x}{\cos^2 x} \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

Exercice 9.7.

$$\begin{aligned} 1) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx. \text{ On applique la méthode du changement de variable. Posons pour cela:} \\ \sqrt{x} = t, \quad dx = 2t dt, \text{ et alors, on a} \\ (x = 4 \Rightarrow t = 2) \text{ et } (x = 9 \Rightarrow t = 3). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx &= 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1} dt = 2 \int_2^3 \left(t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= \left[2 \left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) \right]_2^3 = 2 \left(\frac{9}{2} + 3 + \ln 2 \right) - 2 \left(2 + 2 + \ln 1 \right) = 7 + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

3) On a tout d'abord $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} dx$. Posons ensuite $t = e^x$, et alors, on

a :

$$dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}, \quad (x = 0 \Rightarrow t = 1) \text{ et } (x = 1 \Rightarrow t = e).$$

Par conséquent:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \left[\ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| \right]_1^e = \ln \frac{e + \sqrt{e^2 + 1}}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$5) \text{ On a } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 2x)^3 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 2x)^3 d(\sin 2x).$$

Posons donc $\sin 2x = t$, et alors:

$$d(\sin 2x) = dt, \quad (x = 0 \Rightarrow t = 0) \text{ et } (x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - t^2)^3 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) dt = \\ &= \left[\frac{1}{2} (t - t^3 + \frac{3}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7) \right]_0^1 = \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

Exercice 9.8.

$$2) \int_{1/e}^e |\ln x| dx = - \int_{1/e}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx. \text{ Posons}$$

$$u = \ln x, \quad dv = dx \text{ alors } du = \frac{1}{x} dx \text{ et } v = x.$$

En remplaçant dans la formule d'intégration par parties on obtient

$$\int_{1/e}^e |\ln x| dx = -[x \ln x - x]_{1/e}^1 + [x \ln x - x]_1^e = 2(1 - \frac{1}{e}).$$

$$5) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx. \text{ Posons}$$

$$u = x^2, \quad dv = \cos x dx \text{ alors } du = 2x dx \text{ et } v = \sin x.$$

En remplaçant dans la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = [x^2 \sin x]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx.$$

Posons encore une fois $u = x$, $dv = \sin x dx$, alors $du = dx$ et $v = -\cos x$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx &= [x^2 \sin x]_0^{2\pi} - 2[-x \cos x]_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \cos x dx = \\ &= 0 + 4\pi - 2[\sin x]_0^{2\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

Exercice 9.9.

1) On a

$$\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x}{5-2x} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{5-2x} dx + \int_2^3 x-1 + \int_3^4 \frac{x-1}{2x-5} dx = 2 + \frac{9}{4} \log 3 - \frac{3}{4} \log 5$$

10) $\int_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$. Tout d'abord calculons une primitive de la fonction

$x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. On a

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx = \int x^{-2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

C'est une intégrale d'une différentielle binomiale avec:

$$m = -2, n = 2, p = \frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{m+1}{n} + p = 0, \text{ entier.}$$

Alors on pose $\frac{1+x^2}{x^2} = t^2$. Ce qui donne

$$x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, dx = -\frac{tdt}{\sqrt{(t^2-1)^3}} \text{ et } \sqrt{1+x^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx &= -\int \frac{t(t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}} \frac{tdt}{\sqrt{(t^2-1)^3}} = \\ &= -\int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt = \\ &= -t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} \right| + C. \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale donnée. On a

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx &= \left[-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}+x} \right| \right]_1^{\sqrt{3}} = \\ &= -\left[\frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right] = \\ &= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(2+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

Exercice 9.10.

1) Posons

$$S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}.$$

La somme S_n peut être considérée comme une somme intégrale de la fonction $x \mapsto f(x) = x$ sur le segment $[0, 1]$ en supposant que ce segment a été partagé en $n-1$ parties égales et, comme la fonction est continue, donc intégrable, alors on peut choisir les ξ_i tels que $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). On a dans ce cas

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \Delta x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2) Tout d'abord transformons la somme S_n comme suit:

$$S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}.$$

C'est une somme intégrale de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur le segment $[0, 1]$. D'où il découle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 9.11.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

Comme $\sin x = x + O(x^3)$ ($x \rightarrow 0$), on a

$$\sin \frac{i\pi}{n^2} = \frac{i\pi}{n^2} + O\left(\frac{i^3}{n^6}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \sin \frac{i\pi}{n^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{i\pi}{n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) O\left(\frac{i^3}{n^6}\right). \end{aligned}$$

Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) O\left(\frac{i^3}{n^6}\right) = 0.$$

En effet, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ (commune pour $i = 1, 2, \dots, n-1$) tel que:

$\forall i, O\left(\frac{i^3}{n^6}\right) \leq \alpha \cdot \left(\frac{i^3}{n^6}\right)$ et, alors on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) O\left(\frac{i^3}{n^6}\right) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \alpha \cdot \left(\frac{i^3}{n^6}\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \alpha \cdot \left(\frac{n^3}{n^6}\right) \leq \\ &\leq \alpha \frac{n^3}{n^6} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \alpha \frac{n^3}{n^6} \left(1 + \frac{1}{n} + 1 + \frac{2}{n} + \dots + 1 + \frac{n-1}{n}\right) = \\ &= \alpha \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)n}{2} + (n-1)\right) = \alpha \frac{3}{2} \frac{n-1}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{i\pi}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \\ &= \pi \int_0^1 x(1+x) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \frac{1}{n}}{n+1} + \frac{2 \frac{2}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \dots + \frac{2 \frac{n}{n}}{n + \frac{1}{n}} \right].$$

Transformons $S_n = \frac{2 \frac{1}{n}}{n+1} + \frac{2 \frac{2}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \dots + \frac{2 \frac{n}{n}}{n + \frac{1}{n}}$ de la manière suivante:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \frac{i}{n}}{1 + \frac{1}{in}} = S'_n - S''_n$$

où $S'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2 \frac{i}{n}$ et $S''_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \frac{i}{n}}{1 + \frac{1}{in}}$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = 0$. En effet, comme $2 \frac{i}{n} \leq 2$ et $in \geq n$, $i = 1, 2, \dots, n$, on déduit l'inégalité

$$0 \leq S''_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2}{1 + n} = \frac{2n}{n(n+1)} < \frac{2}{n}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = 0$. Ainsi, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2 \frac{i}{n} = \int_0^1 2x dx = \frac{1}{\ln 2}$$

Exercice 9.12.

$$1) \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx = 0, \text{ car } \int_a^b \sin x^2 dx \text{ est constante.}$$

$$2) \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx = -\sin^2 a, \text{ car } \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx = -\frac{d}{da} \int_b^a \sin x^2 dx.$$

$$4) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = ?$$

Pour trouver la dérivée de cette intégrale, appliquons la formule de dérivation de l'intégrale comme étant une fonction composée, à savoir

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Alors on obtient

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right) = 2x \sqrt{1+x^4}.$$

Exercice 9.13.

$$\int_0^x \cos t^2 dt$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \frac{0}{0} \text{ (F.I.)}. \text{ Appliquons la première règle de L'Hospital. Les fonctions}$$

$x \mapsto f(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$ et $x \mapsto g(x) = x$ vérifient les conditions pour appliquer cette règle. On a dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x \cos t^2 dt \right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = 1.$

4) Comme dans l'exercice précédent, on applique la première règle de L'Hospital qui est applicable. On a

$$\begin{aligned} \frac{\left(\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt \right)'}{\left(\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt \right)'} &= \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)} \cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}} \cos^3 x = \sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}} \cos^3 x, \end{aligned}$$

car $\operatorname{tg}(\sin x) \underset{(0,+)}{\sim} \sin x \underset{(0,+)}{\sim} x$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}} \cos^3 x = 1$, on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt} = 1.$$

Exercice 9.15. Calculons tout d'abord la dérivée de $\varphi(x)$. On a

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} = \\ &= \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} \left(x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt \right) \end{aligned}$$

avec, d'une part $\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} \geq 0$, et d'autre part

BROCHURE D'EXERCICES D'ANALYSE 2
Intégrale indéfinie, intégrale définie et équations différentielles du premier ordre
avec réponses et corrigés par
OSMANOV H. et KHELIFATI S

$$g(x) = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt \geq 0,$$

car $0 \leq t \leq x \Rightarrow x-t \geq 0$ et $f(t) > 0$. Alors $\varphi'(x) \geq 0, x \geq 0$. Donc φ est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9.17.

1) Si la fonction f est continue sur le segment $[1, 4]$, alors, d'après le théorème de la moyenne:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ avec } c \in]a, b[.$$

Alors la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur le segment $[1, 4]$ est égale à:

$$f(c) = \frac{1}{3} \int_1^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \frac{1}{3} \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{20}{3}.$$

4) $y = \frac{2}{e^x + 1}, x \in [0, 2]$. Comme dans l'exercice précédent 1), on a

$$f(c) = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{e^x + 1} dx.$$

Pour calculer cette intégrale, appliquons la méthode du changement de variable en posant $e^x = t$. Et alors, on a $e^x dx = dt, dx = \frac{dt}{t}$.

Déterminons les limites de la nouvelle variable t . On a

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow t = e^0 = 1 \text{ et } x = 2 \Rightarrow t = e^2. \\ f(c) &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{e^x + 1} dx = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \left[\ln \frac{t}{t+1} \right]_1^{e^2} = 2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}. \end{aligned}$$

Exercice 9.30.

1) Trouvons d'abord les points d'intersection des courbes d'équations respectives: $y^2 = 9x$ et $y = 3x$ dont les ordonnées sont égales et donc on a l'équation $\sqrt{9x} = 3x$. Ce qui donne $9x - 9x^2 = 0 \Rightarrow 9x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$. Comme $\sqrt{x} \geq x$ sur $[0, 1]$, on déduit que

$$S = \int_0^1 (3\sqrt{x} - 3x)dx = 3 \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 3 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

3) Comme pour l'exercice précédent 1), les points d'intersection de la parabole $y = 4 - x^2$ avec l'axe Ox sont déterminés par l'équation $4 - x^2 = 0$ qui donne $x = \pm 2$. Alors on a

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

10) Désignons l'aire délimitée par la courbe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ par S . Comme cette aire est symétrique par rapport aux deux axes Ox et Oy , alors il suffit de calculer l'aire de la partie de cette figure se trouvant dans le premier quadrant. De l'équation de l'ellipse, on déduit que $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $0 \leq x \leq a$, et alors on a

$$\frac{S}{4} = \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variable suivant:

$$x = a \sin t, \quad dx = a \cos t dt.$$

Dans ce cas

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ et } x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, comme $\cos t \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$, on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= ab \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Donc $S = \pi ab$.

11) On a $x^2(a^2 - x^2) \geq 0$, $|x| \leq a$ et la courbe $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ est fermée ($y = \pm|x|\sqrt{a^2 - x^2}$) et symétrique par rapport aux axes de coordonnées Ox et Oy . Comme dans l'exercice précédent 10), on a

$$S = 4 \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Faisons le changement de variable $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$. Dans ce cas

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ et } x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent

$$S = 4a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = 4a^3 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} a^3.$$

Exercice 9.31.

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x = 0$, $x = 4$. La longueur de l'arc d'une courbe $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), donnée en coordonnées rectangulaires se calcule suivant la formule:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

si $f' \in C([a, b])$. Comme $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \in C([0, 4])$, alors on a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \left[\frac{2\sqrt{(1 + \frac{9}{4}x)^3}}{3} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Exercice 9.32.

2) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. La longueur de l'arc d'une courbe dont l'équation est donnée sous forme paramétrique se calcule selon la formule suivante:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(-\sin t + \sin t + t \cos t)^2 + a^2(\cos t - \cos t + t \sin t)^2} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} dt = a \int_0^{2\pi} t dt = \left[a \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 a. \end{aligned}$$

Exercice 9.33.

2) $\rho = \frac{p}{1 + \cos \phi}$ ($|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$). La longueur d'un arc de la courbe dont l'équation est donnée en coordonnées polaires se calcule par la formule suivante:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\phi.$$

On a $\rho' = \frac{p \sin \phi}{(1 + \cos \phi)^2}$ et

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{1 + \cos \phi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \phi}{(1 + \cos \phi)^2}} d\phi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{1 + \cos \phi} \sqrt{\frac{2 + 2 \cos \phi}{(1 + \cos \phi)^2}} d\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{1 + \cos \phi} \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \phi}} d\phi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{(1 + \cos \phi) \cos \frac{\phi}{2}} d\phi = p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^3 \frac{\phi}{2}} d\phi = 2p \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ par parties en posant

$$u = \frac{1}{\cos t}, \quad du = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \quad \text{et} \quad dv = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad v = \tan t.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} &= \left[\frac{\tan t}{\cos t} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} dt = \sqrt{2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t}. \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t} &= \sqrt{2} + \left[\ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \ln \left| \tan \frac{3\pi}{8} \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent $L = p\left(\sqrt{2} + \ln\left|tg \frac{3\pi}{8}\right|\right)$.

Exercice 9.34.

1) Le volume du corps obtenu par la rotation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de l'axe Ox se calcule par la formule suivante:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2 dx = \\ &= \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

5) $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Déterminons tout d'abord, l'intervalle d'intégration. Pour cela, on a $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = 2$.

Alors le volume V est égal

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{15}. \end{aligned}$$

Exercice 9.36.

3) L'aire de la surface obtenue par la rotation de la chaînette $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$) se calcule par la formule suivante:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-b}^b y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi a \int_{-b}^b \cosh \frac{x}{a} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx = \\ &= 2\pi a \int_{-b}^b \cosh^2 \frac{x}{a} dx = 2\pi a \int_{-b}^b \frac{1 + \cosh 2 \frac{x}{a}}{2} dx = \\ &= \pi a \left[x + \frac{a}{2} \sinh \frac{x}{a} \right]_{-b}^b = \pi a \left(2b + a \sinh \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Chapitre X. Equations différentielles ordinaires du premier ordre.

