

Chapitre 2. Calcul des Pièces sollicitées en Compression Simple

2.1 Introduction

Les déformations dues à la compression ne jouent pas toujours un rôle déterminant sur les éléments de structure verticaux. En revanche, un phénomène d'instabilité appelé flambement apparaît à partir d'une certaine charge et en fonction du rapport existant entre la section et la hauteur de l'élément considéré. Le flambement est une forme d'instabilité propre aux éléments comprimés élancés tel que les poteaux, colonnes et barres comprimées.

Le flambement simple est une déformation de flexion latérale due à la géométrie de la barre : la longueur est importante devant l'une des dimensions de la section. La déformée de flambement s'inscrit dans le plan de flambement qui est orthogonal à l'axe d'inertie la plus faible.

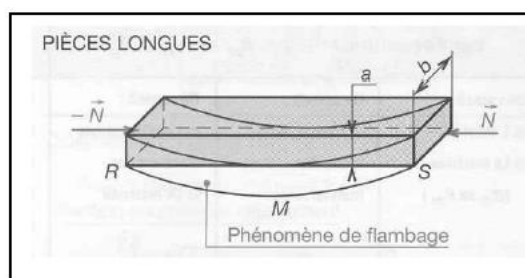
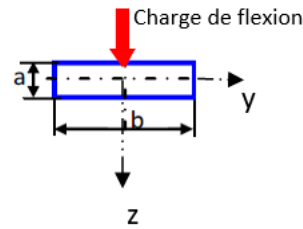


Figure (2.1) *Phénomène de flambage*

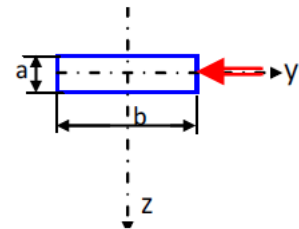
Le flambage élastique se manifeste pour des contraintes de compression faibles et le comportement du matériau reste élastique. Le flambement simple est dû à une action normale de compression. Le flambement avec flexion est le résultat de l'application d'un effort normal de compression et d'un moment fléchissant. On distingue deux cas :

- Déformée de flambement et déformée de flexion s'ajoutent (elles sont dans le même plan) ;

- Déformée de flambement et la déformée de flexion sont deux plans orthogonaux.



Cas 1 : flambement et flexion
dans un même plan



Cas 2 : flambement dans un
plan et flexion dans l'autre
plan

Il serait indispensable de déterminer la charge critique de flambement dans ces cas de chargement. La charge critique dépend du matériau, de l'élancement de la pièce et des conditions de liaisons aux extrémités. En effet, Euler a étudié le flambement des barres élancées et il a montré qu'il y'a plusieurs modes de flambement.

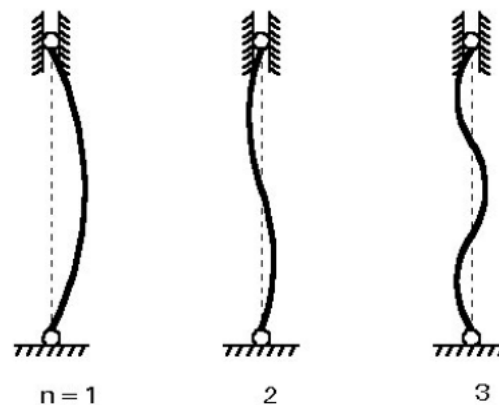


Figure (2.2) Mode de flambement

2.2 Flambement simple d'Euler

Le flambement simple affecte les pièces soumises à la compression simple. Son étude est due à EULER. Sa théorie est fondée sur une poutre bi-articulée à ses extrémités, soumise à un effort. Lorsque N croît, à partir de 0, l'état d'équilibre rectal évolue vers un état curviligne fléchi. D'après la loi fondamentale de la flexion, issue de la résistance des matériaux, le moment fléchissant s'écrit :

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dz^2}$$

Or :

$$M = N \cdot y$$

Donc :

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} + N \cdot y$$

On posant : $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}} \rightarrow \alpha^2 = \frac{N}{EI}$

On obtient l'équation : $\frac{\alpha^2 y}{dz^2} + \alpha^2 y = 0 \dots \dots \dots (1)$

Equilibre différentielles de second ordre, dont la solution générale est :

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z$$

La résolution de l'équation selon les conditions aux limites :

