2016

Les espaces L^p

GHEZAL Abderrezak

2016

Université Kasdi Merbah Ouargla

Table des matières

1 Rappels de quelques résultats d'intégration

Définition 1.1 *Soit Ω un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une σ-algèbre (ou tribu) sur Ω si, c'est une algèbre fermée pour les réunions dénombrables :*

(i) $\emptyset \in \Omega$,

(ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$.

(iii) *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, *alors*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}.$$

Le couple $(\Omega, \mathcal{M})$ est appelé espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les ensembles mesurables de Ω.

Définition 1.2 *Si $(\Omega, \mathcal{O})$ est un espace topologique, alors la tribu $\sigma(\mathcal{O})$ engendrée par les ouverts s'appelle la tribu borélienne de $(\Omega, \mathcal{O})$ et se note $\mathcal{B}(\Omega)$. Ses éléments sont des boréliens.*

Définition 1.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{M})$ un espace mesurable. On appelle mesure (ou mesure positive) sur Ω une application*

$$\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty],$$

telle que :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *est une suite disjointe, alors*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

Définition 1.4 *Soient $(\Omega, \mathcal{M})$ et $(\Omega', \mathcal{M}')$ deux espaces mesurables et f une fonction de Ω dans Ω'. On dit que f est mesurable si :*

$$\forall A \in \mathcal{M}',\ f^{-1}(A) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.5 *Soit* $(\Omega, \mathcal{M})$ *un espace mesurable. On appelle fonction étagée toute fonction mesurable de* Ω *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *dont l'image est finie.*

Remarque 1.1 *La fonction étagée s'écrit sous la forme :*

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{E_j},$$

où les α_j *sont les valeurs prises par f, les ensembles* E_j *forment une partition mesurable de* Ω *et* 1_{E_j} *désigne la fonction caractéristique de* E_j.

Proposition 1.1 *Soit* f *une fonction mesurable de* Ω *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Il existe une suite croissante de fonctions étagées à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *qui converge simplement vers* f.

Remarque 1.2 *Si* f *est de plus bornée, alors la converge est uniforme.*

Définition 1.6 *Soit* $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{E_j}$ *une fonction étagée de* Ω *dans* $\mathbb{R}_+$. *On appelle intégrale de* f *sur l'ensemble mesurable* A *la quantité :*

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(E_j \cap A) \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

avec la convention $0.(\infty) = 0$.

Définition 1.7 *Soit* f *une fonction mesurable de* Ω *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *On appelle intégrale de* f *sur l'ensemble mesurable* A *la quantité :*

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A s d\mu;\ s \textit{ fonction étagée à valeurs dans } \mathbb{R}_+,\ s \leq f \right\}.$$

Définition 1.8 *Si f est une fonction mesurable positive d'intégrale finie, on dit qu'elle est intégrable, ou sommable.*

Définition 1.9 *Soit* Ω *un ensemble. On appelle mesure extérieure sur* Ω *une application*

$$\mu^\star : \ \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty],$$

telle que :

(i) $\mu^\star(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu^\star$ *est croissante (monotonicité) :*

$$A \subset B \Rightarrow \mu^\star(A) \leq \mu^\star(B),$$

(iii) $\mu^\star$ *est sous-additive :*

$$\forall \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega),\ \mu^\star(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n).$$

Définition 1.10 *Un pavé P de $\mathbb{R}^N$ est un produit d'intervalles bornés*

$$P = I_1 \times I_2 \times ... \times I_N.$$

On note $|P|$ la mesure de ce pavé :

$$|P| = \prod_{j=1}^{N} l(I_j),$$

où $l(Ij)$ est la longueur du segment I_j.

Définition 1.11 *Un ensemble E de $\mathbb{R}^N$ est de mesure nulle si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite (P_n) de pavés de $\mathbb{R}^n$ telle que*

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \ \textit{et} \ \sum_{n=1}^{\infty} |P_n| < \epsilon.$$

Définition 1.12 *Pour toute partie A de $\mathbb{R}^N$, on définit*

$$\lambda^\star(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |P_n|;\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n,\ P_n \textit{ pavé ouvert de } \mathbb{R}^N \right\}.$$

Théorème 1.1 *On a les assertions suivantes :*

(i) $\lambda^\star$ *est une mesure extérieure sur* $\mathbb{R}^N$.

(ii) $\lambda^\star(P) = |P|$, *pour tout pavé* $P \subset \mathbb{R}^N$.