§1. Equations différentielles ordinaires du premier ordre. Généralités.

Une équation différentielle ordinaire (E.D.O.) est une relation entre une fonction inconnue d'une seule variable, ses dérivées et la variable indépendante. Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, on parle d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.).

XI.1. Equations différentielles ordinaires du premier ordre. Une **équation différentielle du premier ordre** est donc une équation de la forme

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

qui peut s'écrire quelquefois sous forme explicite

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

c'est à dire que l'équation (1) est résolue par rapport à y' , dite **équation normalisée** ou sous **forme différentielle**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

Dans la suite, on étudiera essentiellement les e.d.o. de la forme (2).

XI.2. Solutions d'une équation différentielle. Courbes intégrales.

Définition 1. On appelle **solution** de l'équation différentielle (1) ou (2) toute fonction $y = \varphi(x)$ définie et dérivable dans un intervalle $I = (a, b)$ vérifiant

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \quad \forall x \in (a, b) \quad (4)$$

ou

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in (a, b) \quad (5)$$

Remarques.

1) Il est clair que $\forall x \in (a, b)$, le point $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ appartient au domaine de définition de la fonction F dans (1) et le point $(x, \varphi'(x))$, à celui de f dans (2).

2) Dans la plupart des cas, la solution est trouvée sous forme implicite:

$$\psi(x, y) = 0. \quad (6)$$

On dit, dans ce cas, qu'on a une **solution implicite**. Par exemple, l'équation différentielle: $y' = -\frac{x}{y}$ admet comme solution implicite, :

$$x^2 + y^2 - C^2 = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En effet, en dérivant par rapport à x , on obtient $2x + 2yy' = 0$, c'est à dire $y' = -\frac{x}{y}$.

Définition 2. Toute solution d'une équation différentielle ordinaire, sous forme explicite ou implicite, est appelé **courbe intégrale** de cette équation

BROCHURE D'EXERCICES D'ANALYSE 2
Intégrale indéfinie, intégrale définie et équations différentielles du premier ordre
avec réponses et corrigés par
OSMANOV H. et KHELIFATI S

Les courbes intégrales d'une équation différentielle représentent ainsi les graphes des solutions de cette équation.

Remarque. Il est tout aussi important de considérer la variable x comme fonction de y , $x = \psi(y)$, $y \in (\alpha, \beta)$.

Définition 3. Deux équations différentielles

$$F_1(x, y, y') = 0, \quad F_2(x, y, y') = 0 \quad (7)$$

sont dites **équivalentes** dans le domaine $D \subset \mathbb{R}$ si toute solution $y = \phi(x)$ de l'une d'elles est solution de l'autre et inversement.

Dans la suite, au lieu d'étudier une équation différentielle, il nous arrivera souvent d'étudier une autre qui lui équivalente.

XI.3. Etude d'une équation différentielle. L'étude d'une équation différentielle consiste à:

- 1°/ trouver l'ensemble de ses solutions;
- 2°/ trouver les solutions possédant certaines propriétés;
- 3°/ démontrer l'existence d'une solution possédant certaines propriétés si on ne peut la calculer.

Dans ce cours, on se limitera à la recherche de solutions possédant certaines propriétés.

XI.4. Problème de la condition initiale. Soit l'e.d. (2) où la fonction f est définie dans un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit (x_0, y_0) un point de D . On appelle **problème de la condition initiale ou problème de Cauchy** de l'e.d. (2) la recherche d'une solution $y = \phi(x)$ de cette équation vérifiant la condition:

$$\phi(x_0) = y_0, \quad (8)$$

appelée **condition initiale**.

Géométriquement, cela signifie qu'il faut chercher une courbe intégrale de l'e.d. (2) passant par le point $(x_0, y_0) \in D$.

Ainsi le problème de Cauchy est la donnée d'une e.d.o. avec une condition initiale:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (9)$$

XI.5. Existence et unicité du problème de la condition initiale. Le problème de Cauchy (9) peut admettre une seule solution, plusieurs solutions ou aucune solution. En général, pour l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (9), on a le théorème suivant donnant des conditions suffisantes:

Théorème. Etant donné le problème de Cauchy (9) avec f définie dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D$. Si la fonction f est continue dans un voisinage

$V_0 =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \gamma, y_0 + \gamma[$ de (x_0, y_0) , alors le problème de Cauchy (9) admet au moins une solution passant par le point (x_0, y_0) .

De plus, si $\frac{\delta f}{\delta y}$ est continue dans V_0 , alors cette solution est unique et définie sur un intervalle $]x_0 - h, x_0 + h[$.

Remarques. 1) Si les conditions du théorème ne sont pas vérifiées, on ne peut rien dire sur l'existence et l'unicité de la solution du problème (9), car ces conditions sont suffisantes mais pas nécessaires.

2) Les points où les conditions du théorème ne sont pas vérifiées sont dits **singuliers**.

3) Deux solutions $y = \phi(x)$ et $y = \psi(x)$ du problème (9) coïncident s'il existe un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ sur lequel elles sont égales.

XI.6. Solution générale et solutions particulières. Solutions singulières.

Définition 1. On appelle **solution générale** de l'équation différentielle (1) ou (2), une famille (S) des courbes définies par

$$y = \phi(x, C) \quad (10)$$

dépendant d'un paramètre $C \in \mathbb{R}$ telles que:

i) pour toute valeur admissible de C , la fonction $y = \phi(x, C) \in (S)$ est solution de l'e.d. (1) ou (2), c'est à dire que

$$F(x, \phi(x, C), \phi'(x, C)) = 0 \quad \text{ou} \quad y' = \phi'(x, C) = f(x, \phi(x, C)), \quad x \in (a, b),$$

ii) quelque soit la condition initiale $y(x_0) = y_0$, il existe $C = C_0$ tel que la solution $y = \phi(x, C_0)$ vérifie $y(x_0) = y_0$.

Remarque. En fait, la constante (ou paramètre) C ne prend pas n'importe quelle valeur réelle, elle dépend généralement du domaine D sur lequel est définie la fonction F (ou f).

Définition 2. (Solution particulière) Toute solution de l'e.d. (1) ou (2) obtenue à partir de la solution générale (10) pour une certaine valeur du paramètre c est dite **solution particulière**.

Donc la solution générale de l'e.d. (1) ou (2) est l'ensemble de ses solutions particulières.

Définition 3. La relation

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (11)$$

définissant implicitement la solution générale de l'e.d. est appelée **intégrale générale** de l'e.d. du premier ordre, et toute relation obtenue à partir de l'intégrale générale (11) pour une valeur particulière de la constante c est appelée **intégrale particulière** de l'e.d.

Remarque Il peut exister des solutions de l'e.d. (1) ou (2) qui ne sont pas particulières, c'est à dire qu'on ne peut les obtenir en donnant une valeur à la constante c dans la solution générale. Ces solutions sont dites **singulières**. Plus exactement, on a la définition suivante:

Définition 4. On appelle **solution singulière** de (1) ou (2) toute courbe intégrale telle que par chacun de ses points, il passe une autre courbe intégrale.

Ainsi, il n'y a pas d'unicité de solutions passant par les points d'une courbe intégrale singulière.

§2. Méthodes de résolution de certaines équations différentielles de la forme (2).

Résoudre une équation différentielle du premier ordre signifie trouver sa solution générale ou son intégrale générale. Parmi les méthodes connues, celle qui consiste à résoudre une e.d. par les intégration est dite **méthode de quadrature** et, dans ce cas, on dit "**intégrer une équation différentielle**" au lieu de résoudre une e.d. Dans ce §, on développe quelques méthodes d'intégration des e.d.o du premier ordre les plus connues et qui sont réparties en plusieurs types.

Remarque. La plupart des e.d.o. ne peuvent être résolues par la méthode d'intégration. Cependant, il existe d'autres méthodes, à savoir la méthode géométrique des isoclines, la méthode des approximations successives qui ne font pas partie de ce cours.

Dans la suite, on supposera que les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont satisfaites.

XI.7 Equations différentielles à variables séparées. C'est une équation différentielle ayant l'une des formes suivantes:

$$y'f_2(y) = \frac{dy}{dx}f_2(y) = f_1(x) \quad (12)$$

ou

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (13)$$

Dans ce cas, on obtient une e.d. où les variables x et y sont séparées comme suit:

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \quad \text{ou} \quad N(y)dy = -M(x)dx.$$

En intégrant les deux expressions, on obtient la solution générale sous la forme

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C \quad \text{ou} \quad \int N(y)dy = -\int M(x)dx + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Il suffit alors de calculer les intégrales ainsi obtenues.

XI.8. Equations différentielles à variables séparables. C'est une équation différentielle ayant l'une des formes suivantes dont les variables peuvent être séparées:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad (14)$$

ou

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \quad (15)$$

Ces équations se transforment en des équations différentielles à variables séparées en séparant justement les variables comme suit :

$$(14) \Leftrightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \quad \text{si } f_2(y) \neq 0 \quad (16)$$

et

$$(15) \Leftrightarrow \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx \quad \text{si } N_1(x)M_2(y) \neq 0. \quad (17)$$

Ainsi en intégrant ces expressions, on obtient la solution générale comme dans XI.7 sous la forme

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \quad \text{ou} \quad \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + C,$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque. Dans (16) et (17), les conditions $f_2(y) \neq 0$ et $N_1(x)M_2(y) \neq 0$ peuvent contenir des solutions dont il faudra ajouter à la solution générale.

Exemple. Intégrer l'équation différentielle suivante: $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$. C'est une e.d. à variables séparables. En séparant les variables et en intégrant les expressions obtenues, on obtient

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{1-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{si } (1-x)(1+y) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\log|1+y| = -\log|1-x| + C \Leftrightarrow \log|(1+y)(1-x)| = C$$

$$\Leftrightarrow \log|(1+y)(1-x)| = C \Leftrightarrow (1+y)(1-x) = C_1$$

avec $C_1 = e^C$. Ainsi la solution générale est

$$y = \frac{C_1}{1-x} - 1 = \frac{C_1 - 1 + x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

Si $(1-x)(1+y) = 0$, alors on a $x = 1$ ou $y = -1$. Dans ces cas, ces deux courbes sont solutions de l'équation différentielle donnée. En effet, on a $1-x = 0$, $dx = 0$ et $1+y = 0$, $dy = 0$. Donc, comme x et y jouent le même rôle, $x = 1$ et $y = -1$ sont aussi des solutions de l'e.d. donnée.

XI.9. Equation différentielle homogène du premier ordre.

Définition 1. On dit qu'une fonction f dépendant de deux variables x et y , $z = f(x, y)$, est une **fonction homogène de degré** $n \in \mathbb{N}$ par rapport à x et y si pour tout réel λ , on a

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y). \quad (18)$$

Exemple 1. La fonction $f(x, y) = x^3 + y^3$ est une fonction homogène de degré 3, car on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 = \lambda^3(x^3 + y^3) = \lambda^3 f(x, y).$$

Exemple 2. La fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ est une fonction homogène de degré zéro, car

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \cdot \lambda y}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{xy}{x^2 - y^2} = f(x, y) = \lambda^0 \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Définition 2.

i) L'équation différentielle du premier ordre de la forme (2), $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, est dite **homogène** par rapport à x et y si la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport à x et y .

ii) L'équation différentielle du premier ordre $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (3) est dite **homogène** si les fonctions M et N sont homogènes de même degré par rapport aux deux variables x et y .

XI.10. Intégration d'une équation différentielle homogène.

Comme $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, on pose $\lambda = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), alors on obtient $f(x, y) = f(1; \frac{y}{x})$. Ainsi, l'équation (2) s'écrit comme suit

$$\frac{dy}{dx} = f(1; \frac{y}{x}), \quad (19)$$

c'est à dire qu'une équation homogène peut toujours s'écrire sous forme

$$\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x}). \quad (20)$$

Pour intégrer cette équation, faisons le changement de variable $\frac{y}{x} = u$, c'est à dire $y = ux$ ($x \neq 0$). Ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x. \quad (21)$$

En remplaçant dans l'équation (20), on obtient

$$u + \frac{du}{dx}x = f(1, u) = \phi(u)$$

qui est une e.d. à variables séparables. En séparant les variables, on obtient

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \text{si } \phi(u) - u \neq 0,$$

et par intégration on trouve

$$\int \frac{du}{\phi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Enfin, en remplaçant ensuite u par $\frac{y}{x}$, on obtient la solution générale de l'équation (20).

Si $\phi(u) - u = 0$, alors la racine $u = u_k$, c'est à dire $y = u_k x$ est solution de l'équation (21).

Exemple. Soit l'équation différentielle $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$. Elle s'écrit sous forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \text{si } xy \neq 0.$$

La fonction $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ est homogène de degré zéro. En posant $\frac{y}{x} = u$ ($x \neq 0$) et en appliquant la méthode précédente, on obtient, après calcul, l'équation à variables séparables suivante:

$$\frac{du}{dx} x = \frac{1 - u^2}{2u} \Leftrightarrow \frac{2u}{1 - u^2} du = \frac{dx}{x} \quad \text{si } 1 - u^2 \neq 0.$$

En intégrant, on trouve

$$\int \frac{2u}{1 - u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow -\ln|1 - u^2| = \ln|x| + C \Rightarrow -\ln\left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left|\frac{y^2 - x^2}{x}\right| = -C \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{x} = e^{-C} = C_1.$$

Donc l'intégrale générale est donnée par $y^2 - x^2 = C_1 x$.

Si $1 - u^2 = 0$, alors $u = \pm 1$ et les droites $y = \pm x$ sont solutions de l'équation donnée.

D'autre part, si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ sont aussi des solutions de l'e.d. donnée.

XI.11. Equations différentielles se ramenant à des équations homogènes. Considérons l'équation différentielle du premier ordre de la forme:

$$= f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right). \quad (22)$$

Si $c = c_1 = 0$, alors on obtient une équation différentielle homogène qui s'intègre comme dans le numéro précédent XI.10.

