RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Centre Universitaire Ahmed Zabana de Relizane

Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques

Cours de Transformations Intégrales dans les Espaces L^p avec Exercices Corrigés

Proposé par :
REZOUG NOREDDINE

Année universitaire 2019-2020

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié est une partie du programme officiel du module de Transformations intégrales dans les espaces L^p destiné principalement aux étudiants en troisième année licence mathématiques, mais peut éventuellement être utile pour les étudiants en licence physique et de la science et de la technologie.
D'après mon expérience, lors de l'enseignement de ce module durant quelques années, j'ai décidé de préparer ce polycopié qui contient toutes les notions fondamentales liées à ce module. Vu le programme proposé par le ministère, j'ai partagé ce modeste travail en trois chapitres ordonés comme suit

- Les espaces L^p.
- La transformation de Fourier.
- La transformation de Laplace.

Chaque chapitre se termine par quelques exercices corrigés permettant de contrôler l'acquisition des notions essentielles qui ont ete introduit.

Pour toute remarque, suggestion ou correction concernant ce document, merci de me contacter pour que je puisse modifier et corriger ce polycopié.

Chapitre 1

Les espaces L^p

Sommaire

L'intégration est l'un des sujets relatifs aux mesures les plus importants. Nous définissons cette notion et donnons les propriétés des intégrales. Ce chapitre est consacré principalement à l'étude de l'espace L^p des fonctions dont la valeur absolue est de puissance p-iéme intégrable et leurs propriétés. Les espaces L^p, jouent un rôle central dans de nombreuses questions de l'analyse mathématique. Pour tous ces résultats et la théorie des espaces L^p, on pourra consulter [1]-[8].

1.1 Rappels de quelques résultats d'intégration

1.1.1 Espace mesurable

Dans toute la suite Ω désignera un ensemble non vide. On notera par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de parties de Ω.

Définition 1.1.1. *Soient Ω un ensemble non vide et $\mathcal{M}$ une famille de partie de Ω (i.e $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$). On dit que $\mathcal{M}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω si et seulement si :*

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$,
2. *Si $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$, $(A^c = \Omega \backslash A)$ i.e $\mathcal{M}$ stable par passage au complémentaire,*
3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ alors*
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M},$$
i.e $\mathcal{M}$ stable par union dénombrable.

Le couple $(\Omega, \mathcal{M})$ est appelé espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les ensembles mesurables de Ω.

Exemples

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \{\phi, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

1.1.2 Exemple fondamental : la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$

Définition 1.1.2. *C'est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts ($]a, b[$, $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$ avec $-\infty < a < b < \infty$). On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont appelés ensembles boréliens de $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.1.1. *Les ensembles suivants sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
1. les intervalles fermés
2. les intervalles
3. les ouverts de $\mathbb{R}$
4. les fermés de $\mathbb{R}$
5. Q et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1.1.3 Mesure

Définition 1.1.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{M})$ un espace mesurable. On appelle mesure (ou mesure positive) sur Ω toute application*

$$\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$$

telle que,

1. $\mu(\phi) = 0$,
2. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite disjointe (i.e* $A_n \cap A_m = \phi$ *pour tout* $n \neq m$*), alors*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

Exemples

1. Soit $(\Omega, \mathcal{M})$ un espace mesurable avec $\Omega \neq \emptyset$, on définit la mesure de Dirac par :

$$\begin{array}{rccl} \delta: & \mathcal{M} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & A & \mapsto & \delta(A) = 1_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

2. On définit la mesure de comptage sur $(\Omega, P(\Omega))$ par :

$$\begin{array}{rccl} \mu: & P(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & A & \mapsto & \mu(A) = \left\{ \begin{array}{cc} card(A) & \text{si } A \text{ fini,} \\ \infty & \text{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

Passons au théorème d'existence de la mesure de Lebesgue.

1.1.4 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.1.1. *Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, telle que $\lambda(]a, b]) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $-\infty < a < b < +\infty$.*

Proposition 1.1.2. *La mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a les propriétés suivantes.*

(i) $\lambda(] - \infty, a]) = \lambda(] - \infty, a[) = \lambda([b, ; +\infty[) = \lambda(]b, +\infty[) = +\infty$

(ii) $\lambda(]a, b]) = \lambda(]a, b[) = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = b - a.$

(iii) $\lambda(\{a\}) = 0.$

1.1.5 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 1.1.2. *Il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ telle que pour tout pavé $\prod_{i=1}^n]a_i, b_i]$ (avec $a_i < b_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$),*

$$\mu\left(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^n (a_i - b_i). \tag{1.1}$$

On l'appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et on la note λ.

Proposition 1.1.3. *La mesure de Lebesgue λ_n sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ a les propriétés suivantes.*

(i) λ_n est σ-finie.

(ii) λ_n est invariante par translations.

(iii) $\lambda_n$est invariante par les « symétries » du type s ? définies comme les applications linéaires transformant la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ en $(\varepsilon e_1, \cdots, \varepsilon e_n)$, où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

(iv) Si h est l'homothétie $x \to cx$ dans $\mathbb{R}^n$, pour tout borélien B,$\lambda_n h(B) = |c|^n \lambda_n(B)$.

(v) λ_n ne charge pas les points : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_n(x) = 0$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$, est fini ou dénombrable, $\lambda_n(A) = 0$.

(vi) $\lambda_n\left(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i]\right) = \lambda_n\left(\prod_{i=1}^n]a_i, b_i]\right)$ et cette égalité implique bien sûr, l'égalité des mesures des 4^n pavés obtenus en jouant sur l'ouverture ou la fermeture des extrémités a_i, b_i des intervalles.

1.1.6 Fonctions mesurable

Définition 1.1.4. *Soient $(\Omega_1, \mathcal{M}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurable et f une application de Ω_1 dans Ω. On dit que f est mesurable si*

$$\forall A \in \mathcal{M}_2, f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_1.$$

Lorsque Ω_1 et Ω_1 sont des espaces topologiques munis de leur tribus boréliennes, on dit que f est borélienne.

Exemple 1.
Toute fonction constante est mesurable, car tout l'espace apparient à toute tribu.

Applications à valeurs réelles.

Corollaire 1.1.1. *$f : (X, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \forall a < b \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]a, b[) \in A \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(] - \infty, a]) \in \mathcal{M}$.*
2. $f : (X, A) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}$.

Corollaire 1.1.2. *Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ continue. Alors f est mesurable.*

Preuve : 3. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ car f est continue donc $f^{-1}(O) \in B(\mathbb{R})$ et f est mesurable.
Exemple 1.
Soit

$$\begin{array}{rccl} f(x): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si}\, x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si}\, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{array}$$

f est non continue mais mesurable.
Preuve :
1. f est non continue évidente.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$
• Si $]a, +\infty[\cap \{0,1\} = \phi \Rightarrow f^{-1}(]a, +\infty[) = \phi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
• Si $]a, +\infty[\cap \{0,1\} \neq \phi \Rightarrow f^{-1}(]a, +\infty[) \in \{\phi, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \mathbb{R}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases} \mathbb{Q} & si \quad x = \{1\}, \\ \mathbb{R} & si \quad x = \{0,1\}. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on a bien $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puisque les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, cela prouve que f est mesurable.
Exemple 2.
Soient $(E, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$\forall x \in E : f(x) = a = cte.$$

Alors f est mesurable.
Preuve :
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, distingue deux cas :
(*1*) si $a \in A : f^{-1}(A) = E \in \mathcal{M}$,
(*2*) si $a \notin A : f^{-1}(A) = \phi \in \mathcal{M}$.
En pratique, il n'est pas toujours évident de vérifier qu'une fonction est mesurable. Toutefois, il peut être utile de se baser sur les propriétés suivantes des fonctions mesurables :

Proposition 1.1.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{M})$ un espace mesurable, $f, g : (X, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ des fonctions mesurables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda$, λf, $f + g$, fg, $\inf(f, g)$, $\sup(f, g)$ et $|f|$ sont des fonctions mesurables. Si de plus, f ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ est mesurable.*

Proposition 1.1.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{M})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.*
1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(f_n)$ et $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(f_n)$ sont mesurables.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup(f_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf(f_n)$ sont mesurables.
3. Si $\forall x \in X$, $\lim\limits_{n\in+\infty} f_n(x) = f(x)$ alors f est mesurable.

Théorème 1.1.3. *Soient $(\Omega_1, \mathcal{M}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{M}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{M}_3)$ des espaces mesurables. Soient $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$-mesurable, $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ $(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3)$-mesurable. Alors gof est $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3)$-mesurable.*

1.2 Intégration

Les fonctions étagées sont les fonctions les plus simples a partir desquelles on pourra construire l'intégrale abstraite par approximation.

1.2.1 Fonctions étagées

Définition 1.2.1. *Pour l'espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{M})$, *on dit qu'une fonction* $\Omega \to \mathbb{R}$ *est étagée si elle est mesurable et si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On note* $\mathcal{E}^+$ *l'ensemble des fonctions étagées* > 0.

Remarque 1.2.1. *Toute fonction étagée s'écrit de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \tag{1.2}$$

oú les α_i *sont des valeurs prisee par* f, *les ensembles* A_i *forment une partition mesurable de* Ω *et* $\mathbf{1}_{A_i}$ *désigne la fonction carctéristique* A_i.

Exemple. Les fonctions suivantes sont des fonctions étagées

$$f = 1_{[1,2]} + 2\ 1_{[3,4]}, \quad f = 1_{]-1,2]} - 3\ 1_{[3,+\infty[}.$$

Remarque 1.2.2. *Si* $(\Omega, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *et si les* A_i *sont des intervalles bornés de* $\mathbb{R}$, *on retrouve la notion (plus faible) de fonction en escalier. Une fonction en escalier est donc étagée alors qu'une fonciton étagée n'est donc pas forcément en escalier.*

Exemple.
1) La fonction constante 1 sur $\mathbb{R}$ n'est pas en escalier mais est étagée.
2) La fonction caractéristique des rationnels dans l'intervalle [0, 1] est étagée mais pas en escalier.
Nous allons utiliser ces fonctions pour définir l'intégrale des fonctions μ-mesurables. Les fonctions étagéees sont en effet des fonctions auxquelles on associe facilement une intégrale, et le cas géneral s'obtiendra en prolongeant la construction par passage à la limite

Théorème 1.2.1. ***(Théorèeme d'approximation)***. *Soit* $f : (\Omega, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *Alors il existe une suite croissante de fonctions mesurables étagées qui converge simplement vers* f, $\forall x \in \Omega \lim\limits_{x \in +\infty} \phi_n(x) = f(x)$. *De plus, si* f *est bornée sur* Ω, *la convergence est uniforme sur* Ω.

Définition 1.2.2. *Soit* $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ *une fonction étagée de* Ω *dans* $\mathbb{R}^+$. *On appelle intégrale de* f *la quantité*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i). \tag{1.3}$$

$\int_\Omega f d\mu$ est dite intégrale de f sur Ω par rapport a la mesure μ ou plus simplement intégrale de f s'il n'y a pas de confusion possible.
Exemple Si f est une fonction constante, alors sa décomposition canonique s'écrit $f = c1_\Omega$, avec $c \in \mathbb{R}$. La formule (1.3) nous donne alors

$$\int_\Omega c d\mu = c\mu(E).$$

Remarque 1.2.3. *On a*

(***a***) $\int_\Omega 1 d\mu = \mu(\Omega).$

(***b***) $\int_\Omega 0 d\mu = 0\mu(\Omega) = \begin{cases} 0 \times \infty & si \quad \mu(\Omega) = \infty, \\ 0 \times \alpha & si \quad \mu(\Omega) = \alpha. \in \mathbb{R}^+ \end{cases} = 0.$

1.2.2 Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée positive

Proposition 1.2.1. *L'intéegrale sur $\mathcal{E}^+$ est homogène, additive et croissante : pour tous $f, g \in \mathcal{E}^+$, $c \in \mathbb{R}^+$, ona*

(***i***) $\int_\Omega c f d\mu = c \int_\Omega f d\mu.$

(***ii***) $\int_\Omega f + g d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_0^t g d\mu.$

(***iii***) *Si* $f \leq g$, *alors* $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$

1.2.3 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On désigne par $\mathfrak{M}^+(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables positives d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$.

Définition 1.2.3. *Soit f une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}^+$. On appelle intégrale de f sur l'ensemble mesurable Ω la quantité :*

$$\int_\Omega f d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \phi d\mu; \phi \textit{ fonction étagée à valeurs dans } \mathbb{R}^+, \phi \leq f \right\}$$

Lorsque la fonction f est étagée elle même, la définition coïncide avec la définition de la section.

Définition 1.2.4. *Si f est une fonction mesurable positive d'intégrale finie, on dit qu'elle est intégrable, ou sommable.*

Théorème 1.2.2. *(Beppo-Lévi ou convergence monotone)*
Soit $(f_n)_n$ une suite croisante d'élements de $\mathfrak{M}^+(\Omega)$, $0 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots$. Alors $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ et

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

On rappelle que toute fonction mesurable positive peut étre approchée par une suite croissante de fonctions étagées (lemme fondamental d'approximation). En combinant ce lemme avec le Théoreme de Beppo-Lévi ou convergence monotone, on voit que les propriétés de l'intégrale pour les fonctions étagées passent à la limite et donnent lieu au propriétés correspondantes pour les fonctions mesurables positives.