Preuve. Voir [2, Théorème 2.6.10]. ■

Définition 1.13 *On appelle mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^N$ *la restriction de la mesure extérieure* $\lambda^\star$ *à la tribu borélienne* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et notée* λ_N, λ.

Remarque 1.3 *La mesure de Lebesgue est définie sur la tribu des ensembles Lebesgue-mesurables, constituée de toutes les parties* E *de* $\mathbb{R}^N$ *telles qu'il existe des ensembles Boréliens* A *et* B *tels que*

$$A \subset E \subset B;\ \lambda(B \setminus A) = 0.$$

Remarque 1.4 *Une fonction* $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, *mesurable pour la tribu de Lebesgue, est dite Lebesgue-mesurable (mesurable). Dans ce cas, on écrit* $\int f(x)dx$ *au lieu de* $\int f d\lambda$.

Définition 1.14 *On dit qu'une fonction* f *mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est intégrable si*

$$\int_\Omega |f(x)|dx < \infty.$$

Remarque 1.5 *On définit l'intégrale d'une fonction* f *mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *comme suit :*

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega f_+(x)dx + \int_\Omega f_-(x)dx,$$

où

$$f_+(x) = \sup(f(x), 0) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)),$$
$$f_-(x) = \sup(-f(x), 0) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

Remarque 1.6 *On définit l'intégrale d'une fonction* f *mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{C}$ *comme suit :*

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega \mathcal{R}(f(x))dx + i\int_\Omega \mathcal{I}(f(x))dx.$$

Théorème 1.2 *(de convergence monotone ou Théorème de Beppo-Levi) Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *suite croissante de fonctions mesurables positives sur* Ω. *Alors* $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *existe, est mesurable positive, et*

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)dx.$$

Lemme 1.1 *(de Fatou) Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de fonctions mesurables positives sur* Ω. *On a*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

(On rappelle que $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{k\to\infty}(\inf_{n\geq k} f_n)$).

Définition 1.15 *On dit qu'une propriété est vraie presque partout sur* Ω *(ou p.p.), si l'ensemble des éléments de* Ω *qui ne vérifient pas cette propriété est de mesure nulle (négligeable).*

Proposition 1.2 *La relation d'égalité presque partout (= p.p.) est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables.*

Lemme 1.2 *Soit* f *une fonction mesurable positive sur* Ω *telle que* $\int_\Omega f(x)dx = 0$. *Alors* $f = 0$ *p.p. sur* Ω.

2 Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 2.1 *Soit* $p \in [1, \infty[$. *On définit*

$$\mathfrak{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Pour $f \in \mathfrak{L}^p(\Omega)$, *on note*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 2.2 *On dit qu'une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est essentiellement bornée s'il existe un réel* $C \geq 0$ *tel que* $|f(x)| \leq C$ *p.p. sur* Ω.

On note

$$\sup_{x\in\Omega} ess|f(x)| = \inf(\{C \geq 0; |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega\}).$$

Définition 2.3 *On appelle espace $\mathfrak{L}^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω :*

$$\mathfrak{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et } \exists C \geq 0, |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Pour $f \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega)$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|.$$

Remarque 2.1 *$\mathfrak{L}^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions intégrables.*

Remarque 2.2 *Si $f \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega)$, alors on a*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \textit{ p.p. sur } \Omega.$$

Remarque 2.3 *On peut définir $\mathfrak{L}^p(\Omega)$ comme suit :*

$$\mathfrak{L}^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et } \int_\Omega |f|^p dx \in \mathfrak{L}^1(\Omega)\right\}.$$

Définition 2.4 *Soit $p \in [1, \infty]$. On définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathfrak{L}^p(\Omega)$ pour la relation d'équivalence (= p.p.), i.e.*

$$L^p(\Omega) = \mathfrak{L}^p(\Omega)/(= p.p.).$$

Définition 2.5 *On dit que $p, p' \in [1, \infty]$ sont des exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$). Dans toute la suite, on désigne par p' l'exposant conjugué de p.*

Lemme 2.1 *(Inégalité de Young) Soient $a, b \geq 0$ et $p \in]1, \infty[$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \tag{1}$$

Preuve. Si $a = 0$ ou $b = 0$ c'est facile, donc on peut supposer que $a, b > 0$.