Si $c \neq 0$ ou $c_1 \neq 0$, l'équation donnée n'est pas homogène. Dans ce cas, on peut se ramener à une équation homogène équivalente en faisant le changement de variable suivant:

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k \quad (23)$$

tel que h et k sont des constantes à déterminer. De (23), il découle que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$. En remplaçant les expressions de x, y et $\frac{dy}{dx}$ dans (22), on obtient l'e.d. suivante:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}\right). \quad (24)$$

Il s'agit alors de choisir maintenant h et k de façon que

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0. \end{cases} \quad (25)$$

pour que l'e.d. (24) devienne homogène. Deux cas sont possibles:

1) Le déterminant du système d'équations linéaires (25) est non nul,

$$\Delta = ab_1 - a_1b \neq 0,$$

et alors il existe h et k uniques vérifiant (25).

2) Le déterminant du système d'équations linéaires (25) est, $\Delta = 0$, alors le système (25) n'admet pas de solutions. Dans ce cas, on a $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ et l'e.d. (22) devient

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right).$$

Le changement de variable $z = ax + by$ transforme cette dernière équation en une équation à variables séparables.

Exemple 1. Soit l'e.d. $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$. Le déterminant du système est égal à $\Delta = (2) \cdot (2) - 4 = 0$. Ainsi, on est dans le cas 2) précédent. Posons alors $2x + y = z$. Ce qui donne $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$. En remplaçant dans l'équation donnée, on obtient

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5z + 9}{2z + 5},$$

qui est une équation à variables séparables si $5z + 9 \neq 0$, de la forme:

$$\frac{2z + 5}{5z + 9} dz = dx \Rightarrow \int \frac{2z + 5}{5z + 9} dz = \int dx + C \Rightarrow \frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln|5z + 9| = x + C.$$

En remplaçant $z = 2x + y$ on trouve l'intégrale générale de l'équation donnée

$$10y + 5x + 7 \ln|10x + 5y + 9| = C_1.$$

Exemple 2. Soit l'e.d. $(x + 2y + 1)dx - (2x - 3)dy = 0$ qui s'écrit sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3} \text{ si } 2x - 3 \neq 0,$$

dont le déterminant est égal à $\Delta = -4 \neq 0$. Ainsi, en posant $x = x_1 + h$ et $y = y_1 + k$, alors l'e.d. devient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + 2y_1 + h + 2k + 1}{2x_1 + 2h - 3}.$$

Le système

$$\begin{cases} h + 2k + 1 = 0, \\ 2h - 3 = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique: $h = 3$ et $k = -\frac{5}{2}$. Ainsi l'e.d. devient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + 2y_1}{2x_1}$$

qui est une équation homogène. En appliquant la méthode exposée en XI. 9. on obtient la solution générale sous forme: $\ln|2x - 3| - \frac{4y + 5}{2x - 3} = C.$

XI.12. Equations différentielles linéaires. Parmi les équations différentielles ordinaires fréquentes, on a les équations linéaires données par la définition suivante:

Définition. On appelle *équation différentielle linéaire (E.D.L.)* du premier ordre de la forme

$$P(x)y' + Q(x)y = R(x), \tag{26}$$

*c'est à dire une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et sa dérivée, où P, Q et R sont des fonctions de x données, continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,. Si $R = 0$ sur I , alors (26) est dite équation différentielle linéaire **homogène ou sans second membre**. Sinon, c'est une e.d.l. avec second membre.*

Si $P \neq 0$, alors (26) est équivalente à l'E.D.L. suivante:

$$y' + p(x)y = r(x) \quad (27)$$

avec $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ et $r(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$, appelée **équation linéaire normalisée**.

Si $P = 0$, alors il faut vérifier si ses racines sont des solutions de l'e.d. (26).

Recherche des solutions d'une E.D.L. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (27), alors la fonction $y = y_2 - y_1$ vérifie l'e.d. homogène

$$y' + p(x)y = 0 \quad (28)$$

associée à l'équation (27). Ainsi on déduit que la solution générale de (27) est la somme de la solution générale y_G de l'E.D.L.(28) homogène associée à (27) et d'une solution particulière y_p de (27), c'est à dire $y = y_G + y_p$.

Solution générale de l'équation linéaire homogène (28). Soit l'équation différentielle linéaire homogène normalisée (28): $y' + p(x)y = 0$ avec p une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord que la courbe $y = 0$ est une solution de (28). Supposons que $y \neq 0$ et considérons une primitive $P(x)$ de p sur I qui existe, car p est continue sur I . Dans ce cas, montrons que la fonction $y = Ce^{-P(x)}$ ($C \neq 0$) est une solution de (28). En effet, en dérivant cette fonction et en remplaçant dans (28), on obtient

$$y' + py = -Cp(x)e^{-P(x)} + Cp(x)e^{-P(x)} = 0.$$

D'autre part, montrons que l'ensemble des solutions de (28) est formé de ces solutions, c'est à dire que toute solution (28) est de la forme $y = Ce^{-P(x)}$ pour un certain $C \in \mathbb{R}$. En effet, soit y une solution quelconque de l'équation (28) et considérons la fonction $z = ye^{P(x)}$ qui donne $y = ze^{-P(x)}$. En dérivant cette dernière fonction et en remplaçant les expressions obtenues dans (28), on obtient

$$z'(x)e^{-P(x)} - p(x)z(x)e^{-P(x)} + p(x)z(x)e^{-P(x)} = 0 \Rightarrow z'(x)e^{-P(x)} = 0.$$

Comme $\forall x \in I, e^{-P(x)} \neq 0$, on déduit que $z' = 0$, et alors $z = C \in \mathbb{R}$. Donc y s'écrit $y = Ce^{-P(x)}$. Ainsi l'ensemble des solutions S_h de l'équation linéaire homogène (28) est

$$S_h = \left\{ y = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R} \right\}$$

qui est égal à la solution générale de (28).

Exemple. Résoudre l'équation $y' + y \sin x = 0$. On a $P(x) = \int \sin x dx = -\cos x$. Ainsi la solution générale de cette équation est: $y = Ce^{-\cos x}, C \in \mathbb{R}$.

Solution générale de l'équation (27) avec second membre. Comme la solution générale de (27) est la somme d'une solution particulière de (27) et la solution générale de l'équation linéaire homogène (28) associée à (27), cherchons donc une solution particulière de (28). Soit y une

solution de (27). En multipliant les deux membres de (27) par e^P avec $P(x) = \int p(x)dx$ et sachant que $r(x)e^{P(x)}$ admet une primitive, car elle est continue, on déduit que

$$\begin{aligned}(ye^{P(x)})' &= y'e^{P(x)} + p(x)ye^{P(x)} = (y' + p(x)y)e^{P(x)} = r(x)e^{P(x)} \Rightarrow \\ (ye^{P(x)})' &= r(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : ye^{P(x)} = \int r(x)e^{P(x)}dx + C \Leftrightarrow \\ \exists C \in \mathbb{R} : y &= e^{-P(x)} \int r(x)e^{P(x)}dx + Ce^{-P(x)}.\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation linéaire (27) avec second membre est égale à

$$y = e^{-P(x)} \int r(x)e^{P(x)}dx + Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Méthode pratique de résolution de l'équation (27). La formule précédente donnant la solution générale de (27) peut ne pas être retenue par coeur. Pour cela, en pratique, on applique la méthode de résolution suivante en deux étapes:

- 1/ on cherche la solution générale de l'équation linéaire (28) associée à (27);
- 2/ on cherche une solution particulière de (27)
- 3) ensuite on fait la somme des deux solutions obtenues pour obtenir la solution générale de (27).

Développons ces deux méthodes.

1/ Recherche de la solution générale de (28). Sachant que $y = 0$ est solution de (28), alors on supposera par la suite que $y \neq 0$. Comme cette équation est à variables séparables, alors elle est équivalente à

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx. \quad (29)$$

En intégrant cette dernière, on obtient

$$\log|y| = -\int p(x)dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Comme la fonction $\log$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $C_2 > 0$ tel que $C_1 = \log C_2$. Donc la solution générale, incluant la solution $y = 0$, s'écrit

$$|y| = C_2 e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow y = C e^{-\int p(x)dx}, \quad C = \pm C_2.$$

2/ Pour la recherche d'une solution particulière de (27), on peut appliquer l'une des deux méthodes principales suivantes: méthode de la variation de la constante ou méthode de Bernoulli.

i) Méthode de la variation de la constante (méthode de Lagrange).

Première étape. On cherche la solution générale de l'équation linéaire homogène (28) associée à (27) comme exposée plus haut. Cette solution est donnée par la formule

$$y = C e^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Deuxième étape. Cherchons une solution particulière y_p de (27) sous la forme

$$y_p = y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (31)$$

c'est dire que la constante C est considérée comme une fonction de x (variation de la constante). En dérivant (31) $y' = C'e^{-\int p(x)dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)dx}$ et en remplaçant dans (27), on obtient, après simplification, l'e.d. suivante:

$$C' = e^{\int p(x)dx} r(x),$$

dont la solution est obtenue par intégration

$$C = \int e^{\int p(x)dx} r(x)dx + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Comme on cherche une solution particulière, on peut prendre $K = 0$, ainsi une solution particulière de (27) est égale à:

$$y_p = \left(\int e^{\int p(x)dx} r(x)dx \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Donc la solution générale de (27) est donnée par la formule:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + \left(\int e^{\int p(x)dx} r(x)dx \right) e^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

ii) Deuxième méthode (méthode de Bernoulli). On cherche la solution de (27) sous la forme

$$y = u(x)v(x). \quad (33)$$

Pour plus de commodité, on omettra la variable x dans u , u' , v et v' . Dans ce cas, on a $y' = u'v + uv'$. En remplaçant y et y' dans (27), on obtient, après simplification

$$u'v + u[v' + p(x)v] = r(x). \quad (34)$$

On cherche ensuite une solution de l'équation linéaire homogène $v' + p(x)v = 0$ qui est une équation à variables séparables. Ayant trouvée v , l'équation (34) devient $u'v = r(x)$, d'où l'on déduit u , et par conséquent y .

Exemple. Résoudre l'équation $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$. C'est une E.D.L. avec second membre. Appliquons la méthode de Bernoulli en cherchant $y = u \cdot v$. On a donc $y' = u'v + uv'$ et l'équation devient

$$u'v + u(v' - \frac{n}{x}v) = e^x x^n. \quad (35)$$

Choisissons la fonction $v = v(x)$ de façon que: $v' - \frac{n}{x}v = 0$. On a $\frac{dv}{v} = \frac{n}{x}dx$ qui est une équation à variables séparées. En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v} &= \int \frac{n}{x} dx + \ln C_1 \Rightarrow \ln|v| = n \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{v}{C_1} \right| = \ln|x|^n \Rightarrow v = C_1 x^n. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $C_1 = 1$, donc $v = x^n$. Dans ce cas, (35) devient $\frac{du}{dx} \cdot x^n = e^x x^n$, c'est à dire que

$$du = e^x dx, \quad \int du = \int e^x dx \Rightarrow u = e^x + C.$$

Ainsi la solution générale de l'équation (35) est donnée par $y = (e^x + C)x^n$.

Méthode du principe de superposition. Si le second membre de l'équation linéaire (27) est la somme de plusieurs fonctions, c'est à dire de la forme:

$$y' + p(x)y = r_1(x) + r_2(x) + \dots + r_n(x) = r(x), \quad (36)$$

on peut appliquer le **principe de superposition des solutions** suivant: on cherche une solution particulière de chacune des n équations suivantes

$$y' + p(x)y = r_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (37)$$

qu'on notera respectivement par $y_1, y_2, \dots, y_n$. Dans ce cas une solution particulière de l'équation (36) donnée est $y_p = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. En effet, on a

$$y'_p + p(x)y_p = \sum_{k=1}^n y'_k + p(x) \sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n y'_k + p(x)y_k = \sum_{k=1}^n r_k(x) = r(x).$$

Cas particuliers d'équations linéaires à coefficients constants. Ce sont les équations de la forme

$$y' + ay = r(x), \quad (38)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et r une fonction continue sur I . L'équation homogène associée étant alors

$$y' + ay = 0. \quad (39)$$

En cherchant la solution de cette dernière équation sous la forme $y = Ce^{kx}$, $C \neq 0$, on obtient

$$y' = Cke^{kx} \text{ et } y' + ay = Cke^{kx} + Cae^{kx} = C(k+a)e^{kx} = 0.$$

Comme $e^{kx} \neq 0$, alors k vérifie l'équation pour

$$k + a = 0, \quad (40)$$

appelée **équation caractéristique** de (39), dont la solution est $k = -a$. Ainsi $y = Ce^{-ax}$.

Remarque. En appliquant la méthode exposée plus haut, on obtiendrait le même résultat.

Cas particulier de solutions particulières de l'équation (38). Si le second membre est de la forme

$$r(x) = P(x)e^{mx}(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x), \quad (41)$$

on peut chercher une solution particulière de (38) sous la forme

$$y_p = Q(x)e^{lx}(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x).$$

Revu jusqu'ici

XI.13. Equations différentielles de Bernoulli. Parmi les équations différentielles pouvant se ramener à des équations linéaires, on a celles de Bernoulli, données par la définition suivante:

Définition. On appelle *équation différentielle de Bernoulli* toute équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (42)$$

où P et Q sont des fonctions continues de x , $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pm 1$ (sinon, on aurait une équation différentielle linéaire ou à variables séparables). En divisant les deux membres de l'équation par y^α , on obtient

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x). \quad (43)$$

On fait alors le changement de variable suivant en posant $y^{1-\alpha} = z$ et on trouve

$$y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha}. \text{ En remplaçant dans l'équation (43), on obtient l'équation linéaire}$$

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

On résout cette dernière équation en z par l'une des deux méthodes exposées en XI.12. Ensuite on remplace $z = y^{1-\alpha}$ pour avoir la solution générale.