Proposition 1.2.2. *L'intéegrale sur $\mathfrak{M}^+(\Omega)$ est homogène, additive et croissante. Pour tout f , $g \in \mathfrak{M}^+(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}^+$, on a*

(***i***) $\displaystyle\int_\Omega cf d\mu = c \int_\Omega f d\mu.$

(***ii***) $\displaystyle\int_\Omega f + g d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$

(***iii***) *Si $f \leq g$, alors* $\displaystyle\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu.$

Preuve :
C'est une conséquence facile de la définition de l'intégrale et du Théoréme de convergence monotone.

1.2.4 Intégrale des fonctions mesurables de signe quelconque

Pour une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$, l'intégrale est définie en utilisant les parties positives et négatives de f. Ainsi, on pose

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ et } f^-(x) = -\min(f(x), 0) \ \forall x \in \Omega.$$

Les deux fonctions f^+ et f^- sont mesurables et positives, on peut donc définir leur intégrale par

Définition 1.2.5. *L'intégrale de f est par définition le nombre*

$$\int_0^t f d\mu = \int_0^t f^+ d\mu - \int_0^t f^- d\mu$$

.

1.2.5 Lien avec l'intégrale de Riemann

Théorème 1.2.3. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle compact $[a, b]$. Alors*

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

Théorème 1.2.4. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle ouvert $[a, b[$ (b peut valoir $+\infty$). Alors f est intégrable sur $[a, b[$ par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si l'intégrale impropre $\int_a^b |f(x)| dxdt$ est convergente. Dans ce cas*

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

Voici quelques propriétés faisant intervenir des ensembles négligeables qui nous serons utiles plus tard.

1.2.6 Ensembles négligeables

Définition 1.2.6. *Une partie $A \subset \Omega$ est dite négligeable s'il existe $B \in \mathcal{M}$ tel que :*

$$A \subset B, \text{ et } \mu(B) = 0.$$

Si on veut préciser la mesure, on dit que A est μ-négligeable.

Proposition 1.2.3. *Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable. La réunion d'une famille dénombrable de parties négligeables est négligeable.*

Exemple 1.2.1. *(i) Dans $(\Omega; \mathcal{M}; \delta_a)$ tel que a soit mesurable, la partie A est δ_a-négligeable ssi $a \in A$.*
(ii) Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ tout ensemble dénombrable est négligeable.

Définition 1.2.7. *On dit que f est définie μ-p.p. sur Ω si elle est définie en dehors d'une partie mesurable de mesure nulle. i.e., s'il existe $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) = 0$ est tel que f est définie sur $E \backslash A$.*
Deux parties A et B de Ω sont dites égales μ .p.p. si $A \backslash B$ et $B \backslash A$ sont négligeables. On écrit $A = B$ μ. p.p.
On dit que deux fonctions f et g sont égales μ. p.p. si $f \neq g$ est négligeable. On écrit $f = g$ μ .p.p.
On dit que $f \leq g$ μ-p.p. si $x \in \Omega : f(x) < g(x)$ est μ-négligeable
On dit que f est nulle presque partout ($f = 0$ μ-p.p) si l'ensemble : $x \in \Omega$ tel que $f(x) \neq 0$. est négligeable.

Définition 1.2.8. ***(Convergence μ-p.p.)**. Une suite (f_n) est dite convergente vers f μ-presque partout (μ-p.p.), s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \Omega \backslash A$.*

1.3 Définitions

1.3.1 Espace $\mathcal{L}^p$, $p \in [1, +\infty[$

Les résultats sont formulés pour un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ quelconque, mais nous sommes principalement intéressés par le cas où Ω est une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ (munie de la tribu des boréliens) et la mesure de Lebesgue.

Définition 1.3.1. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \text{ mesurable et } \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

Pour $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, *on note :*

$$||f||_p = ||f||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

En général l'application $\mathcal{L}^p(\Omega) \in f \to ||f||_p$ *ne définit pas une norme sur* $\mathcal{L}^p(\Omega)$, *mais seulement une semi-norme.*

Définition 1.3.2. *On dit qu'une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une fonction essentiellement bornée s'il existe un réel* $C \geq 0$ *tel que*

$$|f| \leq C \quad \mu - \text{ p.p. sur } \Omega.$$

On note

$$\sup ess f = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ / |f| \leq C \quad \mu - p.p\}$$

.

Définition 1.3.3. *On appelle espace* $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ *l'éspace des fonctions essentiellement bornées sur* Ω *:*

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \textit{mesurable et } \exists C > 0 / |f| \leq C \quad \mu - p.p\}$$

on note :

$$||f||_\infty = \sup ess f.$$

Proposition 1.3.1. $\mathcal{L}^1(\Omega)$*est l'ensemble des fonctions intégrables.*

Proposition 1.3.2. *Pour tout* $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *est un espace vectoriel.*

Preuve : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^p$.

1) On a : $\displaystyle\int_\Omega |\ \alpha f\ |^p \mathrm{d}\mu = |\ \alpha\ |^p \int_\Omega |\ \ f\ |^p \mathrm{d}\mu < +\infty$,
donc $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

2) On remarque que pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \\ &\leq 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \\ &\leq 2^p \left(|f|^p, |g|^p\right), \end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu \leq 2^p \Big(\int_\Omega |f|^p d\mu + \int_\Omega |g|^p d\mu\Big) < +\infty,$$

et on a bien $(f+g) \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.
Finallement, on déduit que $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.3.1. *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une semi norme sur* $\mathcal{L}^p(\mu)$. *On remarque que, si* $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, *on a* $|f\|_p = 0 \iff f = 0$ *p. p.*

1.3.2 Espace L^p, $p \in [1, +\infty[$

Définition 1.3.4. *On considére la relation suivante sur l'espace* $\mathcal{L}^p(\Omega)$:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f = g\mu - \text{ p.p. sur } E$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Définition 1.3.5. *L'espace* $L^p(\Omega)$ *est le quotient de espace* $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *par cette relation d'équivalence*

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) \backslash \sim .$$

Remarque 1.3.2. *Un élément de* $L^p(\Omega)$, *est donc une classe d'équivalence de fonctions de* $L^p(\Omega)$, *il s'agit de toutes les fonctions qui coïncident presque partout avec une fonction donnée. Nous avons une projection de* $\mathcal{L}^p(\Omega)$ *sur* $L^p(\Omega)$ *qui à une fonction associe sa classe. Pour éviter de surcharger les notations, nous noterons de la même façon une fonction et sa classe. Les opérations usuelles passent au quotient et définissent des opérations sur* $L^p(\Omega)$. *Si* $f_1 \sim f_2$ *et* $g_1 \sim g_2$, *alors* $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$, $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$, *etc. L'application* $f \to ||f||p$ *passe aussi au quotient : si* $f_1 \sim f_2$ *alors* $||f_1||_p = ||f_2||_p$. *Nous allons voir que cette application définit une norme sur* $L^p(\Omega)$. *Dans le quotient, l'égalitée* $||f||_p = 0$ *ne se produit que si la classe de* f *est la classe de la fonction nulle.*

Remarque 1.3.3. *Nous munissons* $\mathbb{R}^n$ *de la mesure de Lebesgue. Soient* f , g, f_1, g_1 : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *R, avec* $f \sim f_1$ *et* $g \sim g_1$. *Soit* $x \in \mathbb{R}^n$. *Alors* $h \sim h_1$, *où*

$$h(y) = f(x-y)g(y), \quad h_1(y) = f_1(x-y)g_1(y), \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.3.6. *L'exposant conjugué de* p *est l'unique nombre réel* q *satisfaisant :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Autrement dit :

$$q = \frac{p}{p-1} \quad \text{et} \;\; (p-1)(q-1) = 1.$$

ce qui montre que :

$$p \in]1, +\infty[\quad \Longleftrightarrow \quad q \in]1, +\infty[.$$

Bien entendu ici, on convient que :

$$\frac{1}{\infty} = 0 \;\; \text{et que :} \;\; \frac{1}{0} = \infty,$$

d'où

$$p = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad q = +\infty.$$

Remarque 1.3.4. *L'exposant* $p = 2$, *et seulement lui, est auto-conjugué :*

$$p = q = 2.$$

On notera dans toute la suite q le conjugué de p.

Lemme 1.3.1. *(Inégalité de Young)*

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et p, q $\in [1, +\infty[$. Alors

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Preuve :
Si $a = 0$ ou $b = 0$ c'est facile, donc on peut supposer que $a, b > 0$.
La fonction $t \mapsto \exp(t)$ est une fonction convexe, ce qui veut dire que pour tous x, y et pour tout $t \in [0, 1]$ nous avons

$$\exp(tx + (1-t)y) \leq t\exp(x) + (1-t)\exp(y).$$

En particulier :

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln(ab)) \\ &= \exp\left(\frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.2. *(Inégalité de Hölder) Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |fg| d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.4}$$

Preuve. L'inégalité de Young donne Pour montrer (1.4), on distingue 3 cas :
Cas 1. Si $p = 1$ et $q = \infty$ nous avons

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_\Omega |fg| d\mu = \int_\Omega |f| \|g\|_\infty d\mu \\ &\leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f| d\mu \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Cas 2. Si $p = \infty$, $q = 1$ est similaire.
Cas 3. Si $p \in]0, +\infty[$,

(**i**) Si $\|f\|_p = 0$ où $\|g\|_p = 0$, alors $f = 0$ p.p sur Ω ou $g = 0$ p.p sur Ω. On en déduit $fg = 0$ p.p, donc $\|fg\|_p = 0$ et enfin, l'inégalité de Hölder se réduit à l'inégalité triviale $0 \leq 0$ donc (1.4) est vraie.

Nous pouvons donc supposer que

$$\|f\|_p \neq 0 \quad \text{et} \quad \|g\|_p \neq 0.$$

(ii) Si $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_p = 1$, on a alors, avec inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_\Omega |fg| d\mu = \int_\Omega |f||g| d\mu \\ &\leq \frac{1}{p}\|f\|_p + \frac{1}{q}\|g\|_q = 1 = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

(iii) Si $\|f\|_p > 1$ et $\|g\|_p > 1$, Définissons les fonctions suivantes : $f_1 = \dfrac{|f|}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \dfrac{|g|}{\|g\|_q}$, de sorte que $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_p = 1$.
Le cas (ii) donne alors

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \|f\|_p \|g\|_q \|\frac{f}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_p}\|_1 \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q .1 \\ &= \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Corollaire 1.3.1. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Lorsque $p = 2$, on a $q = 2$ et línégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \Big(\int_\Omega |f|^2 d\mu \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |g|^2 d\mu \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1.3.3. *(Inégalité de Minkowisky) Soient $p \in [1, +\infty]$, $f, g \in L^p(\Omega)$. Alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.5}$$

Preuve :

1. Comme $|f + g| \leq |f| + |g|$, alors le résultat est évident pour $p = 1$ et $p = +\infty$.

2. On suppose donc que $p \in]1, +\infty[$: et que $f, g \in L^p(\Omega)$. La fonction $t \to t^p$ étant convexe sur $[0, \infty[$, on a donc pour tous $a, b > 0$:

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p,$$

donc, on en déduit immédiatement que

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^P).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq 2^{p-1} \int_\Omega |f + g|^p d\mu \\ &\leq 2^{p-1} \int_\Omega (|f| + |g|)^p d\mu \\ &\leq 2^{p-1} \int_\Omega (|f|^p + |g|^p) d\mu \\ &\leq 2^{p-1} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

donc, on en déduit que $f+g \in L^p(\Omega)$.
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq |f+g||f+g|^{p-1} \\ &\leq (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \\ &\leq |f||f+g|^{p-1}+|g||f+g|^{p-1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g|^p d\mu \\ &\leq \||f||f+g|^{p-1}\|_1 + \||g||f+g|^{p-1}\|_1 \\ &\leq \|f\|_p\||f+g|^p\|_q + \|g\|_p\||f+g|^p\|_q \\ &\leq (\|f\|_p+\|g\|_p)\||f+g|^p\|_q. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Puisque $p-1=\frac{p}{q}$, on a alors

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^{p-1} &= \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |f+g|^{\frac{p}{q}q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_p^{p-1} \\ &= \||f+g|^{p-1}\|_p^{p-1}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

De (1.6) et (1.7), on en déduit que

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}.$$

D'où l'on dédui (1.5).

Proposition 1.3.3. $L^p(\Omega)$ *est un espace vectoriel normé.*

Preuve :

1) L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel, En effet,

   a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^p$. On a $\int_\Omega |\alpha f|^p \mathrm{d}\mu = |\alpha|^p \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty$, donc $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

   b) D'aprés l'inégalité de Minkowisky, on a : $f+g \in L^p$.
   On conclut que $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel.

2)) L'application $\|\cdot\|_p : f \to \|f\|_p$, est une norme sur $L^p(\Omega)$, En effet,

Λ_1) $\|f\|_p \geq 0$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$.

Λ_2) $\|\alpha f\|_p = \alpha\|f\|_p$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λ_3) Dáprés línégalité de Minkowski on a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$ pour tous $f, g \in L^p(\Omega)$.

Λ_4) $\|f\|_p = 0$ implique que $f = 0$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$.

Théorème 1.3.1. *(Théorème de convergence monotone de Beppo Levi)*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu < \infty.$$

Alors f_n converge p.p. sur vers une limite finie f, de plus $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\|f_n - f\|_1 \to 0$$

1.3.3 Espace L^∞

Définition 1.3.7. ***(fonction essentiellement bornée)***
On dit qu'une fonction f est essentiellement borne sur Ω si il existe un réel positif c tel que

$$\mu(\{x \in \Omega / |f(x)| \geq c\}) = 0.$$

Exemple
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

f n'est pas bornée mais elle est essentiellement bornée ($\mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$).