La fonction exponentielle exp est convexe. On a donc,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1], \exp(tx + (1-t)y) \leq t\exp(x) + (1-t)\exp(y). \tag{2}$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
ab &= \exp(\ln(ab)) \\
&= \exp(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^{p'}}{p'}) \\
&\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{p'}\exp(\ln b^{p'}) \\
&= \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1 *(Inégalité de Hölder) Soient $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$. Alors, $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{3}$$

Preuve. L'inégalité de Young (1) donne

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'}, \ \forall x \in \Omega. \tag{4}$$

En intégrant

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |g(x)|^{p'} dx < \infty, \tag{5}$$

donc, $fg \in L^1(\Omega)$.

Pour montrer (3), on distingue 3 cas :

Cas 1. Si $p = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 &= \int_\Omega |f||g|dx \\
&\leq \int_\Omega |f|\|g\|_\infty dx \\
&= \|g\|_\infty \int_\Omega |f|dx \\
&= \|f\|_1\|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Cas 2. Si $p = \infty$ est similaire.

Cas 3. $p \in]1, \infty[$.

(i) Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_{p'} = 0$, alors $f = 0$ p.p. sur Ω ou $g = 0$ p.p. sur Ω. On en déduit $fg = 0$ p.p. sur Ω, donc $\|fg\|_1 = 0$ et (3) est vraie.

(ii) Si $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_{p'} = 1$, on a alors, avec (5)

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

(iii) On suppose $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_{p'} > 0$, On pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \frac{g}{\|g\|_{p'}}$, de sorte que $\|f_1\|_p = 1$ et $\|g_1\|_{p'} = 1$. Le cas (ii) donne alors

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \|f\|_p \|g\|_{p'} \| \frac{f}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_{p'}} \|_1 \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.1 \\ &= \|f\|_p \|g\|_{p'}. \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.1 *Lorsque $p = 2$, on a $p' = 2$ et l'inégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Théorème 2.2 *(Inégalité de Minkowski) Soient $p \in [1, \infty]$, $f, g \in L^p(\Omega)$. Alors, $f + g \in L^p(\Omega)$ et*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{7}$$

Preuve. Comme $|f + g| \leq |f| + |g|$, alors le résultat est évident pour $p = 1$ et $p = \infty$.

On suppose donc que $p \in]1, \infty[$, et que $f, g \in L^p(\Omega)$.

On rappelle que

$$\forall a, b \geq 0, \ (a + b)^p \leq 2^p (a^p + b^p). \tag{8}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \\
&\leq \int_\Omega (|f(x)|+|g(x)|)^p dx \\
&\leq 2^p \int_\Omega (|f(x)|^p+|g(x)|^p) dx \\
&= 2^p(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p) < \infty,
\end{aligned}$$

donc, on en déduit que $f+g \in L^p(\Omega)$.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
|f(x)+g(x)|^p &= |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \\
&\leq |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx+\int_\Omega |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx \\
&= \||f||f+g|^{p-1}\|_1+\||g||f+g|^{p-1}\|_1 \\
&\leq \|f\|_p\||f+g|^{p-1}\|_{p'}+\|g\|_p\||f+g|^{p-1}\|_{p'} \\
&= (\|f\|_p+\|g\|_p)\||f+g|^{p-1}\|_{p'}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Puisque $p-1=\frac{p}{p'}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^{p-1} &= \|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p'}} \\
&= \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^{\frac{p}{p'}\cdot p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \||f+g|^{\frac{p}{p'}}\|_{p'} \\
&= \||f+g|^{p-1}\|_{p'}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

De (9) et (10), on en déduit que

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}.$$

On obtient alors (7). $\blacksquare$

Théorème 2.3 *L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel, il est normé par $\|.\|_p$ pour tout $p \in [1, \infty]$.*

Preuve.

(i)
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega |\alpha f(x)|^p dx = |\alpha|^p \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty,$$

donc, $\alpha f \in L^p(\Omega)$.

- Théorème 2.2 donne $f + g \in L^p(\Omega)$ pour tous $f, g \in L^p(\Omega)$.

Alors $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel.

(ii) L'application $\|.\|_p : f \mapsto \|f\|_p$, est une norme sur $L^p(\Omega)$, En effet,

- $\|f\|_p \geq 0$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$.
- $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|\alpha f\|_p$ pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- L'inégalité de Minkowski (7) donne $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tous $f, g \in L^p(\Omega)$.
- $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$.