XI.14. Equations différentielles aux différentielles totales.

Définition 1. Soit $z = u(x, y)$ une fonction à deux variables réelles x et y définie et dérivable par rapport à chacune des variables x et y sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. On appelle **différentielle totale** de u l'expression suivante:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad (44)$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant les dérivées (partielles) respectivement par rapport à x et à y .

Définition 2. On appelle **forme différentielle** une expression de la forme

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

où M et N sont des fonctions des deux variables x et y . On dit cette forme différentielle est **exacte** dans D s'il existe une fonction $z = u(x, y)$ définie sur D telle que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Définition 3. L'équation différentielle

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (45)$$

est dite aux **différentielles totales** si la forme différentielle $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ est exacte.

Dans ce cas, il existe une fonction $z = u(x, y)$ ayant des dérivées partielles telle que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = 0.$$

Ainsi la solution générale de (45) est donnée par la formule $u(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour savoir si une équation différentielle est aux différentielles totales, on a la condition nécessaire et suffisante suivante exprimée par le théorème suivant:

Théorème. Si M, N , $\frac{\partial N}{\partial x}$ et $\frac{\partial M}{\partial y}$ sont continues sur D , alors pour que la forme différentielle $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ soit exacte, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (46)$$

Exemple. Soit l'équation $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$. Tout d'abord vérifions la condition (46). On a

$$M(x, y) = x^2 + y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{et} \quad N(x, y) = x - 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1.$$

et, alors $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Par conséquent, l'équation donnée est aux différentielles totales. Il existe donc une fonction $u(x, y)$ telle $du = (x^2 + y)dx + (x - 2y)dy$. Trouvons cette fonction. De la relation $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = x^2 + y$, on déduit

$$u(x, y) = \int (x^2 + y)dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} + yx + \varphi(y), \quad (47)$$

où $\varphi(y)$ est une fonction de y (c'est donc une constante par rapport à la variable x) qu'il faut déterminer. En dérivant cette égalité par rapport à y et sachant que $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x - 2y$, il vient que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) \Rightarrow x - 2y = x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

De cette façon on trouve que $u(x, y) = \frac{x^3}{3} + yx - y^2 + C$. La solution générale est donc $\frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$.

XI.15. Facteur d'intégrant. Si l'équation (45) n'est pas aux différentielles totales, il est possible de trouver une fonction $\mu = \mu(x, y)$ de telle façon que si on multiplie la forme différentielle $\omega = Mdx + Ndy$ de l'équation (45) par cette fonction, alors la forme différentielle obtenue

$$\mu Mdx + \mu Ndy \quad (48)$$

serait exacte. Pour cela, elle doit satisfaire aux conditions du théorème précédent, à savoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Leftrightarrow M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow N \frac{\partial \log \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (49)$$

Ainsi tout facteur intégrant de (45) vérifie (49) qui est une équation différentielle aux dérivées partielles. Généralement, il est difficile de déterminer la solution μ de (49). Cependant, dans certains cas particuliers, l'équation (49) peut se simplifier. Etudions certains de ces cas.

1) Cas où μ ne dépend pas de y : $\mu = \mu(x)$. Dans ce cas, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ et (49) devient

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}, \quad (50)$$

et il est nécessaire à ce que l'expression de droite dans (50) ne dépende que de x .

2) De manière analogue, si $\mu = \mu(y)$, alors (49) devient

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}. \quad (51)$$

Exemple. Trouver la solution générale de l'équation $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$.

On a $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x}$. Comme $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-2}{y}$, on est dans le cas 2.

Cherchons alors un facteur intégrant sous forme $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$. On obtient ainsi

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}} dy} = e^{\int \frac{-2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = \frac{1}{y^2}.$$

En multipliant les deux parties de l'équation donnée par $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$, il vient que

$$\frac{1}{xy} dx + \left(y - \frac{\ln x}{y^2} \right) dy = 0.$$

Il est facile de voir que l'équation obtenue est une équation aux différentielles totales et le premier membre de cette équation est la différentielle totale d'une certaine fonction $u = u(x, y)$.

Trouvons cette fonction. On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{xy} \text{ et } u(x, y) = \int \frac{1}{xy} dx + \phi(y),$$

où $\phi(y)$ est une fonction de y , constante par rapport à x . D'où $u(x, y) = \frac{\ln x}{y} + \phi(y)$. En dérivant cette égalité par rapport à y , on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\ln x}{y^2} + \phi'(y).$$

En tenant compte de l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = y - \frac{\ln x}{y^2},$$

on trouve $y - \frac{\ln x}{y^2} = -\frac{\ln x}{y^2} + \phi'(y)$. D'où $\phi'(y) = y$ et $\phi(y) = \frac{y^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$. Donc

$$u(x, y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} + C.$$

Par conséquent la solution générale de l'équation proposée est

$$\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$$

§3. Equations différentielles non résolues par rapport à la dérivée.

Soit une équation différentielle de la forme (1)

$$F(x, y, y') = 0.$$

Pour trouver les solutions de cette équation, il est préférable de la résoudre d'abord par rapport à y' et, ensuite, appliquer l'une des méthodes précédentes. Cependant, très souvent, cela n'est pas possible et, même si c'était le cas, il n'est pas toujours facile d'intégrer l'équation ou les équations obtenues. C'est pour cela qu'on résout les équations non résolues par rapport à y' en introduisant souvent un paramètre à l'aide d'un changement de fonction inconnue comme dans le cas d'une équation de Bernoulli. Dans ce paragraphe, on étudie quelques unes de ces équations.

XI.16. Equation sous forme d'un polynôme en y' . Soit l'équation différentielle de la forme

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0. \quad (52)$$

En posant $\frac{dy}{dx} = z$, l'équation (52) devient

$$z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)z + a_n(x, y) = 0 \quad (53)$$

qui est un polynôme en z de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Ensuite cherchons les solutions réelles de (53) par rapport à z dont le nombre est $k \leq n$. Soient $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_k(x, y)$ ces solutions. Ainsi on obtient un système équivalent d'équations

$$y' = f_1(x, y), y' = f_2(x, y), \dots, y' = f_k(x, y), \quad k \leq n \quad (54)$$

qui sont des équations résolues par rapport à y' , dont les intégrales générales respectives sont

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \Phi_2(x, y, C) = 0, \dots, \Phi_k(x, y, C) = 0$$

Par conséquent l'intégrale générale de l'équation (52) s'écrit

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \dots \Phi_k(x, y, C) = 0.$$

Exemple. Résoudre l'équation $(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$. On a

$$(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0 \Leftrightarrow (y' + \sin x)(y' - 2xy) = 0$$

et alors, on obtient deux équations résolues par rapport à y'

$$\frac{dy}{dx} + \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

qui sont des équations à variables séparables dont les solutions générales s'obtiennent par intégration, à savoir, respectivement

$$y = \cos x + C \quad \text{et} \quad y = Ce^{x^2}.$$

Ainsi la solution générale est

$$(y - \cos x - C)(y - Ce^{x^2}) = 0.$$

XI.17. Equations incomplètes de la forme $f(y, y') = 0$ et $f(x, y') = 0$. Si ces deux équations ne pas résolubles par rapport à y' , alors en général, on pose $y' = p$.

Premier cas. L'équation $f(y, y') = 0$ est résoluble par rapport à y , c'est à dire

$$y = \phi(y') = \phi(p).$$

En dérivant cette dernière égalité par rapport à x , on obtient

$$\frac{dy}{dx} = p = \phi'(p) \frac{dp}{dx} \Rightarrow dx = \frac{\phi'(p)}{p} dp \text{ si } p \neq 0.$$

Dans ce cas, la solution générale s'obtient par intégration sous forme paramétrée

$$x = \int \frac{\phi'(p)}{p} dp + C, \quad y = \phi(p).$$

Deuxième cas. L'équation $f(y, y') = 0$ n'est pas résoluble par rapport à y . Si elle peut s'écrire à l'aide d'un paramètre t tel que

$$y = \phi(t), \quad p = y' = \frac{dy}{dx} = \psi(t),$$

on peut procéder comme suit: dérivons $y = \phi(t)$ et si $\psi(t) \neq 0$, il vient que

$$dy = \phi'(t)dt = p dx = \psi(t)dx \Rightarrow dx = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)} dt \Rightarrow x = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)} dt.$$

Ainsi la solution générale est donnée sous forme paramétrée par

$$x = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \quad y = \phi(t), \quad t - \text{paramètre}.$$

Exemple. Résoudre l'équation $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$. En posant $y = \cos^3 t = \phi(t)$ et $y' = p = \sin^3 t = \psi(t)$, l'équation est vérifiée à l'aide de ce paramétrage, car on a

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = (\cos^3 t)^{2/3} + (\sin^3 t)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

En appliquant la méthode exposée, on obtient

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)} dt = \int \frac{-3\cos^2 t \sin t}{\sin^3 t} dt = -3 \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \\ &= 3 \int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 t}\right) dt = 3t + ctgt + C. \end{aligned}$$

Donc la solution générale est donnée sous forme paramétrée par

$$x = 3t + ctgt + C, \quad y = \cos^3 t, \quad t - \text{paramètre}.$$

Troisième cas. $f(x, y') = 0$ est résoluble par rapport à x , c'est à dire que

$$x = \phi(y') = \phi(p).$$

Dans ce cas, on a

$$dx = \phi'(p)dp \text{ et } dy = y'dx = p dx \Rightarrow dy = p\phi'(p)dp.$$

Ainsi la solution générale est donnée sous forme paramétrée comme suit:

$$x = \phi(p), \quad y = \int p\phi'(p)dp + C, \quad p - \text{paramètre}.$$

Exemple. Résoudre $x = 2y' + 3y'^2$. En posant $y' = \frac{dy}{dx} = p$ et en appliquant la méthode exposée, on obtient

$$x = 2p + 3p^2 = \phi(p), \quad y = \int p(2 + 6p)dp + C = p^2 + 2p^3 + C.$$

XI.18. Equations de Lagrange et de Clairaut.

Définition. On appelle:

i) équation de Lagrange une équation différentielle de la forme

$$y = xA(y') + B(y'), \quad (55)$$

avec A, B des fonctions de y' ;

ii) équation de Clairaut une équation différentielle de la forme

$$y = xy' + B(y'), \quad (56)$$

avec B une fonction de y' . Remarquons que (56) est un cas particulier de (55) avec $A(y') = y'$.

Pour résoudre ces équations, on introduit un paramètre en posant

$$y' = p.$$

En dérivant (55) par rapport à x , on obtient l'équation

$$p = A(y') + x \frac{dA}{dp} \frac{dp}{dx} + \frac{dB}{dp} \frac{dp}{dx} = \left(x \frac{dA}{dp} + \frac{dB}{dp} \right) \frac{dp}{dx} + A(y')$$

qui est équivalente à

$$\left(x \frac{dA}{dp} + \frac{dB}{dp} \right) \frac{dp}{dx} + (A(y') - p) = 0. \quad (57)$$

Deux cas peuvent se présenter:

1/ $dp = 0$. Dans ce cas, on déduit de (57) que

$$A(y') - p = 0. \quad (58)$$

Si $p = p_1, p = p_2, \dots$ sont les racines de (58), alors l'équation de Lagrange (55) a pour solutions les droites d'équations

$$y = xA(p_1) + B(p_1), \quad y = xA(p_2) + B(p_2), \dots$$

qui sont des solutions singulières.

2/ $dp \neq 0$. Dans ce cas, (57) devient

$$(A - p) \frac{dx}{dp} + \left(x \frac{dA}{dp} + \frac{dB}{dp} \right) = 0$$

qui est une équation linéaire d'inconnue x par rapport à la variable p , dont la solution générale est donnée sous forme paramétrique

$$x = \phi(p, C), \quad y = \phi(p, C)A(p) + B(p), \quad (p \text{ est un paramètre}).$$

Exemple. Résoudre $y' + y = x(y')^2$. Cette équation s'écrit

$$y = x(y')^2 - y'$$

qui est une équation de Lagrange. Posons $p = y'$, alors $y = xp^2 - p$. En dérivant par rapport à x et en remplaçant, on obtient, si $dp \neq 0$:

$$p = p^2 + (2px - 1) \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)}$$

dont la solution générale est

$$x = \frac{p - \log p + C}{(p-1)^2}, \quad y = xp^2 - p, \quad (p\text{-paramètre}).$$

Enoncés des exercices du chapitre XI.

Exercice 11.1. Montrer que les fonctions suivantes sont des solutions des équations indiquées:

- 1) $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$;
- 2) $y = Ce^{-2x} + \frac{e^x}{3}$, $y' + 2y = e^x$;
- 3) $y = 2 + C\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y' + xy = 2x$;
- 4) $y = x(C - \log|x|)$, $(x-y)dx + xdy = 0$;
- 5) $y = x\left(\int_0^x \frac{e^t}{t} dt + C\right)$, $xy' - y = xe^x$;
- 6) $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

Exercice 11.2. 13.01. (Equations à variables séparables).

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes:

- 1) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;
- 2) $xyy' = 1 - x^2$;
- 3) $yy' = \frac{1-2x}{y}$;
- 4) $y'tgx - y = a$;
- 5) $xy' + y = y^2$;
- 6) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$;
- 7) $\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0$;
- 8) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$;
- 9) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$;
- 10) $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$.
- 11) $y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0$;
- 12) $(1+y)(e^x dx - e^{2y} dy) - (1+y^2)dy = 0$;
- 13) $y' = \frac{1}{2x+y}$;
- 14) $y' = (4x + y + 1)^2$;
- 15) $y' \sin x - y \cos x = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$;
- 16) $x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0$, $y(0) = 1$;
- 17) $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \log y dy = 0$;
- 18) $y' + \sin(x-y) = \sin(x+y)$, $y(\pi) = \frac{\pi}{2}$;
- 19) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 0$;
- 20) $2y + (\tan x)y' = 0$;
- 21) $yy' + xy^2 + x = 0$, $y(0) = 1$.