– Pour : $z=0 \rightarrow y(0) = 0, \quad B = 0$

– Pour : $z=l_0 \rightarrow y(l_0) = 0, \quad A \sin \alpha l_0 = 0$

$$A \sin \alpha l_0 = 0 \rightarrow \alpha l_0 = k \cdot \pi$$

Alors : $\alpha = \frac{k \cdot \pi}{l_0}$

D'où : $N = \frac{k^2 \pi^2 \cdot E \cdot I}{l_0^2}$

Si : $k=0$, alors $N=0$, donc pas de déformation et la poutre reste rectiligne, donc au minimum $k=1$ ce qui conduit à une valeur minimale de N_k (c'est la charge critique d'Euler N_{cr})

$$N_{cr} = F_c = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}$$

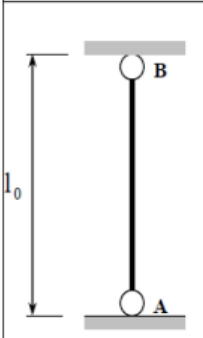
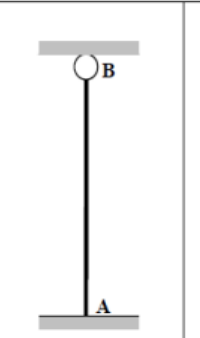
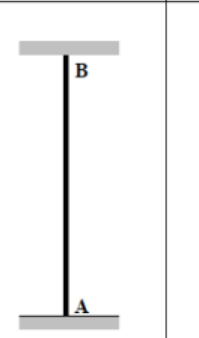
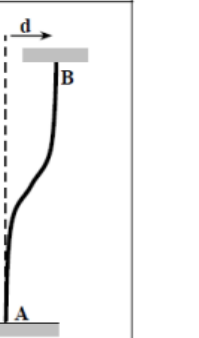
F_c (N_{cr}) : force critique qui produit l'instabilité.

E : module d'élasticité longitudinale, caractéristique du matériau.

I : moment d'inertie minimal de la section de la pièce.

L_{cr} (L_f) : longueur libre de flambement dépendant de la longueur réelle de la pièce et du mode de fixation des extrémités. C'est la longueur sur laquelle se produit le flambement.

Tableau (2.1) Différentes configurations pour le calcul de la longueur libre

Longueur de flambement l_f en fonction des liaisons aux appuis				
A et B sont sur la même verticale			Déplacement de B en tête de poteau	
				
$l_f = l_0$	$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} l_0$	$l_f = \frac{l_0}{2}$	$l_f = 2 l_0$	$l_f = l_0$

On remarquera que la force critique dépend de :

- la géométrie de la section à travers le moment d'inertie ;
- la longueur de la pièce (longueur réelle et du mode de fixation des extrémités) ;
- du matériau à travers son module d'élasticité

La contrainte critique d'Euler s'écrit alors :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{AL_c^2} = \frac{\pi^2 E}{\frac{L_c^2}{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{\pi^2 E}{\frac{L_c^2}{i_{min}^2}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Où : i_{min} : le rayon de giration minimal $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$

λ : l'élancement défini par : $\lambda = \frac{L_c}{i_{min}}$

La variation de la contrainte d'Euler en fonction de l'élancement et de type hyperbolique. Pour un acier S235 la limite élastique est de **235 MPa** ce qui donne un élancement de l'ordre **92**. Ainsi le flambage est de type élastique si l'élancement est supérieur à **100**.

Expérimentalement il a été montré que le flambement n'apparaît pas pour des élancements faibles de l'ordre de 20 dans ce cas la ruine est plutôt plastique et le comportement est celui des pièces courtes soumises à la compression.

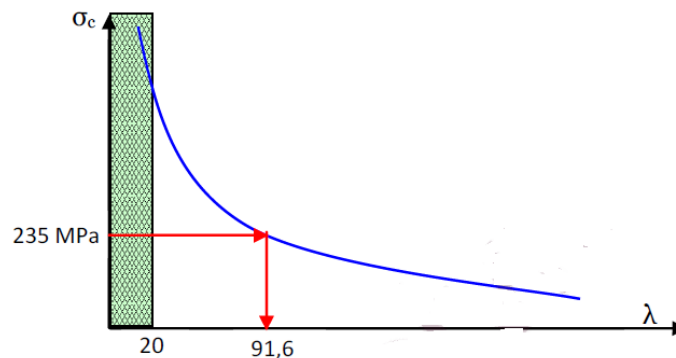


Figure (2.3) Variation de la contrainte d'Euler en fonction de l'élancement et de type hyperbolique

2.3 Aspects réglementaires du flambement simple

La théorie d'Euler, établie pour des structures idéales, est très insuffisante, en regard des imperfections de centrage, de rectitude, de verticalité et de la présence de contraintes résiduelles. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces imperfections ou leurs effets. Les règlements ont notamment défini un facteur d'imperfection α .

Le risque de flambement n'est à considérer que si : $\lambda > 0.2$ (ou λ de l'ordre de 20) ; dans ce cas, l'effort normal à l'ELU de compression doit satisfaire à :

$$N_{sd} \leq N_{c,Rd}$$

N_{sd} : l'effort normal de compression à l'ELU ;

$N_{c,Rd}$: L'effort résistant selon EC3 vis-à-vis du phénomène de flambement.