$\blacksquare$

Remarque 2.4 *L'application $\|.\|_p : f \mapsto \|f\|_p$, est donc une semi-norme sur $\mathfrak{L}^p(\Omega)$. On remarque que, si $f \in \mathfrak{L}^p(\Omega)$, on a $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ p.p..*

Théorème 2.4 *(Théorème de convergence monotone de Beppo Levi)*

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que $\sup_n \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur vers une limite finie $f(x)$, de plus $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Lemme 2.2 *(de Fatou) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que*

(1) *pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ p.p. sur Ω,*

(2) $\sup_n \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Remarque 2.5 *Un Lemme analogue est valable pour les* $\limsup$ *:*

$$\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n(x)dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Théorème 2.5 *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

(1) *$f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω,*

(2) *il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.*

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_n - f\|_1 \to 0. \tag{11}$$

En particulier,

$$\int_\Omega f_n(x)dx \to \int_\Omega f(x)dx. \tag{12}$$

Preuve. En appliquant le Lemme de Fatou, on obtient

$$\int_\Omega |f(x)|dx = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)|dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x)|dx \leq \int_\Omega g(x)dx < \infty.$$

Donc $f \in L^1(\Omega)$.

Comme $|f_n - f| \leq 2g$, on a $2g - |f_n - f| \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty}(2g - |f_n - f|) = 2g$.

Par le Lemme de Fatou, il vient

$$\begin{aligned} \int_\Omega 2g(x)dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (2g - |f_n - f|)dx \\ &\leq \int_\Omega 2g(x)dx - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|dx. \end{aligned}$$

Puisque $\int_\Omega 2g(x)dx < \infty$, on en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|dx \leq 0,$$

donc $\int_\Omega |f_n - f|dx = 0$, c'est-à-dire $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

On remarque que

$$|\int_\Omega f_n dx - \int_\Omega f dx| = |\int_\Omega (f_n - f)dx| \leq \int_\Omega |f_n - f|dx \to 0.$$

■

Corollaire 2.2 *(Convergence dominée dans L^p) Soient $p \in [1, \infty[$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que*

(1) *$f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω,*

(2) *il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.*

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ (c'est-à-dire $\|f_n - f\|_p \to 0$).

Définition 2.6 *Un espace normé complet est appelé espace de Banach.*

Théorème 2.6 *(Théorème de Fischer-Riesz) L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel normé complet (i.e. un espace de Banach) pour tout $p \in [1, \infty]$.*

Preuve.

Cas 1. Si $p = \infty$.

(i) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\Omega)$. Pour $k, m, n \geq 1$, on définit :

$$A_k = \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\},$$

$$B_{m,n} = \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\},$$

$$E = (\bigcup_k A_k) \bigcup (\bigcup_{n,m} B_{m,n}).$$

Comme $\lambda(A_k) = 0$ et $\lambda(B_{n,m}) = 0$, on en déduit que

$$\lambda(E) \leq \sum_k \lambda(A_k) + \sum_{n,m} \lambda(B_{n,m}) = 0.$$

(ii) Sur $\Omega \setminus E$, on a :

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

c'est-à-dire $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy uniforme sur $\Omega \setminus E$.

En particulier, pour tout $x \in \Omega\setminus E$, la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle, donc est convergeante car $\mathbb{R}$ est complet. On note f la limite ponctuelle de f_n sur $\Omega \setminus E$.

On a

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε tel que pour $n, m > N_\varepsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Alors pour $n > N_\varepsilon$,

$$\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\Omega \setminus E$.

(iii) En posant $f = 0$ sur E. Pour $n > N_\varepsilon$, et $x \in \Omega \setminus E$, on a

$$|f(x)| < |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \|f_n(x)\|_\infty + \varepsilon < \infty$, donc $f \in L^\infty(\Omega)$. Ainsi $L^\infty(\Omega)$ est complet.

Cas 2. Si $p \in [1, \infty[$.

(i) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Par récurrence, on construit une sous-suite extraite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \geq 0$, il existe un $n_{k+1} > n_k$ tel que $n, m \geq n_k \Rightarrow \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$.

On pose

$$g_k(x) = \sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|.$$

Pour tout $k \geq 0$, on a

$$\|g_k\|_p = \| \sum_{i=0}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \|_p.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=0}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p = \sum_{i=0}^{k} 2^{-i} < 2.$$

D'après le Théorème de convergence monotone, on en déduit que $g_k(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie noté $g(x)$ avec $g \in L^p(\Omega)$.

D'après le Lemme de Fatou, on en déduit que $\|g\|_p \leq 2$.

(ii) Ainsi, la suite $\{g_k^p\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions intégrables, positives et telles que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_k^p dx \leq 2^p < \infty.$$

Par le Théorème de convergence monotone 2.4, $\sup_{k\in\mathbb{N}} g_k < \infty$ p.p. sur Ω. Plus précisément, il existe E tel que $\lambda(E) = 0$ et $\sum_{i=0}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| < \infty$ p.p. sur $\Omega \setminus E$.