Exercice 11.3. Trouver les solutions des équations différentielles qui satisfont aux conditions indiquées:

- 1) $x^2 y' \cos y + 1 = 0$, $y \rightarrow \frac{16}{3}\pi$, $x \rightarrow +\infty$;
- 2) $x^3 y' - \sin y = 1$, $y \rightarrow 5\pi$, $x \rightarrow \infty$;
- 3) $(x+1)y' = y-1$, y est bornée pour $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 11.4. Equations homogènes. Trouver les solutions générales des équations homogènes suivantes

- 1) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$;
- 2) $x dy - y dx = y dy$;
- 3) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;
- 4) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;
- 5) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;
- 6) $x y' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- 7) $y^2 + x^2 y' = x y y'$;
- 8) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;
- 9) $x y' = y \ln \frac{y}{x}$;
- 10) $x y^2 dy = (x^3 + y^3) dx$;
- 11) $(3y^2 + 3xy + x^2) dx = (x^2 + 2xy) dy$;
- 12) $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$;
- 13) $(8y + 10x) dx + (5y + 7x) dy = 0$;
- 14) $(2\sqrt{xy} - y) dx + x dy = 0$;
- 15) $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$
- 16) $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$;
- 17) $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$;
- 18) $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$;
- 19) $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;
- 20) $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos \frac{y}{x}}$;
- 21) $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0$;
- 22) $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y(1) = 1$.

Exercice 11.5. Equations se ramenant aux équations homogènes.

- 1) $(3y - 7x + 7) dx - (3x - 7y - 3) dy = 0$;
- 2) $(x + 2y + 1) dx - (2x + 4y + 3) dy = 0$;
- 3) $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$;
- 4) $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

Exercice 11.6.. En faisant un changement de variable $y = z^\alpha$, transformer les équations suivantes en des équations homogènes et les résoudre:

- 1) $2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$;
- 2) $(x + y^3) dx + 3(y^3 - x)y^2 dy = 0$.

Exercice.11.7. Equations linéaires.

i) Trouver les solutions générales des équations suivantes:

- 1) $y' + 2y = 4x$;
- 2) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$;
- 3) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$;
- 4) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;
- 5) $y' + y = \cos x$;
- 6) $y' + ay = e^{mx}$;
- 7) $2y dx + (y^2 - 6x) dy = 0$;
- 8) $y' = \frac{1}{2x - y^2}$;
- 9) $y' = \frac{y}{2y \log y + y - x}$;
- 10) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$;

11) $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - ax^3 = 0;$

12) $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n};$

13) $y' + y = e^{-x};$

14) $y' - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$

15) $y' \cos x + y \sin x = 1;$

16) $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$

17) $y' - \frac{n}{x+1}y = e^x(x+1)^n;$

18) $y' + e^x y = e^{2x};$

19) $\left(e^{-\frac{y^2}{2}} - xy \right) dy - dx = 0;$

20) $y' = -\frac{y}{x^2} + e^{\frac{1}{x}}.$

ii) Trouver les solutions particulières satisfaisant aux conditions initiales données.

21) $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \quad y|_{x=0} = 0;$

22) $xy' + y - e^x = 0, \quad y|_{x=a} = b;$

23) $y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0;$

24) $y' \cos x - y \sin x = 2x, \quad y(0) = 0.$

iii) Trouver une solution particulière pour chacune des équations suivantes en utilisant le principe de superposition:

25) $y' + 3y = x + e^{-2x};$

26) $y' + y = 2e^x + 4 \sin x + 3 \cos x;$

27) $y' + y = xe^{-x} + 1.$

Exercice 11.8. . Intégrer les équations de Bernoulli suivantes:

1) $y' + xy = x^3 y^3;$

2) $(1 - x^2)y' - xy - axy^2 = 0;$

3) $3y^2 y' - ay^3 - x - 1 = 0$

4) $y'(x^2 y^3 + xy) = 1;$

5) $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x);$

6) $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2;$

7) $xy' + y = y^2 \log x;$

8) $y' - y \tan x = -y^2 \cos x;$

9) $(x^3 + e^y)y' = 3x^2; \quad x^3 e^{-y} = C + y;$

10) $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x;$

11) $2y' \log x + \frac{y}{x} = y^{-1} \cos x;$

12) $y' + y = y^2(\cos x - \sin x).$

Exercice 11.9. En faisant un changement de variables, ramener les équations non linéaires suivantes aux équations linéaires ou aux équations de Bernoulli:

1) $y' - \tan y = e^x \frac{1}{\cos y};$

2) $yy' + 1 = (x-1)e^{-\frac{y^2}{2}}.$

Exercice 11.10 .Résoudre les équations suivantes par dérivation:

1) $\int_0^x ty(t)dt = x^2 y(x);$

2) $y(x) = \int_0^x y(t)dt + e^x.$

Exercice 11.11. Aux différentielles totales

13.05. Vérifier que les équations suivantes sont aux différentielles totales et les résoudre:

- 1) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0;$
- 2) $\frac{xdy}{x^2 + y^2} = (\frac{y}{x^2 + y^2} - 1)dx;$
- 3) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0;$
- 4) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0;$
- 5) $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2};$
- 6) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0;$
- 7) $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0;$
- 8) $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0;$
- 9) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0;$
- 10) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0;$
- 11) $(y^3 - x)y' = y;$
- 12) $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0;$
- 13) $\left(\frac{y^2}{(x - y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x - y)^2}\right)dy = 0;$
- 14) $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$
- 15) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0;$
- 16) $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right)dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}dy;$
- 17) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0;$
- 18) $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2 - 3x^2)dy}{y^4} = 0, y(1) = 1.$

Exercice 11.12. Facteur intégrant.

Trouver le facteur intégrant et les solutions générales des équations suivantes:

- 1) $(x^2 + y)dx - xdy = 0;$
- 2) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0;$
- 3) $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0;$
- 4) $(x \cos y - y \sin y)dy + (x \sin y + y \cos y)dx = 0;$
- 5) $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0, \mu = \phi(x);$
- 6) $(x^4 \log x - 2xy^3)dx + 3x^2 y^2 dy = 0, \mu = \phi(x);$
- 7) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0, \mu = \phi(y);$
- 8) $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0, \mu = \phi(x + y^2).$

Exercice 11.13. Problèmes divers.

Résoudre les équations différentielles suivantes tout en indiquant leurs types:

- 1) $y' = ax + by + c;$
- 2) $ay' + by + cy^m = 0;$

- 3) $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$; 4) $y' = \frac{y^2+xy-y^2}{y^2}$;
 5) $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$; 6) $y'(y^2-x) = y$;
 7) $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$; 8) $(2y+xy^3)dx + (x+x^2y^2)dy = 0$;
 9) $(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx + (x^2+y^2)dy = 0$; 10) $y' = \frac{(1+y^2)}{x(y+1)-x^2}$;
 11) $x dy + y dx + y^2(x dy - y dx) = 0$; 12) $y \sin x + y' \cos x = 1$;
 13) $y' - y + y^2 \cos x = 0$; 14) $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$;
 15) $y' = \frac{x}{\cos y} - \tan y$;
 16) $x \sin x \cdot y' + (\sin x - x \cos x)y = \sin x \cdot \cos x - x$;
 17) $(y - xy^2 \log x)dx + x dy = 0$, $\mu = \phi(x, y)$;
 18) $(2xye^{x^2} - x \sin x)dx + e^{x^2} dy = 0$;
 19) $y' = \frac{1}{2x - y^2}$; 20) $x^2 + xy' = 3x + y'$;
 21) $xyy' - y^2 = x^4$; 22) $xy' + y = y^2 \log x$, $y(1) = \frac{1}{2}$;
 23) $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$;
 24) $(xye^{x/y} + y^2)dx = x^2 e^{x/y} dy$;
 25) $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$;
 26) $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2} \cos y - xy)dy$;
 27) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$;
 28) $(x - 2y^3)dx + 3y^2(2x - y^3)dy$.

Exercice 11.14. Etant donnée l'équation $y' = \frac{y}{x} + \phi(\frac{x}{y})$. Quelle doit-être la fonction $\phi(\frac{x}{y})$ pour que la solution générale de l'équation soit $y = \frac{x}{\log|Cx|}$?

Exercice 11.15. Démontrer que l'équation $y' = y^2 + x$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0, 3[$?

§ 2. Equations non résolues par rapport à la dérivée y' .

Exercice 11.16. Equations non résolues par rapport à la dérivée y' .

- 1) $4y'^2 - 9x = 0$; 2) $y'^2 - 2yy' = y^2(e^{2x} - 1)$;
 3) $y'^3 + (x+2)e^y = 0$; 4) $y'^3 - yy'^2 - x^3y' + x^2y = 0$;
 5) $y = y'^2 + 4y'^3$; 6) $y = y' \sqrt{1+y'^2}$;
 7) $y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$; 8) $x = y'^3 - y' + 2$;
 9) $x = \frac{y'}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

Exercice 11.17. Equations de Lagrange et de Clairaut.

Résoudre les équations suivantes:

1) $y = 2xy' + \log y'$;

2) $y = x(1 + y') + y'^2$;

3) $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$;

4) $y = xy' + y'^2$;

5) $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$;

6) $y = x \frac{1 + y'^2}{2y'}$;

7) $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$;

8) $y = \frac{1}{2}(xy' + y' \log y')$;

9) $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$.

Exercice 11.18.. Trouver les domaines d'existence et d'unicité des équations différentielles suivantes:

1) $y' = x^2 - y^2$;

2) $y' = x^2 \sqrt{x - y^2}$;

3) $y' = \sin y - \cos x$;

4) $y' = \frac{y}{y - x}$.

Exercice 11.19. Montrer que pour la condition initiale $y(0) = 0$,

l'équation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ admet une infinité de solutions de la forme

$y = cx$. Pour la condition initiale $y(0) = y_0 \neq 0$, la même équation n'admet aucune solution.

Exercice 11.20. Montrer que le problème

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^\alpha, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

possède au moins deux solutions pour $0 < \alpha < 1$ et une solution pour $\alpha = 1$. Construire les courbes intégrales pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 1$.

Exercice 11.21. Trouver les solutions singulières des équations différentielles suivantes:

1i) $y'^2 - 4y = 0$;

2) $y'^2 - y^2 = 0$;

3) $(1 + y'^2)y^2 - 4yy' - 4x = 0$;

4) $y' = \frac{2\sqrt{y}}{x}$.

Exercice 11.22 Trouver les solutions singulières des équations suivantes connaissant leur solution générale:

1) $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$, $y = Cx + C^2 + \frac{x^2}{2}$;

2) $y'^2 - yy' + e^x = 0$, $y = Ce^x + \frac{1}{C}$;

$$3) y' = 4x\sqrt{y-1}, \quad y = (x^2 + C)^2 + 1;$$

$$4) y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}, \quad y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Exercice 11.23. Etablir les équations différentielles ayant pour courbes intégrales les fonctions suivantes:

$$1) y = x^2 + 2Cx \text{ (parabole);}$$

$$2) y = \frac{C}{x} \text{ (hyperbole);}$$

$$3) y = C \cosh x \text{ (chaînette);}$$

$$4) x^2 - y^2 = 2Cx \text{ (hyperbole).}$$

Exercice 11.24. En appliquant la méthodes des isoclines, construire les courbes des équations différentielles suivantes:

$$1) y' = x + 1;$$

$$2) y' = x + y;$$

$$3) y' = x^2 - y^2;$$

$$4) y' = \cos(x - y);$$

$$5) y' = -\frac{y}{x};$$

$$6) y' = y - x^2;$$

$$7) y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}.$$

Exercice 11.25. En appliquant la méthode des approximations successives, trouver les trois premières approximations des solutions des équations différentielles suivantes:

$$1) y' = x^2 - y^2; \quad 2) y' = 2y - 2x^2 - 3; \quad 3) xy' = 2x - y.$$

§3. Applications

Exercice 11.26. Etablir l'équation différentielle de la famille des courbes dont le segment de la normale compris entre les axes de coordonnées est partagé en deux en tout point de tangence.

Exercice 11.27. Etablir l'équation différentielle de la famille des courbes dont la surface comprise entre les axes de coordonnées, cette courbe et l'ordonnée y est proportionnelle à y^4 .

Exercice 11.28. Démontrer que la courbe telle que toutes ses normales passent par un point fixe est un cercle.

Exercice 11.29. Une courbe (c) passe par l'origine des coordonnées et se situe sur la partie supérieure du plan, $y \geq 0$. Tout rectangle, limité par les axes de coordonnées et les droites qui leurs sont perpendiculaires passant par un point $M(x, y) \in (C)$, est partagé par cette courbe en deux parties, dont la surface de celle qui en dessous de (C) est égale à la moitié de celle qui est au-dessus. Trouver l'équation de cette courbe.

Exercice 11.30. Montrer que les tangentes à toutes les courbes intégrales de l'équation

différentielle $y' + ytgx = xtgx + 1$ aux points d'intersection avec l'axe des ordonnées Oy sont parallèles. Déterminer l'angle sous lequel les courbes intégrales coupent l'axe Oy .

Exercice 11.31. L'expérience a montré que la multiplication des bactéries dans un milieu culturel suffisant est proportionnelle à leur quantité. A quel instant la quantité des bactéries augmente de m –fois par rapport à leur quantité initiale?

Exercice 11.32. Trouver la courbe telle que la perpendiculaire abaissée depuis l'origine des coordonnées sur la tangente soit égale à l'abscisse du point de contact.

Exercice 11.33. Trouver la courbe telle que le rapport du segment coupé sur l'axe Oy par la tangente au rayon vecteur soit égal à une constante k .

Exercice 11.34. Soit (C) une courbe d'équation $y = y(x)$ passant par le point $A(a, a)$ et possédant la propriété suivante: si par un point $M(x, y)$ appartenant à la courbe (C) d'ordonnée égal à $|BM|$ (voir figure), on mène la tangente jusqu'à l'intersection avec l'axe des ordonnées au point D , alors la surface du trapèze $OBAD$ est constante et égale à a^2 . Trouver cette courbe.