Définition 1.3.8. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré*

1. *L'espace vectoriel $L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est le quotient de $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ par la relation d'équivalence égale paresque partout.*
2. *Soit $F \in L^\infty$, on pose $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ avec $f \in F$, de sorte que*

$$F = \{g \in L^\infty, g = f \ presque\ partout\}$$

Théorème 1.3.2. *$L^\infty(\Omega)$ Muni de la norme définie par :*

$$\|f\|_\infty = inf\{C \geq 0 / \mu(\{x \in \Omega / |f(x)| \geq C\}) = 0\},$$

est un espace de Banach. De plus si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a pour presque tout

$$x \in \Omega, \quad |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Lemme 1.3.4. *(de Fatou) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que*

$\Lambda_1)$ *pour chaque n, $f_n \geq 0$ μ-p.p. sur Ω,*

$\Lambda_1)$ $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \displaystyle\int_\Omega f_n d\mu < \infty.$

on pose $f = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \displaystyle\int_\Omega f_n d\mu$. Alors $f \in L^1(\Omega)$et

$$\int_\Omega f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Remarque 1.3.5. *Un Lemme analogue est valable pour les lim sup :*

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Théorème 1.3.3. *(Convergence dominée de Lebesgue) Soit une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$, On suppose que*

(i_1) *$f_n \to f$ p.p sur Ω,*

(i_2) *il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$ μ p. p sur Ω, Alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\|f_n - f\|_1 \to 0$$

En particulier,

$$\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu.$$

Preuve :

En appliquant le Lemme de Fatou, on obtient

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf |f_n| d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega |f_n| d\mu \leq \int_\Omega |g| d\mu < +\infty.$$

Donc $f \in L^1(\Omega)$ Comme $|f - f_n| \leq 2g$, on a $2g - |f - f_n| \geq 0$ et $\displaystyle\int \lim_{n\to\infty} 2g - |f - f_n| = 2g$. Par le Lemme de Fatou, il vient

$$\begin{aligned}
\int 2g d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} \inf(2g - |f - f_n|) d\mu \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \inf \int (2g - |f - f_n|) d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf(\int 2g d\mu - \int |f - f_n|) d\mu \\
&= \int 2g d\mu - \lim_{n\to\infty} \sup(\int |f - f_n| d\mu).
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\int 2g d\mu < \infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup \int |f - f_n| d\mu \leq 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$, cést-à-dire

$$\|f_n - f\|_1 \to 0.$$

On remarque que $|\int f_n d\mu - \int f d\mu| \leq \int |f_n - f| d\mu$,
donc

$$\int f_n d\mu - \int f d\mu \to 0.$$

Théorème 1.3.4. *(Convergence dominée dans* L^p*) Soit* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* $1 \leq p < \infty$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $L^p(\Omega)$, *telle que*

(i_1) $f_n \to f$ *p.p sur* Ω,

(i_2) *il existe* $g \in L^p(\Omega)$ *telle que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g(x)$ μ *p. p sur* Ω, *alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Remarque 1.3.6. *La notion de convergence simple n'a pas de sens dans* L^p.

Théorème 1.3.5. *(Théorème de Riesz-Fisher) L'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Preuve :
Cas 1. Si $p = \infty$, c'est clair.

Cas 1. Si $p \in [1, \infty[$.
Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, Par récurrence, on construit une sous-suite extraite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
pour tout $k \geq 0$, il existe un $n_{k+1} > n_k$ tel que $n; m \geq n_k$ telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

On pose

$$g_n = \sum_{i=0}^{i} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

D'aprés l'inégalité de Minkowisky, on a :

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$$

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_p &= \sum_{k=0}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|^p \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|^p \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} (2^{-i})^p \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que g_k converge p.p. sur Ω vers une limite finie noté g avec $g \in L^p(\Omega)$.
Dáprès le Lemme de Fatou, on en déduit que $\|g\|_p \leq 2$.

Ainsi, la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions intégrables, positives et telles que et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |g|^p d\mu \leq 2^p < +\infty.$$

Par le théorème de convergence monotone 2.4, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_k < \infty$ p.p. sur Ω. Plus précisément, il existe E tel que $\mu(E) = 0$. et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) < \infty \quad p.p \text{ sur } \Omega\backslash E.$$

D'autre part, on a évidemment :

$$f_{n_k})_n = f_{n_0} + \sum_{k=0}^{n}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

On définit

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n & \text{si} \quad x \in F, \\ 0 & \text{s}i \quad x \notin F. \end{cases}$$

Puisque f_{n_k} converge vers f p.p. sur Ω, et que $|f_{n_k}| \leq |f_{n_0}| + g$ p.p. sur Ω. Le Corollaire 2.2 de convergence dominée dans $L^p(\Omega)$ montre que $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_p \to 0$.
Enfin, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de Cauchy, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

En conclusion $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Corollaire 1.3.2. $L^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :*

$$< f, g >= \int_\Omega fg d\mu, \qquad (\textit{dans le cas réel})$$

et

$$< f, g >= \int_\Omega f\overline{g} d\mu, \qquad (\textit{dans le cas complexe}).$$

1.4 Propriétés des espaces L^p

1.4.1 Densité

Définition 1.4.1. *On définit*

$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0,\ x \in \Omega\backslash K;\ K \subset \Omega \quad \textit{est un compact}\}.$$

l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact.

*

Proposition 1.4.1. *Si p appartient à $[1, \infty[$, alors l'espace des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Preuve : Il suffit de montrer que toute fonction $f \in L^p$ est limite de fonctions étagées intégrables. On suppose dans un premier temps que $f \geq 0$. Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui converge en croissant vers f. La suite $(f_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors aussi en croissant vers f^p. On en déduit que f_n^p appartient a L^p pour tout n. De plus, on a

$$|f_n - f|^p \leq f^p.$$

Donc, par convergence dominée

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Ce qui assure la convergence dans L^p de f_n vers f. Quand f est quelconque, on sépare partie positive et négative, on peut donc écrire

$$f = g - h \text{ ou } g, h \text{ sont des fonctions positive.}$$

Il existe alors deux suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui converge en croissant vers g et h. On pose

$$t_n = g_n - h_n.$$

Alors $t_n \in \mathcal{E}(\Omega)$ et t_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.4.1. *Soit p un élément de $[1, +\infty[$, l'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. C'est-à-dire que :*

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}) \text{ tel que } \|f - \varphi\|_{L^p} \leq \varepsilon,$$

ou encore, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

Preuve : Puisque $\mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, il suffit de montrer que pour toutes fonction $s \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $g \in C_c(\Omega)$ tel que $\|s - g\|_p < \varepsilon$. Puisque s est étagée elle est bornée, et par définition de $\mathcal{E}(\Omega)$ on a $\mu\{x; s(x) \neq 0) < \infty\}$. On peut donc appliquer le théorème de Lusin, on en déduit qu'il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $\|g\|_p \leq \|s\|_p$ et

$$\mu(\{x; s(x) \neq g(s))\}) < \left(\frac{2\varepsilon}{\|g\|_p}\right)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |s - g|^p d\mu &= \int_{\{x;s(x)\neq g(s)\}} |s - g|^p d\mu \\
&\leq \mu(\{x; s(x) \neq g(s) \neq 0)\})\|s - g\|_\infty^p \\
&\leq \left(\frac{2\varepsilon}{\|g\|_p}\right)^2 (\|s\|_\infty^p + \|g\|_\infty^p) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Théorème 1.4.2. *$L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème 1.4.3. *$\forall p \in [1, +\infty[$; $L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

1.4.2 Séparabilité

Définition 1.4.2. *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $F \subset E$ dénombrable et dense dans E.*

Exemple
$\mathbb{R}^n$ (muni de sa topologie d'evn de dimension finie) est séparable, car il contient $\mathbb{Q}^n$ qui est dénombrable et dense. Tout espace métrique précompact est séparable : en effet, pour tout $m \geq 1$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon 2^m ; il suffit de prendre comme partie dénombrable dense lénsemble des centres de toutes ces boules pour m décrivant $\mathbb{N}^*$. Cette partie est dénombrable car c'est une réunion dénombrable d'ensembles finis ; de plus, pour tout $m \geq 1$, tout point de l'espace précompact considéré est ‘a une distance au plus 2^{-m} d'un de ces centres : cette partie est donc dense.

Théorème 1.4.4. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable.*

On désigne par $(R_i)_{i \in I}$ la famille dénombrable des pavés R de la forme

$$R = \prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[$$

avec

$$a_k, b_k \in \mathbb{Q} \text{ pour tout} k = 1 + 2 + \cdots + N \text{ et } R \subset \Omega.$$

On désigne par $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions 1_{R_i} (la fonction indicatrice de R_i), $i \in I$ i.e

$$\mathcal{X}(\Omega) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} l_j 1_{[a_j, b_j]} \right\}$$

avec

$$l_j \in \mathbb{Q}, a_j, b_j \in \mathbb{Q} \text{ pour tout} j = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$$

de sorte que $\mathcal{X}(\Omega)$ est dénombrable. D'aprés le lemme 1.6.2, il suffit de montrer que $\mathcal{X}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^{n)}$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Par densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n)}$, il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ telle que

$$|f - f_1|_p < \varepsilon.$$

Considérons Ω_0 un ouvert borné tel que $supp(f_1) \subset \Omega_0 \subset \Omega$. Comme $f_1 \in C_c(\Omega_0)$, en utilisant l'uniforme continuité de f_1, on construit aisément une fonction $f_2 \in E$ telle que $supp(f_2) \subset \Omega_0$ et

$$|f_2 - f_1| < \frac{\varepsilon}{|\Omega_0|}.$$

pour presque tout x sur Ω_0 (on commence par recouvrir $supp(f_1)$ par un nombre fini de pavés R_i sur lesquels l'oscillation de f_1 est inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{|\Omega_0|^{\frac{1}{p}}}$. Il en résulte que $|f_2 - f_1|_p < \varepsilon$ et donc $|f - f_1|_p < \varepsilon$. Ceci achéve la preuve de la densité de $\mathcal{E}(\Omega)$ et du théoréme.

Lemme 1.4.1. *Soit E un epace de Banach. On suppose qu'il existe une fammille libre $(O_i)_{i \in I}$ telles que*

1. *O_i est un ouvert non vide de E pour tout $i \in I$,*
2. *$O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$,*
3. *I n'est pas dénombrable.*

Alors Ω n'est pas séparable.

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans Ω.
Pour chaque $i \in I$, $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. On choisit n_i tels que $u_{n_i} \in O_i$. On a $n_i = n_j \Rightarrow u_{n_i} = u_{n_j} \in O_i \cap O_j$ donc $i = j$. On a aussi l'application $i \to n_i$ est injective ; par suite I est dénombrable ce qui contre de dire que I n'est pas dénombrable.

Théorème 1.4.5. *L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Pour tout $a \in \Omega$, fixons $r_a < dist(a, \Omega)$. On pose $u_a = 1_{B(a,r_a)}$.

$$O_a = \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f - u_a\|_\infty < 1/2\}.$$

On vérifie facilement que la famille $(O_a)_{a\in\Omega}$ satisfait les hypothèses du lemme 1.4.1. On conclut donc que $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

1.4.3 Réflexivité

Définition 1.4.3. *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''. L'espace E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Théorème 1.4.6. ***(Inégalité de clarkson)*** *Soit $f, g \in L^p(\Omega)$ on a*

(H_1) *Si $p \in [2, \infty[$, on a*

$$\|\frac{f+g}{2}\|^p_{L^p} + \|\frac{f-g}{2}\|^p_{L^p} \leq \frac{1}{2}(\|f\|^p_{L^p} + \|g\|^p_{L^p}). \tag{1.8}$$

(H_2) *Si $p \in]1, 2]$, on a*

$$\|\frac{f+g}{2}\|^q_p + \|\frac{f-g}{2}\|^q_p \leq \frac{1}{2}(\|f\|^p_{L^p} + \|g\|^p_{L^p})^{q-1}.$$

Théorème 1.4.7. *(Théorème de Milman-Pettis)*
Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Preuve. Voir [3].

Théorème 1.4.8. *L'éspace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour tout $p \in]1, +\infty[$.*

Preuve :
Pour $p \in [2; +\infty[$.soientt $\varepsilon > 0$, on suppose que $\|f + g\|_p) > \varepsilon$, $\|f\|_p \leq 1$ et $\|g\|_p \leq 1$. En utilisant (1.8), on obtient que

$$\|\frac{f+g}{2}\|^p_p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \tag{1.9}$$

et donc

$$\Big|\frac{f+g}{2}\Big|_p \leq 1-\delta, \tag{1.10}$$

avec,

$$\delta = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi L^p est uniformément convexe et donc réflexif grace au théorème 1.8.4.
Pour $p \in]1;2[$, on déduit de l'inégalité (14) que

$$\|\frac{f+g}{2}\|_p^q \leq 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q. \tag{1.11}$$

et donc

$$\Big|\frac{f+g}{2}\Big|_p \leq 1-\delta, \tag{1.12}$$

avec $\delta = 1-\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^q$.
Alors $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, on en déduit que $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $p \in]1,+\infty[$.

Théorème 1.4.9. *Les espaces et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

Preuve : (Voir [3])

1.4.4 Dualité

Définition 1.4.4. *(**Dual topologique**)*
Le dual topologique d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé Ω est $\Omega' = \mathcal{L}(\Omega,\mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues de Ω dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1.4.2. *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif.*

Proposition 1.4.3. *Si E est un espace de Banach réflexif et D un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors D est réflexif.*

Théorème 1.4.10. ***(Théorème de représentation de Riez)*** *Soit $p \in [1,+\infty[$ et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))^*$ alors il existe un unique $f \in L^q$ tels que :*

$$<\varphi, g>= \int_\Omega fg, \quad \forall g \in L^p(\Omega).$$

de plus on a : $\|\varphi\|_{(L^p)^*} = \|f\|_{L^q}$.