D'autre part, on a évidemment :

$$f_{n_k}(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right), \ \forall x \in \Omega.$$

On définit

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \text{ si } x \in \Omega \setminus E, \\ 0 \text{ si } x \in E. \end{cases}$$

Puisque $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω, et que $|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + g(x)$ p.p. sur Ω. Le Corollaire 2.2 de convergence dominée dans L^p montre que $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$.

Enfin, comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, on en déduit que $\|f_n - f\|_p \to 0$. En conclusion $L^p(\Omega)$ est complet.

■

Corollaire 2.3 *(Réciproque partielle de la convergence dominée dans L^p) Soient $p \in [1, \infty[$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

(1) *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω,*

(2) *il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque k, $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.*

Preuve. Comme la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(\Omega)$, elle est de Cauchy. On peut donc extraire une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}.$$

On conclut comme dans la preuve du Théorème 2.6 de complétude en posant

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{k=0}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

■

Définition 2.7 *On peut définir un produit scalaire euclidien sur $L^2(\Omega)$ par :*

$$(f, g) \mapsto < f|g >= \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Corollaire 2.4 *$L^2(\Omega)$ muni de son produit scalaire est un espace de Hilbert (complet pour la norme*
$< f|f >^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$).

Définition 2.8 *On peut définir un produit scalaire hermitien par :*

$$(f, g) \mapsto < f|g >= \int_\Omega \overline{f(x)}g(x)dx.$$

Définition 2.9 *On dit que f est localement intégrable sur Ω si, pour tout compact K inclus dans Ω, la fonction f est intégrable sur K. On note*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{f;\ f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega\right\},$$

l'espace vectoriel des fontions localement intégrables.

De même, pour tout $p \in [1, \infty]$, on note

$$\begin{aligned} L^p_{loc}(\Omega) &= \{f;\ f \in L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega\} \\ &= \left\{f;\ f1_{|K} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega\right\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.6 *On a bien sur $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.*

Définition 2.10 *(Convergence dans L^p_{loc})*

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p_{loc}(\Omega)$ et $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. On dit que $f_n \to f$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$ si, pour tout compact K, $f_{n|K} \to f_{|K}$ dans $L^p(K)$.

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ des ouverts et $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables $f(x) = f(x_1, x_2)$ mesurable.

Théorème 2.7 *(Théorème de Tonelli)*

On suppose que

$$\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)| dx_2 < \infty \text{ pour presque tout } x_1 \in \Omega_1,$$

et

$$\int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)| dx_2 < \infty.$$

Alors $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 2.8 *(Théorème de Fubini)*

On suppose que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors, pour presque tout $x_1 \in \Omega_1$

$$f(x_1, x_2) \in L^1_{x_2}(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \in L^1_{x_1}(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $x_2 \in \Omega_2$

$$f(x_1, x_2) \in L^1_{x_1}(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1 \in L^1_{x_2}(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 = \int_{\Omega_2} dx_2 \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1 = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

3 Réflexivité

Lemme 3.1 *(Inégalités de Clarkson)*

Soit $f, g \in L^p(\Omega)$, alors

(i) *Si $p \in [2, \infty[$, on a*

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^p + \|\frac{f-g}{2}\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p). \tag{13}$$

(ii) *Si $p \in]1, 2]$, on a*

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^{p'} + \|\frac{f-g}{2}\|_p^{p'} \leq [\frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)]^{p'-1}. \tag{14}$$

Définition 3.1 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' est réflexif si $J(E) = E''$.*

Remarque 3.1 *Si E est réflexif on peut identifier E et E''.*

Définition 3.2 *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si*

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tel que* $(x, y \in E, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ *et* $\|x - y\| > \varepsilon) \Rightarrow (\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta)$.

Théorème 3.1 *(Théorème de Milman-Pettis)*

Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Preuve. Voir [1, Théorème III.29]. ■

Théorème 3.2 *L'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe pour tout $p \in]1, \infty[$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, on suppose que $\|f - g\|_p > \varepsilon$, avec $\|f\|_p \leq 1$ et $\|g\|_p \leq 1$.