– **1er Cas** : $\bar{\lambda} \leq 0.2$ et section transversale de classe 1, 2 ou 3

Il n'y a ni risque de flambement, ni risque de voilement local.

$$N_{c,Rd} = A \frac{f_y}{\gamma_{m0}} \quad (\text{Résistance plastique de la section brute})$$

γ_{m0} : Facteur partiel de sécurité de matériau ($\gamma_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{si l'acier utilisé est agréé} \\ 1.1 & \text{si non} \end{cases}$)

– **2eme Cas** : $\bar{\lambda} \leq 0.2$ et section transversale de classe 4

Il n'y a pas de risque de flambement mais il y a risque de voilement local.

$$N_{c,Rd} = A_{eff} \frac{f_y}{\gamma_{m1}}$$

γ_{m1} : Facteur partiel de sécurité de résistance des éléments aux instabilités ($\gamma_{m1} = 1.1$)

– **3eme Cas** : $\bar{\lambda} > 0.2$ et section transversale de classe 1, 2 ou 3

Il n'y a pas de risque de voilement local mais il y a risque de flambement.

$$N_{c,Rd} = \chi A \frac{f_y}{\gamma_{m1}}$$

– **4eme Cas** : $\bar{\lambda} > 0.2$ et section transversale de classe 4

Il y a à la fois risque de voilement local et risque de flambement.

$$N_{c,Rd} = \chi \beta_A A_{eff} \frac{f_y}{\gamma_{m1}}$$

χ : Le coefficient de réduction pour le mode de flambement à considérer et fonction de l'élancement réduit $\bar{\lambda}$, (

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1$$

$$\Phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$$

On prendra la valeur minimale du coefficient de réduction : $\chi = \min(\chi_y, \chi_z, 1)$

L'élancement réduit $\bar{\lambda}$ est le rapport de l'élancement géométrique λ (calculé avec la section brute de l'élément) sur l'élancement élastique λ_l :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\beta_A \frac{A f_y}{N_{cr}}} = \frac{\lambda}{\lambda_l} \cdot \sqrt{\beta_A}$$

L'élancement critique « élastique » est calculé avec : $\lambda_l = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9 \cdot \varepsilon$

$\beta_A = 1$: Pour les sections transversales de classe 1, 2 ou 3 ;

$\beta_A = \frac{A_{eff}}{A}$: Pour les sections transversales de classe 4

α : Facteur d'imperfection donné dans le tableau 2.1

Tableau (2.2) Facteur d'imperfection α

Courbe de flambement	a	b	c	d
Facteur d'imperfection α	0.21	0.34	0.49	0.76

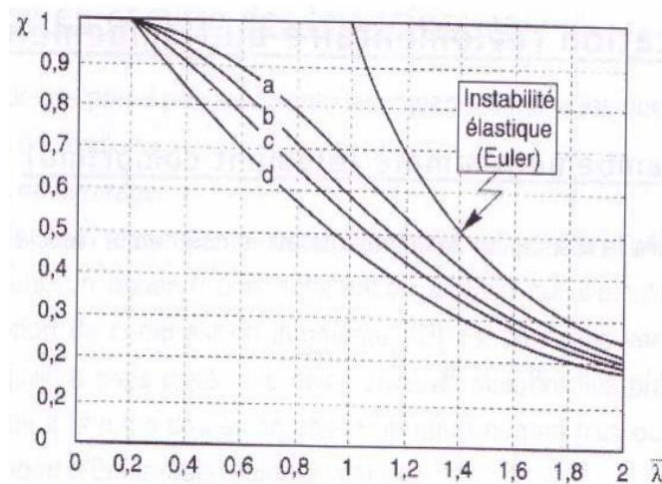


Figure (2.4) Courbes d'imperfections des profils dans le C.C.M.97

- **Choix de la courbe de flambement :**

- **Section en I laminée**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} > 1,2 \\ t_f \leq 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Axe } y - y \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{a} \\ \text{Axe } z - z \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{b} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} > 1,2 \\ 40 < t_f \leq 100 \text{ mm} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Axe } y - y \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{b} \\ \text{Axe } z - z \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{c} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} \leq 1,2 \\ t_f \leq 100 \text{ mm} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Axe } y - y \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{b} \\ \text{Axe } z - z \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{c} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h}{b} \leq 1,2 \\ t_f > 100 \text{ mm} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Axe } y - y \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{d} \\ \text{Axe } z - z \rightarrow \text{Courbe } \mathbf{d} \end{cases}$$

– **Sections Soudées :**

$$t_f \leq 40 \text{ mm} \rightarrow \begin{cases} \text{Axe } y - y \rightarrow \text{courbe } \mathbf{b} \\ \text{Axe } z - z \rightarrow \text{courbe } \mathbf{c} \end{cases}$$

$$t_f > 40 \text{ mm} \rightarrow \begin{cases} \text{Axe } y - y \rightarrow \text{courbe } \mathbf{c} \\ \text{Axe } z - z \rightarrow \text{courbe } \mathbf{d} \end{cases}$$

– **Sections en U, L, T et Sections Pleines :**

Quel que soit l'axe $\rightarrow$ on utilise la courbe de flambement **c**