Preuve : On définit l'opérateur $T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ par

$$<\varphi, g>= \int_\Omega fg, \quad \forall g \in L^p(\Omega).$$

On vérifie que T est un opérateur linéaire et continue et on a

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q, g \in L^q(\Omega).$$

Il est clair que Tg est une application linéaire sur $L^p(\Omega)$, qui est continue car d'aprés l'inégalité de Hölder, on a

$$| < Tg, f > |_{(L^p)^*} \leq \|g\|_p \|f\|_q.$$

Ainsi Tu est un élément de $(L^q)^*$ et on a

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_q.$$

D'autre part, posons

$$f_0(x) = \begin{cases} |g(x)|^{p-2} g(x) & \text{si} \quad g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad g(x) = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $f_0 \in L^q$, $\|f_0\|_q = \|g\|_p^{p-1}$ et $Tg(f) = \|g\|_p^p$, d'ou

$$\|Tg\|_{(L^p)^*} \geq \frac{| < Tg, f_0 > |}{\|f_0\|_q} = \|g\|_p$$

Donc finalement on a $\|Tg\|_{(L^p)^*} = \|g\|_p$. On en déduit que T est une isométrie de $L^p(\Omega)$ sur un sous-espace fermé de $(L^q)^*$. Or $L^q(\Omega)$ est réflexif d'aprés la première étape et la proposition 1.4.2 implique alors que $(L^q)^*$ est réflexif et donc $T(L^p)$ est réflexif d'aprés la proposition 1.4.3. Finalement, comme T est une isométrie, on en déduit que L^p est réflexif.

1.4.5 Convolution et régularisation

Définition 1.4.5. *Le produit de convolution de f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy,$$

défini pour les x tels que la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ soit intégrable. On parle encore de la convolée $f * g$ de f et de g. D'après remareque, la définition du produit de convolution a aussi un sens pour des classes f et g.

Remarque 1.4.1. *Attention, il n'est pas clair pour quels $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $f * g$ est bien définie. Certains résultats suivent pour donner des conditions d'existence de $(f * g)(x)$.*

Remarque 1.4.2. *Calculer le produit de convolution entre $f(x) = \alpha e^{-\alpha x} I_{\mathbb{R}^N}(x)$ et $g(x) = \beta e^{-\beta x} I_{\mathbb{R}^N}(x)$ avec $\alpha \neq \beta$*

On a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \alpha e^{-\alpha(x-y)} I_{\mathbb{R}}(x-y) \beta e^{-\beta y} I_{\mathbb{R}}(y) dy.$$

On doit regarder avec soin les fonctions indicatrices $I_{\mathbb{R}}(x-y)$ et $I_{\mathbb{R}}(y)$ car ce sont elles qui vont conditionner la valeur de l'intégrale. Il faut bien voir que dans ce calcul, la variable x est fixée et on intégre en y. Pour que ces fonctions indicatrices soient non nulles, on doit à la fois avoir $y \geq 0$ et $x \geq y$ Il est clair que si x est négatif, ces deux conditions sont contradictoires.

En d'autres termes, pour $x \leq 0$ on a $f * g(x) = 0$. Pour x positif la condition précédente devient

$$0 \leq y \leq x$$

donc les bornes d'intégration sont 0 et x

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha e^{-\alpha(x-y)} I_{\mathbb{R}} \beta e^{-\beta y} I_{\mathbb{R}}(y) dy \\ &= \alpha\beta e^{-\alpha x} \left[\frac{e^{(\alpha-\beta)y}}{\alpha - \beta} \right]_0^x \\ &= \alpha\beta \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.4. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g$ est définie p.p. et*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_q.$$

Preuve.
1. Pour $p = +\infty$, c'est clair.
2. Pour $p = 1$. En appliquant le théoréme de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \int |f(x-y)||g(y)| dx dy &= \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)| dx \right) dy \\ &\leq \int |g(y)| \left(\int |f(z)| dz \right) dy \\ &= \left(\int |g(y)| dy \right) \left(\int |f(z)| dz \right) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Par conséquent, $I(x) = \int (|f(x-y)||g(y)| dx dy$ est d'intégrale finie bornée par $\|f\|_1 \|g\|_1$, c'est donc que $I(x) = +\infty$ sur un ensemble de mesure nulle et donc $f * g$ est bien définie μ.p.p. on utilisant estemation, on obteint

$$\|f * g\|_1 = \int (|f(x-y)||g(y)| dx dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

3. pour $1 < p < +\infty$. Utilisons le cas précédent, en faisant jouer ici à g^p le rôle alors joué par g. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $y \to |f(x-y)|g(y)^p$ est intǵrable sur $\mathbb{R}^n$ i.e. la fonction $y \to |g(x-y)|^{\frac{1}{q}} f(y)$ appartient à $L^q(\mathbb{R}^n)$ car $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et la mesure de Lebesgue est invariante par translation. D'après l'inégalité de Hölder,

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)||f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\int |f(x-y)||g(y)| = \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi
$$|(f*g)(x))|^p \leq (|f|*|g|^p)(x)\|f\|_1^{\frac{p}{q}}.$$
D'après le cas précédent, on voit que
$$f*g \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|f*g\|_p^p \leq \|f\|_1\|g\|_p^p\|f\|_1^{\frac{p}{q}}$$
c'est-à-dire
$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p.$$

Théorème 1.4.11. *(Inégalité de Young).*
Soient $1 \leq p, q \leq +\infty$ tels que $\frac{1}{q}+\frac{1}{q} \geq 1$. Soit $1 \leq r \leq +\infty$ défini par l'égalité $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors :
i) le produit de convolution $f*g$ est défini presque partout et définit une fonction Lebesgue mesurable,
ii) nous avons $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et
$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$
iii) Si $\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=1$ (et donc $r=\infty$), alors nous avons les conclusions plus fortes suivantes : $f*g$ est défini en tout point, et
$$|(f*g)(x)| \leq \|f\|_p\|g\|_q, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve : Commençons par le point iii). Par symétrie du produit, nous pouvons supposer $p<\infty$. Avec $h(y)=f(x-y)$, l'inégalité de Hölder donne
$$|f*g|(x) = \int |h(y)||g(y)|dy \leq \|h\|_p\|g\|_q = \|f\|_p\|g\|_q.$$
Ce qui au passage montre que $f*g$ est défini en tout point. Supposons maintenant $\frac{1}{q}+\frac{1}{q}>1$ et donc $1 \leq r \leq +\infty$. Comme déjà remarqué, nous pouvons considérer des fonctions boréliennes au lieu de classes d'équivalence. Il suffit de traiter le cas des fonctions positives.
En effet, si les conclusions du théorème sont vraies pour $|f|$ et $|g|$, alors $f*g(x)$ est défini pour tout x tel que $|f|*|g|(x)$ soit fini, et pour un tel x nous avons
$$f*g(x) = f_+*g_+(x) - f_+*g_-(x)f_- - f_-*g_+(x) + f_-*g_-(x)$$
et
$$|f*g|(x) \leq |f|*|g|(x)$$
Si f, g sont boréliennes positives, alors $f*g(x)$ existe (mais peut être infini) pour tout x, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction borélienne positive (vérifier que $y \to f(x-y)g(y)$ est borélienne). Il suffit donc de montrer (11.2), car dans ce cas nous avons $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et donc $f*g(x)<\infty$ pour $\mathbb{R}^n \diagdown A$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ borélien négligeable. De manière équivalente, $y \to f(x-y)g(y)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}^n \diagdown A$ (ce qui donne la partie i) du théorème).

$$\begin{aligned}
|f*g|(x) &= \int (h^{\frac{p}{r}}(y)g^{\frac{q}{r}}(y)h^{1-\frac{p}{r}}(y)g^{1-\frac{q}{r}}(y)dy \\
&\leq \|h^{\frac{p}{r}}g^{\frac{q}{r}}\|_r\|h\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \\
&\leq \left(\int f^p(x-y)g^q(y)dy\right)^{\frac{1}{r}}\|h\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}
\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_r^r &= \int (f*g(x))^r dx \\
&= \int\left(\int f^p(x-y)g^q(y)dy\right)dx\|f\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \\
&= \int\left(\int f^p(x-y)dx\right)g^q(y)dy\|f\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \\
&= \|f\|_p^r\|g\|_q^r,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Le tableau suivant résume les propriétés principales des espaces L^p.

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p, 1<p<+\infty$	Oui	Non	L^q
L^1	Non	Oui	L^∞
L^∞	Non	Non	contient strictement L^1

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1. *Etudier l'appartenance à $L^1(\mathbb{R})$ et à $L^2(\mathbb{R})$ des fonction suivantes :*

$$f_1(x) = \sin x 1_{[-\pi,\pi]}(x), f_2(x) = \frac{\sin x}{x}1_{[1,+\infty[}, \quad f_3(x) = e^{-a|x|}(a>0).$$

Exercice 1.5.2. *Soit f la fonction d'efinie sur $]0,+\infty[$ par*

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|lnx|)^2}.$$

1) *Montrer que $f \in L^1(]0,1])$.*
2) *Soit $p \in]1,+\infty]$. Montrer que $f \in L^p(]0,1])$.*
3) *Soit $p \in [1,+\infty]$. Montrer que $f \in L^p([1,+\infty[)$.*

Exercice 1.5.3. *Soit* (X, μ) *un espace mesuré. On suppose qu'il existe une fonction* f *strictement positive telle que* f *et* $\frac{1}{f}$ *soient intégrables. Montrer qu'alors* $\mu(X) < +\infty$.

Exercice 1.5.4. *Soit* $(E, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(E) < +\infty$. *Soit également* $1 \leq p < q < +\infty$.

1) *Montrer que*
$$L^\infty(E) \subset L^q(E) \subset L^p(E) \subset L^1(E).$$

2) *Montrer sur un exemple que l'hypothèse* $\mu(E) < +\infty$ *est indispensable.*

3) *La premiére question permet de définir l'injection :*
$$i : L^q \to L^p$$
$$f \to f$$
Montrer que cette injection est continue pour les normes $\|f\|_q$ *et* $\|f\|_p$.

Exercice 1.5.5. *Soit* $(E, \mathfrak{T}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(E) < +\infty$. *Soit également* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction* f *sur* E. *Montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0.$$
Ce résultat reste-t-il vrai si l'on enléve l'hypothése $\mu(E) < +\infty$.

Exercice 1.5.6. *Soit* (X, μ) *un espace mesuré et* $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ *1. Montrer qu'il existe* $\theta \in [0, 1]$ *tel que*
$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}.$$

1) *Montrer que pour cette valeur de ?, toute fonction mesurable* $f : X \to \mathbb{R}$ *vérifie*
$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_r^{1-\theta}$$

2) *En déduire que* $L^p(X) \bigcap L^r(X) \subset L^q(X)$ *et que l'inclusion*
$$inc : L^p(X) \bigcap L^r(X) \to L^q(X)$$
est continue si l'on munit $L^p(X) \bigcap L^r(X)$ *de sa norme naturelle* $f \to \|f\|_p + \|f\|_r$.

3) *Montrer qu'en outre, si* $q < \infty$, $L^p(X) \bigcap L^r(X) \subset L^q(X)$ *est dense.*

4) *On suppose maintenant* $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions convergant vers* f *dans* $L^p(X)$ *et bornée dans* $L^r(X)$. *Montrer qu'elle converge vers* f *dans* $L^r(X)$.

1.6 Correction

Correction 1.6.1. $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin x 1_{[-\pi,\pi]}(x)|dx \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} |\sin x|dx \\
&= 2\int_{0}^{+\pi} \sin x dx \\
&= [2\cos x]_0^{\pi} \\
&= 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$.
$f_1 \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin x 1_{[-\pi,\pi]}(x)|^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 x dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} 1 - \cos 2x dx \\
&= [2x + \sin 2x]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 1 < +\infty.
\end{aligned}$$

$f_2 \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x} 1_{[1,+\infty[}\right| dx \\
&= \int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx
\end{aligned}$$

On intègre par parties,on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \\
&= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Donc $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$.
$f_2 \in L^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} 1_{[1,+\infty[} \right|^2 dx \\
&= \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \\
&\leq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\
&\leq \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} \\
&= 1 < +\infty
\end{aligned}$$

Donc $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$.

Correction 1.6.2. f *est positive. Le changement de variable* $y = \dfrac{1}{x}$ *donne*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^{\infty} \frac{y}{(1+\ln y)^2} dy \\
&= \left[\frac{-1}{1+\ln y} \right]_0^{+\infty} \\
&= 4\pi < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $f \in L^2(\mathbb{R})$. *Soit* $1 < p < +\infty$. *On a*

$$\frac{1}{x|f(x)|^p} = (1+|lnx|)^{2p} x^{p-1} \to 0 \quad \text{quand } x \to 0.$$

car $p > 1$. *En d'autres termes* $\frac{1}{x} = o(|f(x)|^p)$ *quand* $x \to 0$. *Cela entraîne que* $|f|^p$ *n'est pas intégrable en* 0, *donc* $f \in L^p(]0,1])$. *Pour* $p = +\infty$, *il suffit de remarquer* $f(x) \to +\infty$ *quand* $x \to 0$, *donc* f *n'est pas bornée, a fortiori pas dans* $L^{\infty}(]0,1])$. *Pour* $p = 1$, *on a comme précédemment* $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)| dx = 1 < \infty$ *donc* $f \in L^1([1,+\infty[)$. *Pour* $1 < p < +\infty$, *on a* $|f(x)|^p \leq \frac{1}{x^p}$ *qui est intégrable en* $+\infty$, *donc* $f \in L^p([1,+\infty[)$. *Pour* $p = +\infty$, *il suffit de remarquer que* f *est continue positive, décroissante. Donc* $f(x) \leq f(1) = 1$ *pour tout* $x \in [1,+\infty[$, *donc* $f \in L^{\infty}([1,+\infty[)$.