(i) Pour $p \in [2, \infty[$, on déduit de l'inégalité (13) que

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^p < 1 - (\frac{\varepsilon}{2})^p. \tag{15}$$

Puisque $(1-t)^{\frac{1}{p}} \leq 1 - \frac{1}{p}t$, on obtient

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p < 1 - \frac{1}{p}(\frac{\varepsilon}{2})^p, \tag{16}$$

donc $\|\frac{f+g}{2}\|_p < 1 - \delta$, avec $\delta = \frac{1}{p}(\frac{\varepsilon}{2})^p > 0$.

(ii) Pour $p \in]1, 2]$, on déduit de l'inégalité (14) que

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^{p'} < 1 - (\frac{\varepsilon}{2})^{p'}, \tag{17}$$

donc $\|\frac{f+g}{2}\|_p < 1 - \delta$, avec $\delta = \frac{1}{p'}(\frac{\varepsilon}{2})^{p'} > 0$.

■

Alors $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, on en déduit que $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $p \in]1, \infty[$.

Remarque 3.2 *Les espaces L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.*

4 Densité

Définition 4.1 *On définit*

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega);\ f(x) = 0\ \forall x \in \Omega \setminus K,\ K \subset \Omega \textit{ est un compact}\},$$

l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact.

On appelle le support de la fonction f dans Ω l'ensemble $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}$.

Lemme 4.1 *L'espace $C_c(\Omega)$ est un espace vectoriel.*

Lemme 4.2 *Pour tout $p \in [1, \infty]$,*

(i) *toute fonction continue à support compact appartient à $L^p(\Omega)$, et pour $p = \infty$, on a*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

(ii) *Si $f, g \in C_c(\Omega)$ sont égales p.p. alors elles sont égales.*

Remarque 4.1 *En conséquence, on peut identifier l'espace $C_c(\Omega)$ avec un sous espace vectoriel de $L^p(\Omega)$.*

Lemme 4.3 *(d'Urysohn)*

Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ ouvert et $K \subset \Omega$ compact. Alors il existe une fonction continue $f : \mathbb{R}^N \to [0, 1]$ qui vaut 1 sur K et 0 en dehors de U.

Théorème 4.1 *(Théorème de Lusin)*

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\lambda(\{x; f(x) \neq 0\}) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in C_c(\Omega)$ tel que :

$$\lambda(\{x; f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

De plus, on peut choisir g tel que $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Lemme 4.4 *Soit $E(\Omega)$ l'ensemble des fonctions étagées, à égalité presque partout prés. Alors l'espace $E(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty[$.*

Preuve. Il est facile à vérifier que $E(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ et que c'est un sous-espace vectoriel. Il faut de montrer que tout $f \in L^p(\Omega)$ appartient à l'adhérence de $E(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$.

(i) Cas $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$.

D'après Proposition 1.1, il existe une suite croissante de fonctions $S_n \in E(\Omega)$ telles que $S_n(x) \to f(x)$ pour tout point x.

Donc

$$|f(x) - S_n(x)| \to 0.$$

On a $|f(x) - S_n(x)| = f(x) - S_n(x) \leq f(x)$, donc $|f(x) - S_n(x)|^p \leq f(x)^p < \infty$.

D'après le Théorème de convergence dominée, on trouve

$$\|f - S_n\|_p^p = \int_\Omega |f(x) - S_n(x)|^p dx \to \int_\Omega 0 \; dx = 0,$$

i.e., $S_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

(ii) Cas $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

On peut donc écrire

$$f = g^+ - g^-,$$

ou g^+ et g^- positives.

On trouve dans $E(\Omega)$ des suites $S_{1,n} \to g^+$ et $S_{2,n} \to g^-$.

On pose $t_n = S_{1,n} - S_{2,n}$. Alors $t_n \in E(\Omega)$ et $t_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

■

Théorème 4.2 *(Théorème de densité)*

Soit $p \in [1, \infty[$, l'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

C"est-à-dire que :

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in C_c(\Omega) \text{ tel que } \|f - g\|_p < \varepsilon, \tag{18}$$

ou encore, il existe une suite $\{f_n\} \subset C_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

Preuve. Puisque $E(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, il suffit de montrer que pour toutes fonction $s \in E(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $g \in C_c(\Omega)$ tel que $\|s - g\|_p < \varepsilon$.

