
TP 2 : Résolution d'une équation F(x) = 0
Méthode de (bissection)

1. Les fonctions

Dans ce TP nous étudierons quelques méthodes de résolution d'équations de la forme F(x) = 0. D'une manière générale, x est un réel et F est une fonction réelle.

Exemple :

L'équation $x - 0.2 \sin(x) - 0.5 = 0$ (cet exemple est emprunté à Dion et Gaudet) admet une racine réelle au voisinage de 0.615.

Solution :

Une bonne pratique de commencer par faire un graphe de la fonction.

```
>> x = -1 :0.001 :1;
>> f = x - 0.2*sin(x) - 0.5;
>> plot(x,f) , grid
```

Pour résoudre l'équation $F(x) = x - 0.2 \sin(x) - 0.5 = 0$ on peut procéder comme suit :

On remplace l'équation donnée par une équation équivalente en écrivant par exemple,

$x = g(x)$, avec $g(x) = 0.2 \sin(x) + 0.5$ ($g : R \rightarrow R$, on travaille avec des réels).

On se donne alors une valeur x0 « proche » de la racine cherchée et on calcule les approximations successives engendrées par la récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$, ou $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dans le cas présent, voici ce qu'on obtient pour les 20 premiers termes de la suite en prenant $x_0 = 0.6$.

```
>> format long
>> x0 = 0.6;
>> for n = 1:20
        x(n) = 0.2*sin(x0) + 0.5;
        x0 = x(n);
   end
>> x'
```

Un programme équivalent au précédent serait :

```
>> x(1) = 0.6;
>> for n = 1:20
        x(n+1) = 0.2*sin(x(n)) + 0.5;
   end
>> x'
```

2. Méthode de dichotomie (bissection)

La méthode de dichotomie, basée sur le théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions continues.
Si la fonction f(x) est continue sur l'intervalle [a, b] et telle que $f(a).f(b) < 0$ il y a au moins une racine dans (a, b). La moitié de l'intervalle qui contient la racine sert de nouvel intervalle pour l'itération suivante.

La méthode de dichotomie génère donc une suite d'intervalles emboîtés $\{[a_n, b_n]\}$ telle que pour tout n : $f(a_n).f(b_n) < 0$.

2.1 Algorithme de la méthode de dichotomie

a) [a0, b0] = [a, b]
b) $[a_n, b_n]$ étant connu, on pose $w = (a_n + b_n)/2$ et on teste le signe de $f(a_n).f(w)$.
c) Si ce signe est positif, le changement de signe de f(x) a lieu dans la deuxième moitié de l'intervalle et on pose $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [w, b_n]$. S'il est négatif, le changement de signe a lieu dans la première moitié de l'intervalle et on pose $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n,w]$. Si le produit $f(a_n).f(w)$ est nul, on a trouvé le zéro cherché.

Exemple :

Calculer une approximation du zéro (f(x)=0) de $f(x) = x - 0.2\sin(x) - 0.5$ qui se trouve dans l'intervalle $[a, b] \equiv [0, 1]$.

Solution :

```
>> a = 0;
>> b = 1;
>> fa = -Inf;
>> fb = Inf;
>> while b-a > eps*b
        x = (a+b)/2;
        fx = x - 0.2*sin(x)- 0.5;
   if fx == 0
      break
   elseif sign(fx) == sign(fa)
        a = x;
        fa = fx;
   else
        b = x;
        fb = fx;
   end
end
>>disp(x)
```

Exemple 1 :

Calculer une approximation du zéro (f(x)=0) de $f(x) = (5 - x)e^x - 5$ qui se trouve dans l'intervalle $[a, b] \equiv [1, 6]$.

Exemple 2 :

Calculer une approximation du zéro (f(x)=0) de $f(x) = x/8(63x^4 - 70x^2 + 15)$ qui se trouve dans l'intervalle $[a, b] \equiv [0.6, 1]$.