Exercice 11.35 Exercice Krasnov n 122. p.40. En utilisant les coordonnées rectangulaires, trouver la forme d'un miroir réfléchissant parallèlement à une direction donnée tous les rayons issus d'un même point donné.

Réponses aux exercices du chapitre XI.

Exercice 11.2.

- 1) $1 + y^2 = C(1 - x^2)$; 2) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$; 3) $y = \sqrt[3]{C + 3x - x^2}$;
 4) $y = C \sin x - a$, 5) $Cx = \frac{y-1}{y}$, 6) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$,
 7) $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$, 8) $\log(xy) + x - y = C$, 9) $(1+y)(1-x) = C$,
 10) $x = \frac{y+C}{1-Cy}$; 11) $y \sin y + \cos y - x \cos x + \sin x = C$;
 12) $e^x - \frac{1}{2}e^{2y} - 2\log|1+y| - \frac{(y-1)^2}{2} = C$; 13) $4x + 2y + 1 = Ce^{2y}$;
 14) $\frac{1}{2}\arctg \frac{1}{2}(4x+y+1) - x = C$; 15) $y = \sin x$;
 16) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$; 17) $y = (1 + Cy + \log y) \cos x$;
 18) $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = e^{2\sin x}$;
 19) $y = \frac{C}{(1+x^2)^2}$, $y = 0$ (solution singulière).
 20) $y = \frac{C}{\sin^2 x}$ ($C = e^{C_1} > 0$). $y = 0$, (solution singulière), $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 21) $y = \sqrt{2e^{-x^2} - 1}$.

Exercice 11.3.

- 1) $y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{x}\right) + 5\pi$; 2) $y = \arctg\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) + \frac{9\pi}{2}$;
 3) $y = 1$.

Exercice XI.4.

- 1) $y - 2x = Cx^3(y+x)$; 2) $\ln|y| + \frac{y}{x} = C$;
 3) $\arctg \frac{y}{x} = \ln(C\sqrt{x^2+y^2})$;
 4) $x^2 + y^2 = Cy$; 5) $y = \pm x\sqrt{2\ln(cx)}$;
 6) $x^2 = C^2 + Cy$; 7) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$;
 8) $\ln|Cx| = -e^{-\frac{x}{y}}$; 9) $y = xe^{1+Cx}$; 10) $y = x\sqrt[3]{3\log Cx}$;
 11) $(x+y)^2 = Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$; 12) $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$;
 13) $(x+y)^2(2x+y)^3 = C$; 14) $y = x\log^2 \frac{C}{x}$; 15) $xy \arccos \frac{y}{x} = C$;
 16) $x = Ce^{\arctg \frac{y}{x}}$; 17) $x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$; 18) $y(y-2x)^3 = C(y-x)^2$;
 19) $\sin \frac{y}{x} = Cx$, 20) $e^{\sin \frac{x}{y}} = Cx$; 21) $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x} \arctg \frac{y}{x}}$;
 22) $y = -x$.

Exercice XI.5

- 1) $(x+y-1)^5(x-y-1)^2 = C$,
 2) $\log(4x+8y+5) + 8y - 4x = C$,
 3) $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$,

4) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C.$

Exercice.XI.6. 1) $y^2 = x \log Cy^2$; 2) $2 \arctg \frac{y^3}{x} = \log(x^2 + y^6) + C.$

Exercice XI.7.

i) 1) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$; 2) $y = e^{-x^2(C + \frac{x^2}{2})}$; 3) $y = x^2(1 + Ce^{\frac{1}{x}})$;
4) $y = (x + C)(1 + x^2)$; 5) $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$;
6) $y = e^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$ si $m \neq -a$ et $y = (C+x)e^{mx}$ si $m = a$;
7) $y^2 - 2x = Cy^3$; 8) $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$; 9) $x = y \ln y + \frac{C}{y}$;
10) $2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2$; 11) $y = ax + cx\sqrt{1-x^2}$;
12) $x^n y = ax + C$; 13) $e^x y = x + C$; 14) $y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$;
15) $y = \sin x + C \cos x$; 16) $y = x^n(e^x + C)$; 17) $y = (x+1)^n(C + e^x)$;
18) $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$; 19) $x = \frac{C}{y} + y \log y$; 20) $y = e^{\frac{1}{x}}(x + C).$

ii) 21) $y = \frac{x}{\cos x}$, 22) $y = \frac{e^{ax} + ab - e^a}{x}$;
23) $y = \sin x$; 24) $y = \frac{x^2}{\cos x}.$

iii) 25) $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x}$; 26) $y = e^x + \frac{7}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$;
27) $y = 1 + \frac{x^2}{2}e^{-x}.$

Exercice 11.8.

1) $y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$; 2) $(C\sqrt{1-x^2} - a)y = 1$;
3) $a^2 y^3 = Ce^{ax} - a(x+1) - 1$; 4) $x \left((12 - y^2)e^{\frac{1}{2}y^2} + C \right) = e^{\frac{1}{2}y^2},$
5) $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x(\sin x + C)}$; 6) $y = \sqrt{(1+x)(C + \ln|1+x|)}$;
7) $y(1 + \ln x + Cx) = 1$, 8) $y(x + C) = \frac{1}{\cos x}$
9) $x^3 e^{-y} = C + y$; 10) $\sqrt{y} + 1 = Ce^{e^x}$;
11) $y^2 \log x = C + \sin x$; 12) $y = \frac{1}{e^x C - \sin x}$

Exercice 11.9. 1) $\sin y = (x + C)e^x$, $z = \sin y$;

2) $x - 2 + Ce^{-x} = e^{\frac{y^2}{2}}$, $z = e^{\frac{y^2}{2}}.$

Exercice 11.10. 1) $xy = C$; 2) $y = (x+1)e^x.$

Exercice 11.11.

1) $x^4 - x^2 y^2 + y^4 = C$; 2) $x + \arctg \frac{y}{x} = C$; 3) $xe^y - y^2 = C$;

- 4) $x^y = C$; 5) $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$; 6) $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$;
7) $\log(x+y) - \frac{x}{x+y} = C$; 8) $\frac{xy}{x-y} = C$; 9) $\frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$;
10) $2y^2 - xy + x^3 = C$; 11) $y^4 = 4xy + C$;
12) $\log(x+y) - \frac{x}{x+y} = C$; 13) $\log \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C$;
14) $x^2 + y^2 - 2\arctg \frac{x}{y} = C$; 15) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$;
16) $x^3y + x^2 - y^2 = Cxy$; 17) $\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C$; 18) $y = x$.

Exercice 11.12.

- 1) $x - \frac{y}{x} = C$; 2) $(x^2 + y^2)e^x = C$; 3) $\log(x+y) - \frac{x}{x+y} = C$;
4) $\frac{xy}{x-y} = C$; 5) $xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx$, $\mu = \frac{1}{x^2}$;
6) $y^3 + x^3(\log x - 1) = Cx^2$, $\mu = \frac{1}{x^4}$;
7) $x^2 - \frac{7}{y} - 3xy = C$, $\mu = \frac{1}{y^2}$;
8) $(x + y^2)^2 C = x - y^2$, $\mu = \frac{1}{(x + y^2)^3}$.

Exercice 11.13.

- 1) $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$; 2) $y = \left[Ce^{\frac{(m-1)bx}{a}} - \frac{C}{b} \right]^{\frac{1}{1-m}}$;
3) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$; 4) $\frac{2x}{x-y} + \ln|x+y| + 3\ln|y-x| = C$;
5) $x + y = \operatorname{atg}(C + \frac{y}{a})$; 6) $y^3 - 3xy = C$; 7) $x^2 - y^2 = Cy^3$;
8) $3x^2y + x^3y^2 = C$; 9) $y(x^2 + \frac{1}{3}y^2)Ce^{-x}$; 10) $\ln|1+y| - \frac{1+y}{x} = C$;
11) $y^2 - 1 + Cxy = 0$; 12) $y = \sin x + C \cos x$;
13) $y = \frac{2e^x}{C + e^x(\cos x + \sin x)}$; 14) $xe^{\sin \frac{x}{y}} = C$;
15) $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$;
16) $y = C \frac{\sin x}{x} + \cos x$; (linéaire)
17) $2 + xy \log^2 x = Cxy$, $\mu = \frac{1}{x^2 y^2}$;
18) $y = Ce^{-x^2} + (\sin x - x \cos x)e^{-x^2}$; (linéaire)
19) $x = Ce^{2y} + \frac{y^2 + y}{2} + \frac{1}{4}$; (linéaire en x)
20) $y + C = 2x - \frac{x^2}{2} + 2\log|1-x|$; (à variables séparables)
21) $y^2 = Cx^2 + x^4$; (de Bernoulli)
22) $y(1+x+\log x) = 1$; (de Bernoulli)
23) $\frac{x^2 \cos 2y}{2} + x = C$; (aux différentielles totales)
24) $\log|x| + e^{x/y} = C$; (homogène)
25) $(3x + 2y - 1)(x - 1) = C$; (linéaire)
26) $x\sqrt{1+y^2} - \sin y = C$; (linéaire en x)

27) $y = \left(\frac{C + \log|\sin x|}{x} - \operatorname{ctgx} \right)^2$; (de Bernoulli)

28) $(x + y^3)^3 = C(y^3 - x)$. (poser $y = z^{1/3}$)

Exercice 11.14. $\phi(u) = -\frac{1}{u^2}$.

Exercice 11.16. 1) $(y - C)^2 = x^3$; **2)** $\log Cy = x \pm 2e^{x/2}$, $y = 0$;

3) $4e^{-y/3} = (x + 2)^{4/3} + C$; **4)** $y = \pm \frac{x^2}{2} + C$, $y = Ce^x$.

5) $x = 2p + 6p^2 + C$, $y = p^2 + 4p^3$; $y = 0$ (sol. singulière);

6) $x = 2\sqrt{p^2 + 1} - \log(1 + \sqrt{p^2 + 1}) + \log p + C$, $y = p\sqrt{1 + p^2}$; $y = 0$ (sol. singulière);

7) $y = Cx + \frac{1}{2}(C^2 - x^2)$, $y = -x^2$ (sol. particulière);

8) $x = p^3 - p + 2$, $y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + C$;

9) $x = Cy + C^2$, $x = -\frac{y^2}{4}$ (sol. singulière).

Exercice 11.17.

1) $x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$, $y = \frac{2C}{p} + \log p - 2$;

2) $x = 2(1 - p) + Ce^{-p}$, $y = (2(1 - p) + Ce^{-p})(1 + p) + p^2$;

3) $y = Cx + \frac{a}{C^2}$, $4y^3 = 27ax^2$;

4) $y = Cx + C^2$, $y = -\frac{x^2}{4}$;

5) $y = Cx - \frac{C-1}{C}$, $(y+1)^2 = 4x$;

6) $y = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{2C}$, $y = \pm x$ (sol. sing.);

7) $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{p^3}$, $y = \frac{2C}{p} - \frac{3}{p^2}$;

8) $x = Cp - \log p$, $y = \frac{Cp^2}{2} - p$;

9) $y = Cx + C + \sqrt{C}$, $y = -\frac{1}{4(x+1)}$.

Exercice 11.18. 1) $\mathbb{R}^2$; **2)** $x > y^2$; **3)** $y' = \sin y - \cos x$; **4)** $y \neq x$.

Exercice 11.21. 1) $y = 0$; **2)** pas de solution; **3)** $y^2 = 4x + 4$; **4)** $y = 0$.

Exercice 11.22. 1) $y = \frac{x^2}{4}$; **2)** $y = \pm 2e^{x/2}$; **3)** $y = 1$; **4)** $y = \frac{x^2}{4}$.

Exercice 11.23. 1) $x^2 + y = xy'$; **2)** $xy' + y = 0$; **3)** $y' = y \tanh x$;

4) $2xyy' = x^2 + y^2$.

Exercice 11.25. 1) $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \frac{1+x^3}{3}$;

$y_2(x) = \frac{1}{126}(33 - 14x + 42x^3 - 7x^4 + 2x^7)$;

$$2) y^0(x) = 2, y_1(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3, y_2(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4;$$

$$3) y_0(x) = 2, y_1(x) = 2x - \log x, y_2(x) = 2 + \log^2 x.$$

Exercice 11.26. $yy' = x.$

Exercice 11.27. $y' = \frac{1}{4ky^2}.$

Exercice 11.29. $y = cx^2, c > 0.$

Exercice 11.31. $T = \frac{\log m}{k}$

Exercice 11.32. $x^2 + y^2 = kx.$

Exercice 11.33. $y = \frac{1}{2}(cx^{1-k} - \frac{1}{c}x^{1+k}).$

Exercice 11.34. $y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}.$

Exercice 11.35. $y^2 = 2cx + c^2.$

Corrigés détaillés de certains exercices.

Exercice 11.2.

1) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ (1). C'est une équation à variables séparables. Séparons les variables comme suit:

$$(1) \Leftrightarrow x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0 \Leftrightarrow \frac{xdx}{1 - x^2} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0$$

si $1 - x^2 \neq 0$. En intégrant cette dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{1 - x^2} + \int \frac{ydy}{1 + y^2} &= C \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln|1 - x^2| + \frac{1}{2} \ln|1 + y^2| = C_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln \left| \frac{1 + y^2}{1 - x^2} \right| &= \ln C \quad (\ln C = 2C_1) \Leftrightarrow \left| \frac{1 + y^2}{1 - x^2} \right| = C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + y^2 = C|1 - x^2|. \end{aligned}$$

Si $1 - x^2 = 0$, alors on vérifie que les courbes $x = -1$ et $x = 1$ sont aussi des solutions de (1).