Correction 1.6.3. *Soit* $f \in L^1(X)$ *une fonction strictement positive telle que* $\dfrac{1}{f}$ *soit également intégrable.Les fonctions* $f^{\frac{1}{2}}$ *et* $f^{-\frac{1}{2}}$ *sont clairement dans* L^2, *et l'inégalité de Cauchy-*

Schwarz entraîne donc

$$\begin{aligned}\mu(X) &= \int_X 1 d\mu \\ &= \int_X f^{\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}} d\mu \\ &\leq \|f^{\frac{1}{2}}\|_2 \|f^{-\frac{1}{2}}\|_2 \\ &\leq \|f\|_1^{\frac{1}{2}} \|f^{-1}\|_1^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Correction 1.6.4. *Avec les conventions naturelles, on a*

$$0 \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \leq 1$$

Il est alors clair que l'on peut écrire $\frac{1}{q}$ *comme combinaison convexe de* $\frac{1}{p}$ *et* $\frac{1}{r}$.
2. Comme d'habitude, on peut supposer $f \geq 0$. *On applique l'inégalité de Hölder à*

$$f^q = f^{\theta q}.f^{(1-\theta)q}$$

et aux exposants conjugués

$$s = \frac{p}{\theta q} \quad et \quad t = \frac{r}{(1-\theta)q} \quad \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{p}{\theta q} + \frac{r}{(1-\theta)q} = 1\right)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q &= \int_X f^p d\mu \\ &\leq \|f^{\theta q}\|_s \|f^{(1-\theta)q}\|_t \\ &\leq \|f\|_p^{\theta q} \|f\|_r^{(1-\theta)q},\end{aligned}$$

ce qui est (la puissance q-ième de) l'inégalité voulue. Cette inégalité est souvent appelée inégalité d'interpolation.
3. L'inégalité précédente démontre directement que $L^p(X) \bigcap L^r(X) \subset L^q(X)$. *L'inclusion*

$$inc : L^p(X) \bigcap L^r(X) \to L^q(X)$$

est alors continue en vertu de l'inégalité (de convexité)

$$\begin{aligned}\|f\|_p^{\theta} \|f\|_q^{1-\theta} &\leq \theta \|f\|_p + (1-\theta)\|f\|_q \\ &\leq 2(\|f\|_p + \|f\|_q).\end{aligned}$$

Il suffit en fait de démontrer que $L^p(X) \bigcap L^r(X)$ *est dense dans tous les* $L^p(X)$ $(q < \infty)$. *Pour cela, soit* $f \in L^q(X)$ *quelconque. On chosit une suite de fonctions simples* (f_n) *convergeant* *vers f presque partout, en croissant. Inférieures à f, toutes ces fonctions sont dans $L^q(X)$, et elles convergent vers f dans $L^q(X)$ en vertu du théorème de convergence dominée Lq. Mais une fonction simple appartient à $L^q(X)(q \neq \infty)$ si et seulement si elle appartient à $L^1(X)$ (c'est encore équivalent au fait que son support soit de mesure finie) et elle appartient automatiquement à $L^\infty(X)$. On a donc $f_n \in L^1(X) \bigcap L^\infty(X)$ et la densité est démontrée.*

Correction 1.6.5. *Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que pour $n > N$, on ait*

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(E)}.$$

Alors pour $n > N$, on a

$$\int_E |f_N - f| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{\mu(E)} \mu(E) = \varepsilon.$$

Le résultat n'est plus vrai si on enléve l'hypothése : sur $\mathbb{R}$ avec Lebesgue, considérer

$$f_n = \frac{1}{n} 1_{[n, +\infty[}$$

Correction 1.6.6. *Commencons par $L^\infty \subset L^q$. Soit $f \in L^\infty$ et M un majorant essentiel de $|f|$. Alors*

$$\int |f|^q d\mu \leq M^q \mu(E) < +\infty.$$

Maintenant, pour $L^q \subset L^p$, prenons $f \in L^q$ et notons $A = \{x \in E, |f(x)| \leq 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^p d\mu &= \int |f(x)|^p d\mu + \int_{E \setminus A} |f(x)|^p d\mu \\ &\leq \mu(A) + \int_{E \setminus A} |f(x)|^q d\mu \\ &\leq \mu(A) + \|f\|_q^q < +\infty. \end{aligned}$$

2) Pour voir que $\mu(E) < \infty$ est indispensable, placons nous sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. La fonction constante 1 est dans L^∞ mais n'est dans aucun des L^p. Soit $1 \leq p < q < +\infty$. On a alors $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$. Soit α vérifiant $\frac{1}{p} > \alpha > \frac{1}{q}$. La fonction

$$x \to \frac{1}{(1 + |x|)^\alpha}.$$

est dans L^q car $q\alpha > 1$ et n'est pas dans L^p car $p\alpha < 1$.
3) Il s'agit de montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in L^q$, on a

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q.$$

L'idée est d'appliquer l'inégalité d'Hölder pour r et r' conjugués on a

$$\|f\|_p^p = \int |f(x)|^p d\mu \leq \left(\int (|f(x)|^p)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int 1^{r'} d\mu \right)^{\frac{1}{r'}}.$$

Pour se ramener à $\|f\|_p$*, l'idée vient de faire en sorte que* $rp = q$*, donc de choisir* $r = \frac{g}{p}$ *qui est* > 1*. Notons* r' *son conjugué et Hölder devient*

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_q^{\frac{q}{r}} (\mu(E))^{\frac{1}{r'}}.$$

On a $\frac{q}{r} = p$ *et en prenant la racine p-ième de cette inégalité on obtient bien :*

$$\|f\|_p^p \leq (\mu(E))^{\frac{1}{pr'}} \|f\|_q.$$

Chapitre 2

La transformation de Fourier

Sommaire

Dans chapitre, on considère la transformée de Fourier de fonctions définies sur tout $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. L'analyse de Fourier dans ce cas est très riche de résultat mathématiques élégants mais qui vont bien plus loin du but de ce cours. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la transformée de Fourier des fonctions de L^1 ou de L^2. Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [11, 9, 13].

2.1 Transformée de Fourier des fonctions

2.1.1 Définition et Existence

Définition 2.1.1. *Soit f une fonction de L^1. Sa transformée de Fourier est la fonction $\mathcal{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :*

$$\omega \longrightarrow \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

La définition précédente de la transformation de Fourier n'est pas toujours celle choisie. Par exemple, certains auteurs définissent la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ts}dt.$$

La définition retenue peut entraîner des modifications dans certaines propriétés (tout simplement parce que, par exemple,

$$\hat{f}(s) = \hat{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right).$$

Il faut donc toujours vérifier la définition employée avant d'appliquer une formule.

Conditions suffisantes d'existence

La transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ existe si $f(x)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty.$$

$\mathcal{F}(f)(\omega)$ est définit par une intégrale dépendant du paramètre réel ω et existe car :

$$|\mathcal{F}(f)(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-ist}|dt < \infty.$$

On a utilisé le fait que : il existe

$$\omega \in \mathbb{R}, \quad |e^{-2i\pi\omega t}f(t)| = |f(t)|.$$

Donc la fonction $\hat{f}$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$. On admettra que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.1. *La courbe d'équation $y = |\hat{f}|$ est appelé spectre de f.*

2.1.2 Exemple

Exemple 2.1.1. 1) `Fonction de porte :`
Soit $a > 0$, la fonction porte est définie par :

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & Si\ |x| < a \\ 0 & Si\ |x| > a \end{cases}$$

Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-+\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} 1 e^{-\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\omega a} - e^{-\omega a}}{\omega a} \\ &= \frac{\sin \omega a}{\sqrt{2\pi}\omega}. \end{aligned}$$

Si $\omega = 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} dt \\ &= a\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

D'ou

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin \omega a}{\sqrt{2\pi}\omega} & Si\ \omega \neq 0 \\ a\sqrt{\frac{2}{\pi}} & Si\ \omega = 0. \end{cases}$$

2) `Fonction Exponentielles` :

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-(i\omega - a)t} dt \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(i\omega + a)t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

2.2 Propriétés

2.2.1 Linéarité

Théorème 2.2.1. *Soient* f *et* g *deux fonctions admettant une transformée de Fourier. Alors, quels que soient les nombres complexes* α, β, $\alpha \hat{f}^(\omega) + \beta \hat{g}^(\omega)$ *est la transformée de Fourier de* $\alpha f(t) + \beta g(t)$.

Preuve : On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha f+\beta g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha f+\beta g)(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha f(t)e^{-i\omega t}dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\beta g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt+\beta\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \alpha\mathcal{F}(f)(\omega)+\beta\mathcal{F}(g)(\omega).
\end{aligned}
$$

2.2.2 Conjugaison

Théorème 2.2.2. *Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Alors $\bar{f} : t \to \overline{f(t)}$ admet également une transformée de Fourier et*

$$\hat{\bar{f}}(\omega)=\overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

Preuve : On a

$$
\begin{aligned}
\hat{\bar{f}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(t)}e^{-2i\pi st}dt \\
&= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{2i\pi st}dt} \\
&= \overline{\hat{f}(-\omega)}.
\end{aligned}
$$

2.2.3 Changement d'échelle

Théorème 2.2.3. *Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, posons $g(t)=f(\lambda t)$. Alors g admet également une transformée de Fourier et*

$$\hat{g}(\omega)=\frac{1}{|\lambda|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right).$$

Preuve : Supposons $\lambda > 0$ (la preuve pour $\lambda < 0$ est laissée au lecteur).
Posons $s=\lambda t$, il vient

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)e^{\frac{-i\omega}{\lambda}}\frac{1}{|\lambda|}ds \\
&= \frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right).
\end{aligned}
$$

2.2.4 Translation

Théorème 2.2.4. *Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et posons $g : g(t)t \to f(t-\tau)$. Alors g admet également une transformée de Fourier et*

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega\tau}\hat{f}(\omega).$$

Preuve : En effectuant le changement de variables $s = t - \tau$, on trouve

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega(\tau+t)}dt \\
&= e^{-i\omega\tau}\hat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

2.2.5 Modulation

Théorème 2.2.5. *Soit une fonction f admettant une transformée de Fourier. Considérons, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : t \to e^{i\alpha t}f(t)$. Alors f_α admet une transformée de Fourier et*

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = \hat{f}(\omega - \alpha).$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}
\hat{f}_\alpha(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t}f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\alpha)t}f(t) \\
&= \hat{f}(\omega-\alpha).
\end{aligned}$$

2.3 Transformée de Fourie d'une dérivée

2.3.1 Transformée de la dérivée première

Théorème 2.3.1. *Soit f une fonction de classe C^1 admettant une transformée de Fourier. Supposons de plus que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$. Alors la dérivée $f^{'}$ de f admet une transformée de Fourier et*

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega).$$

Preuve : Puisque f' est continue, par une intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{f}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B f'(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to A} \Big[f(t) e^{-i\omega t} \Big]_B^A + (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to A} \int_A^{+B} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to A} f(A) e^{-i\omega A} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to B} f(B) e^{-i\omega B} \\
&+ i\omega \hat{f}(\omega).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-ist} = 0$, il s'ensuit que $\lim_{t\to A} f(A)e^{-i\omega A} = 0$ et $\lim_{t\to B} f(B)e^{-i\omega B} = 0$. Ainsi $\hat{f}'(\omega)$ existe et est donné par $\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$.

2.3.2 Généralisation aux dérivées supérieures :

Corollaire 2.3.1. *Soit f une fonction de classe C^k et admettant une transformée de Fourier. Supposons que $\lim_{t\to\infty} f^k(t) = 0$ pour $0 \leq k \leq n \leq 1$. Alors*

$$\hat{f}^{(n)}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

Théorème 2.3.2. *Soit f une fonction absolument intégrable. Si $g : t \to tf(t)$ est absolument intégrable, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est dérivable et*

$$\hat{f}'(s) = -i\hat{g}(\omega).$$

Corollaire 2.3.2. *Supposons que $f(t), tf(t), \cdots; t^n f(t)$ sont toutes absolument intégrables, alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est n fois dérivable et*

$$\hat{f}'(s) = (-i)^n \hat{g_n}(\omega) \quad \text{où} \quad g_n(t) = t^n f(t).$$

2.3.3 Fonctions paires et impaires

Théorème 2.3.3. *1) Soit f une fonction paire admettant une transformée de Fourier. Alors*

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(it\omega) dt.$$

2) Soit f une fonction impaire admettant une transformée de Fourier. Alors

$$\hat{f}(\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(it\omega) dt.$$

Preuve : Supposons f paire. On a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\omega t}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(-t)e^{-2i\pi\omega t}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{0} f(t)e^{i\omega t}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(-i\omega t)dt.
\end{aligned}$$

Le cas d'une fonction impaire se traite d'une façon similaire (on utilise alors la formule $\sin t = \dfrac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$).