Puisque s est étagée elle est bornée, et par définition de $E(\Omega)$ $(\lambda(\{x; s(x) \neq 0\}) < \infty)$. On peut donc appliquer le Théorème de Lusin, on en déduit qu'il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$ et

$$\lambda(\{x; g(x) \neq s(x)\}) < (\frac{2}{2\|s\|_\infty})^p. \tag{19}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega |s(x) - g(x)|^p dx &= \int_{\{x; s(x) \neq g(x)\}} |s(x) - g(x)|^p dx \\ &\leq \lambda(\{x; s(x) \neq g(x)\}).\|s - g\|_\infty^p \\ &< (\frac{2}{2\|s\|_\infty})^p (\|s\|_\infty + \|g\|_\infty)^p \\ &\leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Donc $\|s - g\|_p < \varepsilon$ et le Théorème est démontré. ■

Remarque 4.2 *$C_c(\Omega)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\Omega)$.*

5 Séparabilité

Définition 5.1 *On dit qu'un espace (métrique) est séparable s'il contient une partie dénombrable dense.*

Théorème 5.1 *L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $p \in [1, \infty[$.*

Preuve. On considère $(R_i)_{i\in I}$, la famille dénombrable des pavés R de la forme :

$$R = \prod_{j=1}^{N}]a_j, b_j[\subset \Omega \text{ avec } a_j, b_j \in \mathbb{Q}. \tag{20}$$

On considère E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions 1_{R_i} (i.e. les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des fonctions 1_{R_i}) :

$$E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} q_k 1_{R_k} ; q_k \in \mathbb{Q} \right\}, \tag{21}$$

de sorte que E est dénombrable.

On va montrer que E est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ fixés. D'aprés le Théorème de densité 4.2, il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que

$$\|f - f_1\|_p < \varepsilon.$$

Soit Ω' un ouvert borné tel que $supp(f_1) \subset \Omega' \subset \Omega$. Puisque $f_1 \in C_c(\Omega')$ donc on peut construire une fonction $f_2 \in E$ telle que :

$$supp(f_2) \subset \Omega' \text{ et } |f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}} \text{ p.p. sur } \Omega'.$$

On recouvre $supp(f_1)$ par un nombre fini de pavés R_i avec l'oscillation de f_1 est majorée par $\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{\frac{1}{p}}}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|f_2 - f_1\|_p &= \left(\int_{\Omega'} |f_2(x) - f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega'} \frac{\varepsilon^p}{|\Omega'|} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|f - f_2\|_p &\leq \|f - f_1\|_p + \|f_1 - f_2\|_p \\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

■

Remarque 5.1 *L'espace L^∞ n'est pas séparable.*

6 Dualité

Il s'agit ici de décrire l'ensemble des applications linéaires continues $L^p \to \mathbb{R}$, ou dual topologique de L^p, noté $(L^p)'$. Il est muni de la norme, dite norme du dual fort :

$$\|T\|_{(L^p)'} = \sup_{0 \neq g \in L^p} \frac{|Tg|}{\|g\|_p}.$$

Théorème 6.1 *(Théorème de représentation de Riesz)*

Soient $p \in]1, \infty[$ et $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que :

$$< \varphi, f >= \int uf, \ \forall f \in L^p. \tag{22}$$

De plus on a

$$\|u\|_{p'} = \|\varphi\|_{(L^p)'}. \tag{23}$$

Preuve. On définit l'opérateur $T : L^{p'} \to (L^p)'$ par

$$< Tu, f >_{(L^p)', L^p}= \int uf, \ \forall f \in L^p. \tag{24}$$

T est un isomorphisme, et même en fait une isométrie.

L'inégalité de Hölder, donne

$$\begin{aligned}| < Tu, f > | &= |\int uf dx| \\ &\leq \int |uf| dx \\ &\leq (\int |u|^{p'} dx)^{\frac{1}{p'}} (\int |f|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{p'} \|f\|_p.\end{aligned}$$

Donc $\|Tu\|_{(L^p)'} \leq \|u\|_{p'}$, on en déduit que $Tu \in L^{p'}$.

Réciproquement, pour tout $g \in L^p$, on a

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{(L^p)'} &\geq \frac{|< Tu, g >|}{\|g\|_p} \\ &= \frac{|\int ugdx|}{\|g\|_p}. \end{aligned}$$

On pose

$$g(x) = \begin{cases} |u(x)|^{p'-2}u(x) & \text{si } u(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

On a $g \in L^p$, $\|g\|_p = \|u\|_{p'}$.