4) $y'tgx - y = a$. (4) Séparons les variables comme suit

$$\frac{dy}{dx}tgx - y = a \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}tgx = y + a \Leftrightarrow \frac{dy}{y+a} = tgx dx$$

si $y + a \neq 0$. En intégrant la dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y+a} &= \int tgx dx + C_1 \Leftrightarrow \log|y+a| = \log|\sin x| + \log C \quad (C_1 = \log C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y + a = C \sin x, \end{aligned}$$

avec $C > 0$ et la solution générale est alors $y = C \sin x - a$.

Si $y + a = 0$, alors on vérifie que la courbe $y = -a$ est aussi une solution de (4).

19) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 0$ (19).

Si $y \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} (19) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= -\frac{4x}{1+x^2} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{4x}{1+x^2} dx + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log|y| &= -2 \log(1+x^2) + \log|C| \Rightarrow y = \frac{C}{(1+x^2)^2}, \quad (C = e^{C_1} > 0). \end{aligned}$$

La solution générale est donc $y = \frac{C}{(1+x^2)^2}$

Si $y = 0$, alors la courbe $y = 0$ est aussi une solution de (19) qui s'obtient pour $C_1 \rightarrow -\infty$. C'est donc une solution particulière.

20) $2y + (\tan x)y' = 0 \Leftrightarrow 2ydx + (\tan x)dy = 0$. (20)

Si $y \cdot \tan x \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} (20) \Leftrightarrow \frac{dy}{2y} &= -\frac{dx}{\tan x} \Rightarrow \frac{1}{2} \log|y| = -\log|\sin x| + \log|C_1| = \log \left| \frac{C_1}{\sin x} \right|; \\ \Rightarrow \sqrt{y} &= \left| \frac{C_1}{\sin x} \right| \Rightarrow \frac{C}{\sin^2 x} \quad (C = e^{C_1} > 0). \end{aligned}$$

Si $y = 0$, alors la courbe $y = 0$ est aussi une solution de (20) qui s'obtient pour $C_1 \rightarrow -\infty$. C'est donc une solution particulière.

Si $\tan x = 0$, alors $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sont des solutions de (20)

21) $yy' + xy^2 + x = 0$, $y(0) = 1$ (21). On a

$$\begin{aligned} \frac{y}{1+y^2} dy &= -x dx \Rightarrow \frac{1}{2} \log(1+y^2) = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1+y^2 = Ce^{-x^2} \Rightarrow y^2 = Ce^{-x^2} - 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{Ce^{-x^2} - 1} \\ y(0) = 1 &\Rightarrow 1 = \sqrt{C-1} \Rightarrow C = 2, \text{ d'où la solution générale de (21): } y = \sqrt{2e^{-x^2} - 1}. \end{aligned}$$

Exercice 11.4.

1) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ (1). La fonction $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2} - 2$ est une fonction homogène de degré zéro. Faisons la substitution $\frac{y}{x} = u$ ($x \neq 0$). On a alors: $y = ux$ et $y' = u'x + u$. En remplaçant dans l'équation (1), on obtient $u'x + u = u^2 - 2$ qui est une équation à variables séparables. Séparons les variables comme suit:

$$\begin{aligned} u'x &= u^2 - u - 2 \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = u^2 - u - 2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x} \\ \text{si } (u^2 - u - 2)x &\neq 0. \text{ En intégrant la dernière équation, on obtient} \\ \int \frac{du}{u^2 - u - 2} &= \int \frac{dx}{x} + C_1 \Leftrightarrow \int \frac{du}{(u - \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-2}{u+1} \right| = \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln \left| \frac{u-2}{u+1} \right| = \ln|x|^3 + \log C, \quad 3C_1 = \log C, \quad C > 0. \end{aligned}$$

En remplaçant $u = \frac{y}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} + 1} \right| &= \log|x|^3 + \log C \Leftrightarrow \log \left| \frac{y - 2x}{y + x} \right| = \log|x|^3 + \log C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log \left| \frac{y - 2x}{(y + x)x^3} \right| = \log C. \end{aligned}$$

L'intégrale générale est donc égale à $y - 2x = Cx^3(y + x)$.

Si $u^2 - u - 2 = (u + 1)(u - 2) = 0$, alors $u = -1$ et $u = 2$. Dans ce cas, les courbes $y = -x$ et $y = 2x$ sont aussi des solutions de (1).

7) $y^2 + x^2y' = xyy'$ (7). On a:

$$(7) \Leftrightarrow y^2 + (x^2 - xy)y' = 0 \Leftrightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Les fonctions $M(x,y) = y^2$ et $N(x,y) = x^2 - xy$ sont homogènes de degré 2 par rapport à x et y , donc l'équation donnée est homogène et on a donc

$$(7) \Leftrightarrow y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

si $xy - x^2 \neq 0$. La fonction $f(x,y) = \frac{y^2}{xy - x^2}$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport aux variables x et y . Faisons le changement de variable en posant $\frac{y}{x} = u$ ($x \neq 0$). On a $y = ux$, $y' = u'x + u$. En remplaçant dans la dernière équation, on obtient.

$$u'x + u = \frac{u^2x^2}{x^2u - x^2} \Leftrightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u - 1} \Leftrightarrow u'x = \frac{u}{u - 1}$$

si $u - 1 \neq 0$, qui est une équation à variables séparables. Séparons les variables comme suit:

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x}$$

si $u \neq 0$. En intégrant, on trouve

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0.$$

Ainsi, $u = \ln|Cxu|$, c'est à dire que $Cxu = e^u$, et donc $Cy = e^{\frac{y}{x}}$.

Si $u = 0$, alors $y = 0$ ($x \neq 0$) est aussi une solution de (7).

D'autre part, si $xy - x^2 = 0$ ($\Leftrightarrow u - 1 = 0$), alors $x(y - x) = 0$ et, alors $x = 0$ ou $y = x$. Comme $x \neq 0$, alors il reste que $y = x$. Dans ce cas, on vérifie que la courbe $y = x$ n'est pas solution de (7).

10) $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$ (10). On écrit tout d'abord cette équation comme suit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

si $xy^2 \neq 0$. C'est une équation homogène. On fait le changement de variable par la formule $y = ux$ ($x \neq 0$). Comme dans l'exercice précédent, on dérive et on remplace les expressions de y et y' dans la dernière équation, alors on obtient, après simplification, l'équation

$$u'x = \frac{1}{u^2}.$$

En séparant les variables, on obtient

$$u^2 du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int u^2 du = \int \frac{dx}{x} + \log C \Leftrightarrow \frac{u^3}{3} = \log Cx,$$

et, donc la solution générale est $y = x\sqrt[3]{3\log Cx}$, $C > 0$.

Si $xy^2 = 0$, alors $y = 0$, car $x \neq 0$. On vérifie que dans ce cas, la courbe $y = 0$ n'est pas solution de (10).

15) $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$ (15). On a

$$(15) \Leftrightarrow (xy \cos \frac{y}{x} + y^2 \sin \frac{y}{x}) dx = (xy \sin \frac{y}{x} - x^2 \cos \frac{y}{x}) dy \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy \cos \frac{y}{x} + y^2 \sin \frac{y}{x}}{xy \sin \frac{y}{x} - x^2 \cos \frac{y}{x}},$$

si $xy \sin \frac{y}{x} - x^2 \cos \frac{y}{x} \neq 0$. En posant $y = ux$ ($x \neq 0$), on obtient

$$u'x + u = \frac{x^2 u \cos u + x^2 u^2 \sin u}{xy \sin \frac{y}{x} - x^2 \cos \frac{y}{x}} \Rightarrow u'x + u = \frac{u \cos u + u^2 \sin u}{u \sin u - \cos u} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{2u \cos u}{u \sin u - \cos u} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{u \sin u - \cos u}{2u \cos u}$$

si $2u \cos u \neq 0$. En intégrant la dernière équation, on trouve

$$\int \frac{1}{2} \operatorname{tg} u du - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln|\cos u| - \frac{1}{2} \ln|u| = \ln|x| + \ln C \quad (C_1 = \log C), \\ \Leftrightarrow \ln|u \cos u| = \ln C^{-2} \Rightarrow ux^2 \cos u = \frac{1}{C^2}.$$

Alors l'intégrale générale de l'équation (15) est $yx \cos \frac{y}{x} = C_1$, $C_1 = \frac{1}{C^2}$.

Si $2u \cos u = 0$, alors $u = 0$ ou $\cos u = 0$.

$u = 0 \Rightarrow y = 0$ et la courbe $y = 0$ est solution de (15).

$\cos u = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on vérifie que

$y = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x$ n'est pas solution de (15).

Exercice 11.5.

1) $16) (3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$ (1). On a

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}$$

si $3x - 7y - 3 \neq 0$. La dernière équation n'est pas homogène. On la réduit à une équation homogène en posant $x = x_1 + h$ et $y = y_1 + k$, avec $y_1 = y_1(x_1)$. Alors on trouve en dérivant et en remplaçant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} \text{ et } \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3y_1 - 7x_1 + 3k - 7h + 7}{3x_1 - 7y_1 + 3h - 7k - 3}.$$

Choisissons h et k d'une manière que

$$\begin{cases} 3k - 7h + 7 = 0, \\ 3h - 7k - 3 = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve $h = 1$ et $k = 0$. Pour ces valeurs de h et k , on a l'équation homogène suivante en x_1 et y_1 :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3y_1 - 7x_1}{3x_1 - 7y_1}.$$

Intégrons cette équation en posant $y_1 = ux_1$, $y_1' = u'x_1 + u$,

$$u'x_1 + u = \frac{3ux_1 - 7x_1}{3x_1 - 7ux_1} \Rightarrow u'x_1 = \frac{3u - 7}{3 - 7u} - u,$$

$$\frac{du}{dx_1} \cdot x_1 = \frac{7u^2 - 7}{3 - 7u} \Rightarrow \frac{3 - 7u}{7u^2 - 7} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

En intégrant cette équation, on trouve

$$\frac{3}{14} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| - \frac{1}{2} \ln |u^2 - 1| = \ln |x_1| + \ln C,$$

En remplaçant $u = \frac{y_1}{x_1}$ et en simplifiant, on trouve

$$(y_1 - x_1)^2 (y_1 + x_1)^5 = C_1.$$

Ainsi l'intégrale générale de l'équation est donnée par l'équation

$$(y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = C_1.$$

Si $3x - 7y - 3 = 0$, alors la courbe $y = \frac{3}{7}(x - 1)$ n'est pas solution de l'équation donnée.

Exercice 11.7.

1) $y' = 2y + 4x$ (1). Cherchons la solution générale de cette équation linéaire sous forme de produit de deux fonctions inconnues (méthode de Bernoulli): $y = u(x)v(x)$. En dérivant cette fonction et en remplaçant dans l'équation les expressions obtenues, on obtient

$$u'v + uv' = 2uv + 4x \Leftrightarrow u'v + uv' - 2uv = 4x \Leftrightarrow u'v + u(v' + 2v) = 4x.$$

Choisissons la fonction $v = v(x)$ de une manière à ce que $v' + 2v = 0$, $v \neq 0$, qui est une équation différentielle à variables séparables. En séparant les variables et en intégrant, on obtient:

$$\frac{dv}{v} = -2dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int 2dx \Rightarrow v = e^{-2x}.$$

Ainsi, pour la fonction $v = v(x)$ trouvée, nous avons

$$u'v = 4x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4xe^{2x} \Rightarrow du = 4xe^{2x}dx.$$

En intégrant cette dernière équation, on détermine la fonction inconnue $u = u(x)$ par

$$u(x) = \int 4xe^{2x}dx + C.$$

En intégrant par parties, on obtient $u(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + C$.

Ainsi la solution générale de l'équation proposée est:

$$y = uv = e^{-2x}(2xe^{2x} - e^{2x} + C) = 2x - 1 + Ce^{-2x}.$$

4) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ (4). Comme $1+x^2 \neq 0$, on a

$$(4) \Leftrightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2}y = (1+x^2).$$

Cette dernière équation est linéaire. Posons, comme dans l'exercice 1), $y = uv$. En dérivant cette fonction et en remplaçant dans l'équation les expressions obtenues, on obtient

$$u'v + uv' - \frac{2x}{1+x^2}uv = (1+x^2) \Leftrightarrow u'v + u(v' - \frac{2x}{1+x^2}v) = (1+x^2)$$

On choisit v d'une façon que $v' - \frac{2x}{1+x^2}v = 0$, $v \neq 0$, qui est une équation à variables séparables. On a

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2x}{1+x^2}dx.$$

En intégrant, on trouve

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln v = \ln(1+x^2) \text{ et } v = 1+x^2.$$

Ainsi, pour la fonction $v = v(x)$ trouvée, nous avons

$$u'v = 1+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}(1+x^2) = 1+x^2 \Rightarrow du = dx \Rightarrow u = x + C.$$

Ainsi la solution générale de l'équation donnée est $y = (1+x^2)(x+C)$.

5) $y' + y = \cos x$ (5). Résolvons cette équation par la méthode de la variation de la constante.

Première étape. cherchons la solution générale de l'équation homogène associée suivante:

$$y' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx, \text{ si } y \neq 0.$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\int \frac{dy}{y} = \int -dx \Rightarrow \log|y| = -x + C_1 \Rightarrow y = Ce^{-x}, C_1 = \log C, C > 0.$$

Deuxième étape. Cherchons la solution de (5) sous forme $y = C(x)e^{-x}$ (variation de la constante). En dérivant et en remplaçant dans l'équation (5), on obtient:

$$C'e^{-x} - Ce^{-x} + Ce^{-x} = \cos x \Leftrightarrow C'e^{-x} = \cos x \Rightarrow C' = e^x \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = e^x \cos x \Rightarrow dC = e^x \cos x dx \Rightarrow C = \int e^x \cos x dx + K.$$

En calculant la dernière intégrale connue par parties, on obtient

$$C = \int e^x \cos x dx + K = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + K,$$

ainsi, la solution générale de (5) est

$$y = C(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + K\right)e^{-x} = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ke^{-x}$$

qui est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée à (5) et d'une solution particulière.