Définition 2.3.1. *Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle si l'intervalle peut etre subdivisé en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction est continue et a des limites à droite et à gauche finies (mais non égales) en les points de la subdivision.*

Théorème 2.3.4. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux, absolument intégrables et bornées. Alors $f * g : t \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds$ est également absolument intégrable et*

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Preuve : on a

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(t-y)dy\Big)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y}f(y)e^{-i\omega(t-y)}g(t-y)dydt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y}f(y)e^{-i\omega z}g(z)dydz \\
&= \sqrt{2\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\omega y}f(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\omega z}g(z)dz\Big) \\
&= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega).\hat{g}(\omega),
\end{aligned}$$

oú la 2^{me} ligne est obtenue par le théorème de Fubini (**??**), puis la 3^{me} par le changement de variable $t = z + y$ et à nouveau théorème de Fubini pour l'avant dernière égalité.

2.4 Inversion de la transformée de Fourier

2.4.1 Formule d'inversion

Définition 2.4.1. *Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On appelle la transformée de Fourier inverse de f la fonction définit pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ par :*

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

Théorème 2.4.1. *Soit f une fonction absolument intégrable et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors l'intégrale de Fourier $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ converge pour chaque $t \in \mathbb{R}$ comme valeur principale de Cauchy, et*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

où $f(t^+) = \lim_{h \in 0} f(t+h)$ et $f(t^-) = \lim_{h \in 0} f(t+h)$ En particulier, si f est continue en t, alors

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega.$$

2.4.2 Conséquence de la formule d'inversion

Corollaire 2.4.1. *Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions absolument intégrables et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Si $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, alors $f(t) = g(t)$ en tout point t où f et g sont continues.*

Preuve : Soit t un point où f et g sont toutes deux continues. Puisque $\hat{f}(\omega) = \hat{f}(\omega)$, il s'ensuit par la formule d'inversion que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega)e^{2i\pi\omega t} d\omega \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Exemple 2.4.1. *On cherche une fonction dont la transformée de Fourier est $F(\omega) = \dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$. Cette fonction est le produit de la fonction $\frac{1}{1+i\omega}$ avec elle-même. Or la fonction $g(t) = e^{-t}U(t)$ a pour transformée de Fourier $\dfrac{1}{1+i\omega}$. Par la propriété du produit de convolution il en résulte que F est la transformée de Fourier de $g * g$, qui, après calcul, se trouve être $f(t) = e^{-t}U(t)$.*

2.5 Transformation de Fourier pour les fonctions de carré sommable

Théorème 2.5.1. *Soient f et g deux fonctions C^1 par morceaux, absolument intégrables et de carré sommable sur $\mathbb{R}$. Alors $\hat{f} * \hat{f}$ est la transformée de Fourier de $t \to f(t)g(t)$.*

2.5.1 Égalité de Parseval

Théorème 2.5.2. *Soient f et g deux fonctions C^1 par morceaux, absolument intégrables et de carré sommable sur $\mathbb{R}$. Alors nous avons l'égalité de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega.$$

En particulier (en prenant $f = g$), nous obtenons l'identité de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2d\omega.$$

(Il résulte notamment de l'identité de Plancherel que $\hat{f}$ est aussi de carré sommable.)

Table des Transformées de Fourier

Fonction	Transformées de Fourier
$f(t) = e^{-a\|t\|}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \|x\| < a \\ 0 & \text{Si } \|x\| > a \end{cases}$	$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin \omega a}{\sqrt{2\pi}\omega} & \text{Si } \omega \neq 0 \\ a\sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{Si } \omega = 0 \end{cases}$
$\{Id_E\}$,$\mathcal{A}_n$	$\{Id_E\}$,$\mathcal{A}_n$,$\mathcal{S}_n$
Propriétés	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha\hat{f}^(\omega) + \beta\hat{g}^(\omega)$
$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\|\lambda\|}\hat{f}(\frac{\omega}{\lambda})$
$f(t-\tau)$	$e^{-i\omega\tau}\hat{f}(\omega)$
$e^{i\alpha t}f(t)$	$\hat{f}(\omega-\alpha)$
$f^{'}(t)$ avec $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$	$i\omega\hat{f}(\omega)$
$f^{(n)}(t) = 0$ avec $\lim_{t\to\infty} f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$t^n f(t)$	$(i)^n\hat{f}^{(n)}(\omega)$
$f * g$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1. *Soit la fonction porte :*

$$\Pi_{\frac{1}{2}}(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1.Déterminer la transformée de Fourier de $\Pi_{\frac{1}{2}}$.
Soit la fonction porte :

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a \\ 0, & sinon \end{cases}$$

2. Calculez la transformée de Fourier de Π_a.
3. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} ds.$$

Exercice 2.6.2. *On considére les fonctions suivantes :*

$$f(t) = |\sin t| \mathbf{1}_{]-\pi,\pi[}(t).$$

1. f *est-elle un élément de* $L^1(\mathbb{R})$ *? de* $L^2(\mathbb{R})$?
2. Calculez la transformée de Fourier de f.
Indication : on pourrait utiliser $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$
5. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos\pi\omega}{1-\pi\omega^2} d\omega$$

Exercice 2.6.3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction*

$$f(x) = \sin(x) e^{-x} U(x)$$

où $U(x)$ *est la fonction de Heavyside.*

Exercice 2.6.4. *1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle déinie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 1+t, & si \quad -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t, & si \quad 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$$

Exercice 2.6.5. *Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.*
1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de

$$x \to \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Calculer $f * f$; calculer ainsi la transformée de Fourier de

$$x \to \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

4. Déterminer la transformée de Fourier de

$$x \to \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Exercice 2.6.6. *Le but de cet exercice est de rechercher des fonctions u intègrables telles que, pour tout*

$$x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s) ds,$$

ou β est un réel strictement positif.
1. Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.
2. En utilisant la transformée de Fourier, prouver qu'il existe une solution si et seulement si $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'alors cette solution est unique. La déterminer.

2.7 Correction

Correction 2.7.1. *On a par la table ou par un calcul direct simple :*

$$\hat{\Pi}_{\frac{1}{2}}(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{2\pi}\omega} & Si\ \omega \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & Si\ \omega = 0 \end{cases}$$

3. En utilisant le théorème de Parseval On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Pi_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Pi}_2(\omega)|^2 d\omega.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-a}^{+a} 1^2 dt = 2a, \tag{2.1}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 a\omega}{2\pi a^2 \omega^2} d\omega = 2a.$$

Correction 2.7.2. *f est un élément de $L^1(\mathbb{R})$. En effet*

$$\int_{\mathbb{R}} |f|dx = \int_{\mathbb{R}} |\sin t|\mathbf{1}_{]-\pi,\pi[}(t)dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|dx = 2\int_0^{\pi} \sin tdx = -\cos t|_0^{\pi} = 4 < \infty.$$

f est un élément de $L^2(\mathbb{R})$. En effet

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2dx = \int_{\mathbb{R}} |\sin t|^2\mathbf{1}^2_{]-\pi,\pi[}(t)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 tdx = 2\int_0^{\pi} 1-2\cos 2tdx = x-\frac{1}{2}\sin 2t|_0^{\pi} = \pi < \infty.$$

2. Calcule la transformée de Fourier de f.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t}f(t)dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t}|\sin t|\mathbf{1}_{]-\pi,\pi[}(t)dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega t}|\sin t|dt \\
&+ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t)\sin tdt \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin((1+\omega)t) + \sin((1-\omega)t)]\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos((\omega+1)t)}{1+\omega} + \frac{\cos((1-\omega)t)}{1-\omega}\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\pi(\omega+1))}{1+\omega} + \frac{\sin(\pi(1-\omega))}{1-\omega} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(\pi\omega)}{1-\omega^2}
\end{aligned}$$

Déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos 2\pi^2\omega}{1-\pi^4\omega^4}d\omega$. En utilisant le théorème de Parseval

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2d\omega.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega &= \int_{\mathbb{R}} |\sin t|\mathbf{1}_{]-\pi,\pi[}(t)dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|dx = 2\int_0^{\pi} \sin tdx \\
&= -\cos t|_0^{\pi} = 4.
\end{aligned}$$

Nous trouvons finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2}d\omega = 4\sqrt{2\pi}.$$

Correction 2.7.3. *La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ et nulle sur $]-\infty,0[$. De plus, on a*

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad 0 \leq |f(t)| = |\ sin(t)e^{-t}| \leq e^{-t}$$

et la fonction $t \to exp(-t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. D'ou f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc, d'aprés le cours, sa transformée de Fourier est bien définie et continue. On peut faire le calcul suivant pour $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} \sin t e^{-t} dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2i} dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{4\pi i}} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t + it} dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{4\pi i}} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t - it} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi i}} \left[\frac{-e^{-i\omega t + it}}{i(\omega+1)} \right]_0^{+\infty} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{4\pi i}} \left[\frac{-e^{-i\omega t + it}}{i(\omega-1)} \right]_0^{+\infty} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{4\pi i}} \left(\frac{1}{i(\omega-1)} - \frac{1}{i(\omega+1)} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Correction 2.7.4. *Sans détailler les calculs, et en faisant notamment une intégration par parties, on a :*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-i\omega t} dt \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} (1-t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} + \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

La transformation de Laplace

Sommaire

Les mathématiciens ont inventé de nombreux transformation intégrale d'une fonction, parmi lesquels nous avons vu les transformées de Fourier. Une autre transformation extrêmement utilisée est celle de Laplace. Les transformées de Laplace sont les cousins des transformées de Fourier. Leur relation est celle de la fonction exponentielle et de la fonction sinus ou cosinus. La plus intéressante des propriétés de la transformation de Laplace est que l'intégration et la dérivation deviennent des divisions et des multiplications. La transformée de Laplace permet par exemple de ramener La résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants à la résolution d'équations affines. Cette transformation est très utilisée pour résoudre des équations et les systèmes différentiels et particulièrement en électricité, électronique, théorie de la chaleur, théorie du signal $\cdots$.
Dans ce chapitre, on présente la transformée de Laplace et certaines caractéristiques intéressantes.

3.1 Transformée de Laplace des fonctions

3.1.1 Définition et Existence

Définition 3.1.1. *Soit* $f(t)$ *une fonction de* t*, définie pour* $t > 0$*. On définit et on note* $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$ *la transformée de Laplace de* $f(t)$ *comme suit*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Remarque 3.1.1. ⧫ *On dit que* F *est la transformée de Laplace de* f*, et que* f *est l'original de* F*.*
⧫ *la nouvelle variable* p *appartient quant à elle à* $\mathbb{C}$*.*
⧫ p *est la variable (complexe) dans le domaine des fréquences (analogue à* ω *en Fourier).*
⧫ $\mathcal{L}$ *est la transformation de Laplace (analogue à* $\mathcal{F}$ *en Fourier) : c'est une application.*
⧫ $F(p)$ *est la transformée de Laplace de la fonction origine* f *(analogue à* $\hat{f}(\omega)$ *en Fourier).*
⧫ *La transformée de Laplace n'existe pas pour n'importe quelle fonction.*

Nous allons maintenant donner des conditions sur $f(t)$ qui garantiront l'existence de

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Définition 3.1.2. *On dit que* f *est d'ordre exponentiel s'il existe des constantes* $M > 0$ *et* α *telles que*

$$f(t) \leq Me^{\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Intuitivement, cela veut dire qu'à partir d'une certaine valeur de $t(= N)$*,* $f(t)$ *ne peut croître* *plus vite qu'une exponentielle $Me^{\alpha t}$, donc que*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} f(t) = 0.$$

Exemple 3.1.1. *$f(t) = t^2$ est d'ordre exponentiel $1, 2, 3, \cdots$ puisque :*

$$t^2 \leq e^t \leq e^{2t} \leq e^{3t} < \cdots \text{ pour } t > 0.$$

$f(t) = e^{t^3}$ n'est pas d'ordre exponentiel puisque $|e^{t^3 e^{\alpha t}}| = e^{t^3-\alpha t}$ peut devenir aussi grand qu'on veut lorsque t augmente (t^3 croît plus vite que αt quand $t \to \infty$). $f(t) = e^{at}$ est dordre exponentiel $\forall t \in \mathbb{R}$ puisque :

$$e^{at} < e^{\alpha t}, \text{ pour tout } \alpha > a.$$

Théorème 3.1.1. *(Existence de la transformée de Laplace) : Si $f(t)$ est continue par morceaux sur chaque intervalle fini $0 \leq t \leq N$ et si $f(t)$ est d'ordre exponentiel α pour $t > N$, alors la transformée de Laplace $f(p)$ existe $\forall s$ tel que $Re(p) > \alpha$.*

Preuve

Soit $p = x + iy \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
|F(p)| = \Big| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \Big| &\leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}|dt \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt \\
&\leqslant M \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-xt}dt \\
&\leqslant M \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-x)}dt \\
&\leqslant M \frac{e^{(\alpha-x)t}}{\alpha - x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{\alpha - x}.
\end{aligned}$$

D'ou l'integrale existe pour $x = Re(p) > \alpha$.

3.1.2 Exemples de transformée de Laplace des fonctions élémentaires :

1) `Fonction de Heaviside` **:** soit la fonction $\mathcal{U}$ définie par suite :

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Transformation de laplace :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{U})(p) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{H}(t)e^{-pt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\ &= [-\frac{1}{p}e^{-pt}]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

2) Fonction exponentielle: soit

$$f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Transformation de laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}dt \\ &= \left[\frac{e^{t(\alpha-p)}}{p-\alpha}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p-\alpha}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}(f(t)(p) = \frac{1}{p-\alpha}.$$

3.2 Propriétés des transformées de Laplace

3.2.1 Linéarité

Théorème 3.2.1. *Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $F(p)$ et $G(p)$ alors :*

(a) *$f+g$ admet une transformée de Laplace et*

$$\mathcal{L}(f+g) = F(p) + G(p).$$

(b) *Quelque soit c appartenant à $\mathbb{R}$*

$$\mathcal{L}(cf) = cF(p).$$

Le résultat s'étend directement à plus de deux fonctions. Le symbole $\mathcal{L}$ qui transforme $f(t)$ en $F(p)$, souvent appelé opérateur de transformation de Laplace, est donc un opérateur linéaire.