Donc

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{(L^p)'} &\geq \frac{\|u\|_{p'}^{p'}}{\|u\|_{p'}^{p'-1}} \\ &= \|u\|_{p'}. \end{aligned}$$

Alors, on trouve $\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{p'}$, $\forall u \in L^{p'}$. On en déduit que T est une isométrie de $L^{p'}$ sur un sous-espace fermé de $(L^p)'$ ($L^{p'}$ est complet). ■

Il reste à démontrer que T est surjective. On note $E = T(L^{p'})$, puisque E est un sous-espace fermé, il reste à montrer que E est dense dans $(L^p)'$, il suffit de vérifier que si $h \in (L^p)''$ ($(L^p)'' = L^p$ car L^p est réflexif) satisfait $< Tu, h >= 0$ pour tout $u \in L^{p'}$, alors $h = 0$.

Puisque $< Tu, h >= \int uhdx$, donc on obtient $\int uhdx = 0$ $\forall u \in L^{p'}$. On prend $u = |h|^{p-2}h$, on trouve $\int |h|^p dx = 0$, on en déduit que $h = 0$.

Théorème 6.2 *Soit $\varphi \in (L^1)'$. Alors il existe $u \in L^\infty$ unique tel que :*

$$< \varphi, f >= \int ufdx \ \forall f \in L^1.$$

De plus

$$\|\varphi\|_{(L^1)'} = \|u\|_\infty.$$

Remarque 6.1 *On peut identifier le dual de L^p avec $L^{p'}$. De façon abrégée, on note $(L^p)' = L^{p'}$ pour $p \in [1, \infty[$.*

Remarque 6.2 *Le dual de L^∞ est strictement plus grand que L^1, c'est-à-dire qu'il existe des formes φ linéaires continues sur L^∞ qui ne sont pas du type*

$$< \varphi, f >= \int u f dx \ \forall f \in L^\infty \text{ avec } u \in L^1. \tag{26}$$

7 Convolution et régularisation

Définition 7.1 *Soit $f, g \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Le produit de convolution de f par g est la fonction*

$$f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Remarque 7.1 *On remarque que $f*g = g*f$, autrement dit que $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy$.*

Théorème 7.1 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $p \in [1, \infty]$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, le produit de convolution $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.*

Preuve.

(i) Si $p = \infty$, le résultat est clair.

(ii) Si $p = 1$, on pose $F(x, y) = f(x-y)g(y)$.

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$ on a

$$\begin{aligned} \int |F(x,y)|dx &= |g(y)| \int |f(x-y)|dx \\ &= |g(y)| \|f\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

et

$$\int dy \int |F(x,y)|dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

D'après le Théorème de Tonelli 2.7, on obtient que $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

Théorème de Fubini 2.8, donne

$$\int |F(x,y)|dy < \infty \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^N,$$

et

$$\int dx \int |F(x,y)|dy \quad \leq \quad \|f\|_1 \|g\|_1.$$

On en déduit que

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{27}$$

(iii) Si $p \in]1, \infty[$.

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$ fixé, la fonction $yx \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, donc $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$.

Puisque $|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^N)$. D'après l'inégalité de Hölder on obtient

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)||f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1_y(\mathbb{R}^N), \tag{28}$$

et

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leq (\int |f(x-y)||g(y)|^p dy)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{p'}}. \tag{29}$$

Donc

$$|f * g(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x).\|f\|_1^{\frac{p}{p'}}. \tag{30}$$

On applique le résultat du cas $p = 1$, on trouve $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1 \|g\|_p^p \|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

Alors

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

■

Remarque 7.2 *(Inégalité de Hausdorff-Young)*

Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

On rappelle que $C^k(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$), désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.

On note aussi

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega),\ C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

En particulier, les éléments de $C_c^\infty(\Omega)$ sont dits fonctions test (ou fonctions d'essais) et on note $C_c^\infty(\Omega)$ par $\mathcal{D}(\Omega)$.

Théorème 7.2 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \text{ et } \partial^\alpha(f * g) = \partial^\alpha f * g, \tag{31}$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N \leq k$.

En particulier si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{32}$$

Preuve. Voir [1, Proposition IV.20].

■

Définition 7.2 *(Suites régularisantes)*

On appelle suite régularisante, toute suite (ρ_n) de fonctions telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

- $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,
- $supp(\rho_n) \subset B(0, \frac{1}{n})$,
- $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$,
- $\rho_n \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}^N$.

Par exemple

$$\rho_n(x) = Cn^N \rho(nx),$$

où

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases} \tag{33}$$

et $C = (\int \rho)^{-1}$.

Remarque 7.3 *Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho_n * f \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$.*

Théorème 7.3 *Soient $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Corollaire 7.1 *Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Bibliographie

[1] Haïm Brézis. Analyse fonctionnelle. Masson, 1983.

[2] Nicolas Lerner. A Course on integration theory. Birkhäuser, 2014.