Si $y = 0$, alors la courbe $y = 0$ n'est pas solution de (5).

20) $y' = -\frac{y}{x^2} + e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow y' + \frac{y}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}$ (20). Comme pour l'exercice (5), utilisant la méthode de variation de la constante.

Première étape. Equation homogène associée:

$$y' + \frac{y}{x^2} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{y}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} \quad (20')$$

Solution générale de (20'). On a

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \log|y| = \frac{1}{x} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{\frac{1}{x}}.$$

Deuxième étape. Variation de la constante. Cherchons $y = C(x)e^{\frac{1}{x}}$. En dérivant et en remplaçant, on obtient

$$C'e^{\frac{1}{x}} - C\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{Ce^{\frac{1}{x}}}{x^2} = C'e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow C' = 1 \Rightarrow C = x + K \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution générale de (20) est:

$$y = C(x)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}(x + K), \quad K \in \mathbb{R}.$$

iii)

25) $y' + 3y = x + e^{-2x}$ (25). D'après le principe de superposition, cherchons des solutions particulières de chacune des équations

$$y' + 3y = x \quad \text{et} \quad y' + 3y = e^{-2x}$$

qui sont des équations à coefficients constants.

Pour la première, cherchons une solution particulière de la forme $y = ax + b$. En dérivant et en remplaçant, on obtient

$$y' + 3y = x \Leftrightarrow a + 3(ax + b) = x \Leftrightarrow 3ax + (a + 3b) = x.$$

En identifiant les coefficients, on trouve que $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{9}$. Donc $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$ est une solution particulière de la première équation.

Pour la deuxième, cherchons une solution particulière de la forme $y = Ae^{-2x}$. En dérivant et en remplaçant, on obtient

$$y' + 3y = e^{-2x} \Leftrightarrow -2Ae^{-2x} + 3Ae^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow A = 1.$$

Donc $y = e^{-2x}$ est une solution particulière de la deuxième équation. Ainsi $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2x}$ est une solution particulière de (25).

Remarquons qu'on aurait pu obtenir ce résultat en appliquant la méthode de Lagrange ou de Bernoulli.

Exercice 7.8.

2) $(1 - x^2)y' - xy - axy^2 = 0$ (2). Transformons cette équation comme suit:

$$y' - \frac{x}{1 - x^2}y = a\frac{x}{1 - x^2}y^2 \quad \text{si } 1 - x^2 \neq 0.$$

Cette dernière expression est une équation de Bernoulli (d'ordre $\alpha = 2$). On ramène cette équation à une équation linéaire comme suit: en divisant les deux membres de cette dernière équation par y^2 , on obtient

$$y^{-2}y' - xy^{-1} = a\frac{x}{1 - x^2}.$$

On pose ensuite $y^{-1} = z$. Ce qui donne $y^{-2}y' = -z'$. En remplaçant dans la dernière équation, on trouve:

$$z' + \frac{x}{1 - x^2}z = -a\frac{x}{1 - x^2}$$

qui est une équation linéaire. En intégrant cette équation linéaire comme dans l'exercice 11.7, 1), en cherchant z sous forme $z = uv$. En dérivant et en remplaçant, on obtient:
 $z' = u'v + uv'$ et

$$\begin{aligned}
 & u'v + uv' + \frac{x}{1-x^2}uv = -a \frac{x}{1-x^2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & u'v + u(v' + \frac{x}{1-x^2}v) = -a \frac{x}{1-x^2} \\
 \text{Soit } v \text{ telle que: } & v' + \frac{x}{1-x^2}v = 0, \quad v \neq 0. \text{ Alors on a} \\
 & \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{1-x^2}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{x}{1-x^2}dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow & \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{x}{1-x^2}dx \Rightarrow \ln|v| = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| \Rightarrow v = \sqrt{1-x^2}.
 \end{aligned}$$

et donc on obtient pour cette fonction v :

$$\begin{aligned}
 u'v &= -a \frac{x}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \sqrt{1-x^2} = -a \frac{x}{1-x^2} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow du = -a \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.
 \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$u = -a \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx + C = -\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Par conséquent

$$z = uv = \left(-\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + C\right) \sqrt{1-x^2} = -a + C\sqrt{1-x^2}$$

et donc $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-a + C\sqrt{1-x^2}}$ est la solution générale de (2).

Si $1-x^2 = 0$, alors on vérifie que les courbes $x = -1$ et $x = 1$ ne sont pas des solutions de l'équation (2).

4) $y'(x^2y^3 + xy) = 1$ (4). Pour résoudre cette équation, il est préférable de considérer $x = x(y)$. Ainsi, l'équation (2) devient:

$$\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2, \quad (2')$$

qui est une équation de Bernoulli par rapport à la fonction inconnue $x = x(y)$ (d'ordre $\alpha = 2$). Comme dans l'exercice 2), divisons les deux membres de la dernière équation par x^2 si $x^2 \neq 0$. On a alors $x^{-2}x' - yx^{-1} = y^{-3}$. En posant $x^{-1} = z$, on trouve $x^{-2}x' = -z'$ qu'on substitue dans la dernière équation et on obtient une équation linéaire par rapport à z de la forme

$$z' + yz = -y^3.$$

Intégrons cette équation linéaire en posant $z = uv$. On a

$$\begin{aligned}
 z &= uv, \quad z' = u'v + uv', \\
 u'v + uv' + uvy &= -y^3 \text{ et } u'v + u(v' + vy) = -y^3.
 \end{aligned}$$

Cherchons v telle que $v' + vy = 0$. On a

$$\frac{dv}{dy} = -vy \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -ydy.$$

Par intégration, on obtient

$$\ln|v| = -\frac{y^2}{2} \Leftrightarrow v(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Cherchons maintenant la fonction $u = u(y)$. On a

$$u'v = -y^3 \Leftrightarrow \frac{du}{dy} e^{-\frac{y^2}{2}} = -y^3 \Leftrightarrow du = -y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy.$$

Ce qui donne par intégration $u = -\int y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy + C$. Calculons cette intégrale par parties en posant:

$$y^2 = t, \quad ye^{\frac{y^2}{2}} dy = ds \Rightarrow dt = 2ydy \quad \text{et} \quad s = e^{\frac{y^2}{2}}.$$

Alors on a

$$u = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + \int 2ye^{\frac{y^2}{2}} dy + C = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C.$$

En remplaçant dans l'égalité $z = uv$, on obtient

$$z(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} (-y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C) = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Par conséquent on trouve la solution générale de (4) sous forme:

$$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{y^2}{2}} = x \left[(2 - y^2)e^{\frac{y^2}{2}} + C \right].$$

Si $x^2 = 0$, alors on vérifie que la courbe $x = 0$ est aussi solution de l'équation (4).

12) $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ (12). En posant $z = y^{-1}$, on aura

$$\begin{aligned} z = y^{-1} &\Rightarrow z' = -y^{-2}y'y' + y = y^2(\cos x - \sin x) \\ &\Leftrightarrow y'y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x \\ &\Leftrightarrow -z' + z = \cos x - \sin x \\ &\Leftrightarrow z' - z = \sin x - \cos x \end{aligned}$$

dont la solution est

$$z(x) = -\sin x + e^x C_1 \Rightarrow y = \frac{1}{e^x C - \sin x}.$$

Exercice 11.11.

1) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$ (1). Posons

$$M(x, y) = 2x^3 - xy^2 \quad \text{et} \quad N(x, y) = 2y^3 - x^2y.$$

On a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy.$$

Donc l'équation donnée est une équation aux différentielles totales. C'est-à-dire qu'il existe une fonction de deux variables $u = u(x, y)$ telle que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

De l'égalité $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^3 - xy^2$, on déduit que

$$u(x, y) = \int (2x^3 - xy^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(y),$$

en considérant $\varphi(y)$ comme étant une constante par rapport à la variable x . De l'autre égalité $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = 2y^3 - x^2y$, on déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2y + \varphi'(y) \Leftrightarrow 2y^3 - x^2y = -x^2y + \varphi'(y) \Leftrightarrow \varphi'(y) = 2y^3,$$

qui donne par intégration $\varphi(y) = \frac{y^4}{2} + C$. Par conséquent

$$u(x, y) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + C.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est donc donnée par l'équation

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{2} = C_1.$$

5) $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2}$ (5). Transformons cette équation comme suit:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} \right) dy = 0$$

Montrons que c'est une équation aux différentielles totales. On a

$$M(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{x^2},$$

$$N(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, alors l'équation donnée (5) est une équation aux différentielles totales.

Donc, il existe $u = u(x, y)$ telle que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy,$$

c'est à dire que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Comme dans l'exercice 1), de l'égalité $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2}$, on déduit que

$$u(x, y) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \varphi(y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} + \varphi(y),$$

et $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \varphi'(y)$, c'est à dire que

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C.$$

L'intégrale générale de l'équation (5) est donc

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C.$$

8) $\frac{x^2}{(x-y)^2} dy - \frac{y^2}{(x-y)^2} dx = 0$ (8). On a

$$(8) \Leftrightarrow \frac{y^2}{(x-y)^2} dx - \frac{x^2}{(x-y)^2} dy = 0$$

avec, comme dans l'exercice 1),

$$M(x, y) = \frac{y^2}{(x-y)^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2xy}{(x-y)^3},$$

$$N(x, y) = -\frac{x^2}{(x-y)^2} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2xy}{(x-y)^3}.$$

Donc l'équation donnée (8) est une équation aux différentielles totales. Donc, il existe $u = u(x, y)$ telle que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = M(x, y) dx + N(x, y) dy,$$

c'est à dire que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Comme dans l'exercice 1), de l'égalité $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{(x-y)^2}$, on déduit que

$$u(x, y) = -\int \frac{x^2}{(x-y)^2} dy + \varphi(x) = -\frac{x^2}{x-y} + \varphi(x).$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x^2 - 2xy}{(x-y)^2} + \varphi'(x) \Rightarrow \frac{y^2}{(x-y)^2} = -\frac{x^2 - 2xy}{(x-y)^2} + \varphi'(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi'(x) &= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{(x-y)^2} = 1 \Rightarrow \varphi(x) = x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Et alors } u(x, y) = -\frac{x^2}{x-y} + \varphi(x) = -\frac{x^2}{x-y} + x + C = -\frac{xy}{x-y} + C.$$

L'intégrale générale est donc $\frac{xy}{x-y} = C$.

Exercice 11.28. . Soit (C) la courbe cherchée d'équation $y = y(x)$ et soit $M(x, y)$ un point de (C) . L'équation de la normale passant par ce point est

$$Y - y = -\frac{1}{y'(x)}(X - x) = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x) = -\frac{dx}{dy}(X - x). \quad (1)$$

Soit $M_0(X_0, Y_0)$ le point fixe par lequel passent les normales à (C) , qui vérifie l'équation (1), donc

$$Y_0 - y = -\frac{dx}{dy}(X_0 - x), \quad \forall (x, y) \in (C). \quad (2)$$

On a

$$(2) \Leftrightarrow (Y_0 - y)dy = -(X_0 - x)dx$$

qui est une e.d. à variables séparées. En intégrant cette équation, on obtient la solution générale

$$\frac{(X_0 - x)^2}{2} + \frac{(Y_0 - y)^2}{2} = c \Leftrightarrow (X_0 - x)^2 + (Y_0 - y)^2 = 2c \quad (3)$$

où c est une constante positive, car le premier membre de (3) est positif et (3) est l'équation du cercle de rayon $r = \sqrt{2c}$ et de centre $M_0(X_0, Y_0)$.

Exercice 11.29. Soit $M(x, y)$ un point de la courbe (C) d'équation $y = y(x)$. Menons à partir du point M les perpendiculaires aux axes MA et MB (voir figure). La surface du rectangle est égale à $S = xy$ si $x \geq 0$ ou $S = -xy$ si $x \leq 0$. La surface de la partie du rectangle située en dessous de la courbe (C) est égale à

$$y(x) = \int_0^x y(t)dt, \quad x > 0 \quad \text{ou} \quad y(x) = -\int_0^x y(t)dt, \quad x < 0.$$

D'après la propriété de la courbe, on a $S - \sigma = 2\sigma$, c'est à dire que si $x > 0$:

$$xy = 3 \int_0^x y(t)dt. \quad (2)$$

En dérivant (2), on obtient

$$xy' + y = 3y$$

qui est équation différentielle à variables séparables équivalente à

$$x \frac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x} \quad (3)$$

dont la solution générale est, en intégrant pour $x > 0$,

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x} + c_1 \Rightarrow \log \sqrt{y} = \log x + c_1 \Rightarrow y = cx^2, \quad c > 0.$$

Même chose pour $x < 0$. Donc la courbe (C) est une parabole située dans la demi-plan supérieur $y \geq 0$.

Exercice 11.31. Soit $q(t)$ la quantité de bactéries à l'instant t et $x(0) = x_0$ la quantité initiale. D'après la propriété énoncée dans l'exercice, la multiplication des bactéries est donnée par l'équation $\frac{dq}{dt} = kq$, ($k > 0$ est la constante de multiplication), qui est une e.d. à variables séparables. En intégrant cette équation, on obtient la solution générale

$$\log q(t) = kt + c_1 \Leftrightarrow q(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme $q(0) = q_0$, alors $Ce^{k \cdot 0} = C = x_0$ et la solution particulière est $q = x_0 e^{kt}$.

Calculons le temps T au bout duquel la quantité de bactéries est multipliée par m . Dans ce cas, on a

$$x(T) = x_0 e^{kT} = mx_0 \Rightarrow T = \frac{\log m}{k}.$$

Exercice 11.34. Equation de la surface S du trapèze: $S = \frac{1}{2}(|OD| + |MB|)|OB|$. D'après la propriété de l'exercice, on a

$$S = \frac{1}{2} \left((y - x \frac{dy}{dx}) + y \right) x = a^2.$$

Cette équation est équivalente à

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy + 2a^2 = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire avec second membre. En intégrant cette équation, on trouve $y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}$.