Preuve

(a)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f+g) &= \int_0^{+\infty}(f(t)+g(t))e^{-pt}dt\\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt + \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt\\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\\ &= \mathcal{L}(f)+\mathcal{L}(g).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(cf(t)) &= \int_0^{+\infty} cf(t)e^{-pt}dt\\ &= c\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\\ &= c\mathcal{L}(f).\end{aligned}$$

Exemple 3.2.1. *Grace à cette propriété, on peut déterminer la transformée de sinus et cosinus :*
1) ***Fonction consinis*** *: soit*

$$f(t)=\cos(\alpha t).$$

Transformation de laplace:

$$\mathcal{L}(\cos(\alpha t))(p)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{-i\alpha t}+e^{i\alpha t}}{2}\right).$$

On sait que $\mathcal{L}(e^{\alpha t})(p)=\dfrac{1}{p-\alpha}$. *Alors*

$$\mathcal{L}(\cos(\alpha t))(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+i\alpha}+\frac{1}{p-i\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{2p}{p^2+\alpha^2}\right]$$

D óu

$$\mathcal{L}(\cos(\alpha t))(p)=\frac{p}{p^2+\alpha^2}.$$

1) ***Fonction sinis*** *: soit*

$$f(t)=\sin(\alpha t).$$

Transformation de laplace:

$$\mathcal{L}(\sin(\alpha t))(p)=\mathcal{L}\left(\frac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}\right).$$

On sait que $\mathcal{L}(e^{\alpha t})(p) = \dfrac{1}{p-\alpha}$. *Alors*

$$\mathcal{L}(\sin(\alpha t))(p) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\alpha} - \frac{1}{p+i\alpha}\right) = \frac{1}{2i}\left[\frac{2i\alpha}{p^2+\alpha^2}\right]$$

D óu

$$\mathcal{L}(\sin(\alpha t))(p) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}.$$

Exemple 3.2.2. *Trouvons :*

$$\mathcal{L}\left\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\right\}$$

En utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(3e^{-2t} - 3\sin 5t + 2\cos t) &= 4\mathcal{L}(e^{-2t}) + 6\mathcal{L}(t^3) - 3\mathcal{L}(\sin 5t) + 2\mathcal{L}(\cos t)) \\
&= 4\frac{1}{p+2} - 3\frac{5}{p^2+25} + 2\frac{p}{p^2+1} \\
&= \frac{3}{p-2} + \frac{36}{p^4} - \frac{12}{p^2+16} + \frac{2p}{p^2+16}
\end{aligned}$$

3.2.2 Translation de la variable p :

Théorème 3.2.2. *Pour* $\delta \in \mathbb{C}$, *si* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *alors :*

$$\mathcal{L}(e^{\delta t} f(t)) = F(p-\delta)$$

En d'autres mots, si la fonction objet $f(t)$ est multipliée par le facteur exponentiel $e^{\delta t}$, son image $F(s)$ subit un retard de δ.

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{\delta t} f(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\delta t} f(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^t e^{-(p-\delta)t} f(t)dt. \\
&= F(p-\delta)
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.3. *Comme* $\mathcal{L}(cos2t) = F(p) = \dfrac{p}{p^2+4}$, *on a :*

$$\mathcal{L}(e^{-t}cos2t) = F(p+1) = \frac{p+1}{(p+1)^2+4} = \frac{p+1}{p^2+2p+5}$$

3.2.3 Translation de la variable t ou théorème du retard

Théorème 3.2.3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, *Si* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *et*

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} f(t-\alpha), & si \quad t > \alpha, \\ \\ 0, & si \quad t < \alpha \end{cases},$$

alors :

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(p) = e^{-\alpha p}\mathcal{L}(f)(p) = e^{-\alpha p}F(p).$$

Preuve : Ona

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_\alpha)(p) &= \int_0^{+\infty} f_\alpha(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{\alpha} f_\alpha(t)e^{-p(t)}dt + \int_\alpha^{\infty} f_\alpha(t)e^{-p(t)}dt \\
&= 0 + \int_\alpha^{\infty} f(t-\alpha)e^{-p(t)}dt \\
&= \int_\alpha^{+\infty} f(u)e^{-p(u+\alpha)}du \text{ en posant } u = t-\alpha \\
&= e^{-p\alpha}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pu}du \\
&= F(p).
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.4. *: Trouvons*

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t-\frac{\pi}{3}), & si \quad t > \frac{\pi}{3}, \\ 0, & si \quad t < \frac{\pi}{3} \end{cases},$$

Par le théorème ('3.2.3), comme $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}$, *on a directement :*

$$\mathcal{L}(f(t)) = e^{-\frac{2\pi p}{3}}\frac{p}{p^2+1}.$$

On peut le retrouver par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_a(t)) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(t)e^{-p(t)}dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\infty} f(t)e^{-p(t)}dt \\
&= 0 + \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-p(t)}dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{+\infty} \cos(u)e^{-p(u+\frac{2\pi}{3})}du \text{ en posant } u = t-\frac{2\pi}{3} \\
&= e^{-p\frac{2\pi}{3}}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{+\infty} \cos(u)e^{-pu}du \\
&= e^{-\frac{2\pi p}{3}}\frac{p}{p^2+1}.
\end{aligned}$$

3.2.4 Changement d'échelle :

Théorème 3.2.4. *Pour tout* $a > 0$, *si* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *alors :*

$$\mathcal{L}(f(at)) = F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Preuve

$$\mathcal{L}(f(at))(p) = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt.$$

On fait un changement de variable, on posons :

$$\begin{cases} y = at, \\ dt = \dfrac{dy}{a} \end{cases},$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(at)) &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(y)e^{-p\frac{y}{a}}dy \\ &= F\left(\frac{p}{a}\right). \end{aligned}$$

Exemple 3.2.5.

Comme $\mathcal{L}(\sin t) = `\dfrac{1}{p^2+1}'$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(3\sin t) &= \frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{p}{3})^2+1} \\ &= \frac{1}{3}\frac{9}{p^2+9} \\ &= \frac{3}{p^2+9}. \end{aligned}$$

3.3 Transformée de Laplace d'une dérivée

3.3.1 Transformée de la dérivée première

Théorème 3.3.1. *Soit f une fonction continument dérivable, si $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ alors :*

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = pF(p) - f(0).$$

Preuve : On a :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt.$$

Intégrons par parties :

$$\begin{cases} u = e^{-pt}, \\ v' = f'(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} u' = -pe^{-pt}, \\ v = f(t) \end{cases}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(p) &= +\left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} pf(t)e^{-pt}dt \\ &= p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt - f(0).\end{aligned}$$

D'ou

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0).$$

Théorème 3.3.2. *Si dans le théorème (3.3.1), $f(t)$ n'est pas continue en $t = 0$ mais que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0^+)$ existe (mais n'est pas égal à $f(a)$ qui peut exister ou non), alors :*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+).$$

Exemple 3.3.1.

3.3.2 Généralisation aux dérivées supérieures :

Théorème 3.3.3. *Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ alors :*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(p) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

si $f(t), f'(t), f''(t), \cdots f^{n-1}(t)$, est continue pour $0 < t < N$ et d'ordre exponentiel pour $t > N$ et que $f^n(t)$ est continue par morceaux pour $0 < t < N$.

Remarque 3.3.1. *Si $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $0 < t < N$, alors*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(p) = p^nF(p).$$

Les formules précédentes sont utiles pour trouver des transformées de Laplace sans intégration.

• $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$

Posons $f(t) = 1$ dans le théorème (3.3.1) :

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p} = p\mathcal{L}(t) - 0,$$

donc $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$.

3.3.3 Transformée de Laplace des intégrales :

Théorème 3.3.4. *Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ alors :*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right) = \frac{F(p)}{p}.$$

Preuve :
Posons $G(t) = \int_0^t F(u)du$, alors $G'(t) = f(t)$ et $G(0) = 0$.
Comme :

$$\mathcal{L}(G'(t)) = p\mathcal{L}(G(t)) - G(0)$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(G(t)) &= \frac{1}{p}\mathcal{L}(F(P)) + 0) \\ &= \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

Exemple 3.3.2. *Comme* $\mathcal{L}(\sin 2t)) = \dfrac{2}{p^2+4}$, *on a :*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \sin 2x)dx\right) = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Théoréme de l'amortissement :

Théorème 3.3.5. *Si* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *alors :*

$$\mathcal{L}\Big(e^{-kt}f(t)\Big) = F(p+k).$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big(e^{-kt}f(t)\Big)(p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}e^{-kt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t(p+k)}f(t) \\ &= F(p+k). \end{aligned}$$

Exemple 3.3.3.

$$F(p) = \mathcal{L}(e^{-3t}\cos 4t).$$

En utilisant la propriété précedente et en posant $k = 3$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}(e^{-3t}\cos 4t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t(p+3)}\cos(4t)dt. \end{aligned}$$

Après une intégration par partie, on trouve :

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+6p+25}.$$

3.3.4 Multiplication par t^n ou dérivées de l'image

Théorème 3.3.6. *Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ alors :*

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

Preuve On a : $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$. En dérivant sous le signe de intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} (-t)e^{-st} f(t)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} (t)e^{-st} f(t)dt \\ &= -\mathcal{L}(tf(t)), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}(tf(t)) = -f'(s)$ ce qui prouve le théorème pour $n = 1$. Par induction, supposons le théorème vrai pour $n = k$, c'est-'a-dire supposons vrai :

$$\mathcal{L}(t^k f(t)) = (-1)^k \frac{d^k F(p)}{dp^k}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt &= \int_0^{+\infty} (-t)e^{-st} f(t)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} (t)e^{-st} f(t)dt \\ &= -\mathcal{L}(tf(t)). \end{aligned}$$

Exemple 3.3.4. *Comme $\mathcal{L}(e^{2t}) = \frac{1}{p-2}$, on a :*

$$\mathcal{L}(te^{2t}) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-2}\right) = \frac{1}{(p-2)^2}.$$

$$\mathcal{L}(t^2 e^{2t}) = -\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p-2}\right) = \frac{2}{(p-2)^3}.$$

3.3.5 Transformée de Laplace d'une fonction periodique :

Théorème 3.3.7. *Soit f une fonction périodique de periode T (c'est-a-dire telle que $f(t+T) = f(t)$), alors :*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt.$$

Preuve : Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^T e^{-pt} f(t)dt \\ &= \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-pt} f(t)dt + ... + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t)dt.\end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, posons $t = u + T$, dans la troisième intégrale, posons $t = u + 2T$, etc. on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-pT}\int_0^T e^{-pu} f(u)du + e^{-2pT}\int_0^T e^{-pu} f(u)du + \cdots \\ &= (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + ... + e^{-npT})\int_0^T e^{-pu} f(u)du. \\ &= \frac{1}{1 - e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt.\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la somme de la série géométrique :

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} \qquad \text{si } |r| < 1.$$

3.3.6 Transformée de Laplace d'une convolution :

Théorème 3.3.8. *Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ et $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$, alors :*

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = F(p)G(p).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g)(p) &= \int_0^x \left[\int_0^\infty f(y)g(x-y)dy\right] e^{-pt}dx \\ &= \int_0^\infty \left[\int_y^\infty f(y)g(x-y)dx\right] e^{-pt}dy\end{aligned}$$

$\int_y^\infty g(x-y)dy$ On fait le changement de variable $z = x - y$.

$$\int_y^\infty g(x-y)e^{-px}dy = \int_0^\infty g(z)e^{-p(z+y}dz = e^{-py}\mathcal{L}(g)(p)$$

D'ou

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-py}\mathcal{L}(g)(p)f(y)dy \\ &= \mathcal{L}(g)(p)\int_0^{+\infty} e^{-py} f(y)dy \\ &= G(p)F(p).\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = G(p)F(p).$$

La transformée de Laplace est une application bijective alors la transformée de Laplace inverse existe.

3.4 Transformée de Laplace inverse

Définition 3.4.1. *Si la transformée de Laplace d'une fonction* $f(t)$ *est* $F(s)$*, c'est-à-dire si* $\mathcal{L}(f(t) = f(s)$*, alors* $f(t)$ *est appelée la transformée de Laplace inverse de* $F(s)$ *et on écrit :*

$$L^{-1}(F(s)) = f(t) \tag{3.1}$$

Exemple 3.4.1. *Comme* $\mathcal{L}(e^{-3t}) = \dfrac{1}{s+3}$*, on peut écrire*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = e^{-3t}.$$

3.5 Propriétés importantes des transformées de Laplace inverses :

3.5.1 Linéarité :

Théorème 3.5.1. *Si* c_1 *et* c_2 *sont des constantes quelconques et* $F_1(s)$ *et* $F_2(s)$ *sont les transformées de Laplace des fonctions* $f_1(t)$ *et* $f_2(t)$ *alors :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(c_1F(p) + c_2G(p)) &= c_1\mathcal{L}^{-1}(F(p)) + c_2\mathcal{L}^{-1}(G(p)) \\ &= c_1f(t) + c_2f(t).\end{aligned}$$

Preuve On a par le théorème 3.2.1 :

$$\mathcal{L}(c_1f + c_2g)(p) = c_1\mathcal{L}(f)(p) + c_2\mathcal{L}(g)(p)).$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(c_1f + c_2g)(p)] &= c_1f(t) + c_2g(t) \\ &= c_1\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f))(p) + c_1\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(g))(p)\end{aligned}$$

Exemple 3.5.1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{p-2} - \frac{3p}{p^2+16} + \frac{5}{p^2+4}\right) &= 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right) - 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+16}\right) + 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+4}\right) \\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{2}\sin 2t\end{aligned}$$

3.5.2 Translation de la variable s :

Théorème 3.5.2. *Si* $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$ *alors :*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p-a)) = e^{at}f(t).$$

Preuve :
On a par le théorème (1.3) :

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(p-a)$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p-a)) = e^{at}f(t)$$

Exemple 3.5.2. *Comme* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+4}\right) = \frac{1}{2}\sin 2t$, *on a :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2-2p+5}\right))\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2+4}\right) = \frac{1}{2}e^t\sin 2t.$$

3.5.3 Translation de la variable t :

Théorème 3.5.3. *Si* $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$ *alors :*

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{ap}F(p-a)) = \begin{cases} f(t-a) \quad si \quad t > 0, \\ \\ 0 \quad si \quad t < 0. \end{cases}$$

Preuve :
On a par le théorème (1.3) :

$$\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{ap}F(P)$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{as}F(s)) = f(t-a)$$

Exemple 3.5.3. *Comme* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin t$, *on a :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{\frac{-\pi p}{3}}}{p^2+1}\right)) = \begin{cases} \sin(t-\frac{\pi}{3}) \quad si \quad t > \frac{\pi}{3}, \\ \\ 0 \quad si \quad t < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

3.5.4 Propriété du changement d'échelle :

Théorème 3.5.4. *Si* $\mathcal{L}^{-1}(F)(p) = f(t)$ *alors :*

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(kp) = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

Preuve :
On a par le théorème (1.3) :

$$\mathcal{L}(f(\frac{t}{k})) = kF(kp)$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(kF(kp)) = f\left(\frac{t}{k}\right)$$

on utilisant théorème (1.3), on trouve

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(kp) = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

Exemple 3.5.4. *Comme* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+16}\right) = \cos 4t$, *on a :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p}{(3p)^2+16}\right) = \frac{1}{3}\cos\frac{4}{3}t.$$

3.5.5 Transformée inverse de Laplace d'une dérivée :

Théorème 3.5.5. *Si* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *alors :*

$$\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(P)) = (-1)^n t^n f(t)$$

Preuve :
On a par le théorème (1.3) :

$$\mathcal{L}(t^n F(t))(p) = (-1)^n F^{(n)}(P),$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(kF(kp)) = f(\frac{t}{k})$$

Exemple 3.5.5. *Comme* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin t$, *on a :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2p}{(p^2+1)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\right) = -t\sin t.$$

Théorème 3.5.6. *Si* $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ *alors :*

$$\mathcal{L}^{-1}(F^{(n)}(P)) = (-1)^n t^n f(t)$$

Preuve :
On a par le théorème (1.3) :

$$\mathcal{L}(t^n F(t))(p) = (-1)^n F^{(n)}(p),$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(kF(kp)) = f\left(\frac{t}{k}\right).$$

3.5.6 Transformée inverse de Laplace d'une convolution :

Théorème 3.5.7. *Si* $\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$ *et* $\mathcal{L}^{-1}(G(p)) = g(t)$, *alors :*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(P)G(P)) = f * g(t)$$

Preuve. Ona

$$\mathcal{L}(f*g)(p) \quad = F(p)G(p)$$

d'ou

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)G(p)) = f * g(t)$$

3.6 Méthodes pour trouver les transformées de Laplace inverse

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les transformées de Laplace inverses :

3.6.1 Méthode des fractions rationnelles

La méthode la plus simple, consiste à décomposer la fonction F en éléments simples, dont on connaît déjà les transformées inverses (à partir des tables par exemple). Il s'agit donc de décomposer la fonction en somme de fractions élémentaires du type : $\frac{\alpha}{(cp+d)^n}$, ou du type $\frac{\alpha p+\beta}{(ap^2+bp+c)^n}$, avec $n = 1, 2, 3, \cdots$ et $ap^2 + bp + c$ un polynôme irréductible (de discriminant négatif). Plus précisément :
Si $A(p)$ possède des racines $p_0, p_1, p_2, \cdots, p_n$ on peut écrire $F(p)$ sous la forme

$$F(p) = \frac{\alpha_1}{p - p_0} + \frac{\alpha_2}{p - p_1} + \frac{\alpha_3}{p - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{p - p_n}$$

En trouvant la transformée de Laplace inverse de chaque fraction partielle, on peut trouver $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{B(t)}{A(t)}\right)$.

3.7 Application de la transformée de Fourier aux equations différentielles

Les applications de la transformée de Laplace sont nombreuses en mathématique et en physique. Les principales concernent la résolution des équations différentielles à coefficients constants ou non, des équations intégro-différentielles, des équations aux différences finies et des équations aux dérivées partielles.

3.7.1 Résolution des equations différentielles linéaires a coefficients constants

La transformée de Laplace est utile pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(t) \tag{3.2}$$

On veut chercher la solution de cette equation $y = y(t)$ pour $t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}.$$

La méthode de résolution consiste :
- à prendre la transformée de Laplace des deux membres de l'équation.
- à utiliser les conditions initiales pour calculer les dérivées.
- à obtenir une équation algébrique pour obtenir $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$.
- la solution cherchée s'obtient en prenant la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$.

Nous exposerons maintenant une méthode plus simple de résolution en introduisant la transformée de Laplace. On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation 3.2

$$\mathcal{L}(a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y)(p) = \mathcal{L}(f)(p).$$

En utilisont les propriétés de linéairité, l'équation (4) devient :

$$a_0 \mathcal{L}(y^{(n)}(t)) + a_1 \mathcal{L}(y^{(n-1)}(t)) + ... + a_n(y(t)) = \mathcal{F}(f)(p).$$

Sachant que :

$$\mathcal{L}(y^{(k)})(p) = p^k \mathcal{L}(y)(p) - \sum_{i=1}^{k} p^{i-1} y^{(k-i)}$$

On remplace ces expressions dans l'équation (2) pour aboutir à une équation algébrique du type : $\mathcal{L}(y)(p)(\varphi_n(p)) = \mathcal{L}(f)(p) + \psi_{n-1}(p)$ avec φ_n un polynôme de degré n et ψ_{n-1} un polynôme de degré $n-1$ L'équation algèbrique :

$$\mathcal{L}(y)(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{\varphi_n(p)}$$

Pour finir, on utilise la transformée inverse de Laplace pour déterminer la solution $y(t)$ de (3).

Exemple 3.7.1. *Résoudre l'équation du premier ordre : $y' + y = 1$, avec la condition initiale $y(0) = 0$.*

Correction 3.7.1. *Prenons la transformée de laplace des deux membres :*

$$\mathcal{L}(y'(t)) + \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(1),$$

on a encore :

$$pY(p) - y(0) + Y(p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$Y(p)\,[p+1] = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

Prenons la transformée de Laplace inverse :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - e^{-t}$$

D'où $y(t) = 1 - e^{-t}$ qui est valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exemple 3.7.2. *Résoudre* $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3t}$ *avec* $y(0) = 4$ *et* $y'(0) = 9$. *Prenons la transformée de laplace des deux membres :*

$$\mathcal{L}(y''(t)) - 3\mathcal{L}(y'(t)) + 2\mathcal{L}(y(t)) = 4\mathcal{L}(e^{3t}),$$

on a encore :

$$p^2Y(p) + py(0) - y(0) - 3(pY(p) - y(0)) + 2Y(p) = \frac{4}{p-3}.$$

D'où :

$$\mathcal{L}(y)(p)\left[p^2 - 3p + 2\right] = \frac{4}{p-3} + 4p - 3.$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} - \frac{2}{p-3}.$$

Prenons la transformée de Laplace inverse :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} - \frac{2}{p-3}\right) = e^t + e^{2t} + 2e^{3t}$$

D'où $y(t) = e^t + e^{2t} + 2e^{3t}$ *qui est valable sur* $\mathbb{R}$ *tout entier.*

Table des Transformées de Laplace

Fonction	Transformées de Laplace
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}$
Propriétés	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(p) + \beta G(p)$
$f\,(at)$	$F\left(\dfrac{p}{a}\right)$
$f_\alpha(t) = \begin{cases} f(t-\alpha), & si \quad t > \alpha, \\ 0, & si \quad t < \alpha \end{cases},$	$e^{-\alpha t}F(p)$
$e^{\delta t}f(t)$	$F(p-\delta)\mathcal{U}(t-\delta)$
$f^{'}(t)$	$-pF(p)$
$f^{(n)}$	$(-1)^n p^n F(p)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_0^p \frac{F(s)}{s}ds$
$f * g$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$

3.8 Exercices

Exercice 3.8.1. *Calculer les transformées de Laplace suivantes :*
a) $\mathcal{L}\left((t^2+t-e^{-3t})U(t)\right).$
c) $\mathcal{L}\left((t^2+t+1)e^{-2t}U(t)\right.$.
c) $\mathcal{L}\left(2e^{-5t}(cos2t+sin2t)\right).$

Exercice 3.8.2. *Calculer les originaux suivants :*
a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right).$
b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{(p^2+2p+5}\right).$
c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+1)^2}\right).$

Exercice 3.8.3. *Trouver la décomposition en éléments simples de*

$$F(p)=\frac{2p+1}{(p-2)(p^2+1)}.$$

2. Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre le systéeme

$$(S)=\left\{\begin{array}{l} y''-\frac{5}{2}y+5y=\frac{-5}{2}\sin t, \\ y'(0)=y(0)=0, \end{array}\right. .$$

Exercice 3.8.4. *Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, l'équation intégrale suivante :*

$$e^{-t}x(t)-\int_0^t e^{-s}x(s)ds=\sin t, \quad t\geq 0.$$

3.9 Correction

Correction 3.9.1. *Calculer les transformées de Laplace suivantes :*
a) $\mathcal{L}\left((t^2+t-e^{-3t})U(t)\right).$
En utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(t^2+t-e^{-3t})U(t)\right)) &= \mathcal{L}((t^2)+\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}(e^{-3t}U(t)) \\ &= \frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+3}. \end{aligned}$$

b) $\mathcal{L}\left((t^2+t+1)e^{-2t}U(t)\right.$.
En utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(t^2+t+1)U(t)\right)) &= \mathcal{L}((t^2)+\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}(e^{-3t}U(t)) \\ &= \frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}. \\ &= \frac{p^2+p+2}{p^3} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left((t^2+t+1)e^{-2t}U(t)\right) &= \frac{(p+2)^2+(p+2)+2}{(p+2)^3}\\ &= \frac{p^2+5p+8}{p^3}.\end{aligned}$$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left(2e^{-5t}(cos2t+sin2t)\right)$.

On a $L(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ *et* $L(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ *pour* $p>0$ *donc, en utilisant la linéarite de la transformation de Laplace, il vient*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left((cos2t+sin2t)\right) &= \mathcal{L}(\cos 2t)+\mathcal{L}(\sin 2t)\\ &= \frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{p^2+4}\\ &= \frac{p+2}{p^2+4},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(2e^{-5t}(cos2t+sin2t)\right) &= 2\frac{(p+5)+2}{(p+5)^2+4}\\ &= \frac{2p+14}{p^2+10p+29}.\end{aligned}$$

Correction 3.9.2. *Calculer les originaux suivants :*

a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right)$. *On pose* $F(p)=\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}$ *alors, en décomposant* F *en éléments simples, il vien* $F(p)=\frac{2}{p+4}-\frac{1}{p+3}$, *d'où*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p+4}-\frac{1}{p+3}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p+4}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+3}\right)\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right)=\left(2e^{-4t}-e^{-3t}\right)U(t).$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{p^2+2p+5}\right)$. *On pose* $F(p)=\dfrac{p-1}{p^2+2p+5}$ *alors, en décomposant* F *en éléments simples, il vient* $F(p)=\dfrac{p+1}{(p+1)^2+2^2}-\dfrac{2}{(p+1)^2+2^2}$, *d'où*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}-\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p+4}-\frac{1}{p+3}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\right)\end{aligned}$$

i.e.

C) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+1)^2}\right)$. *On pose* $F(p)=\frac{p}{(p+1)^2}$ *alors, en décomposant F en éléments simples, il vien* $F(p)=\frac{-1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}$, *d'où*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+1)^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(p+1)^2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+1)^2}\right)=\left(-te^{-t}+e^{-t}\right)U(t).$$

Correction 3.9.3. *a)* $F(p)=\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{p}{p^2+1}$.

b) On pose $Y(p)=\mathcal{L}(y(t))$, *alors*

$$\mathcal{L}(y'(t))=p\mathcal{L}(y(t))-y(0)=pY(p)$$

et

$$\mathcal{L}(y''(t))=p^2\mathcal{L}(y(t))-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)+2$$

D'autre part on a

$$\mathcal{L}(y''-\frac{5}{2}y'+y)=\mathcal{L}(\frac{-5}{2}\sin t),$$

donc, en utilisant la linéarite de la transformation de Laplace, il vient

$$\mathcal{L}(y'')-\frac{5}{2}\mathcal{L}(y)+\mathcal{L}(y)=\frac{-5}{2}\mathcal{L}(\sin t),$$

i.e

$$p^2Y-2-\frac{5}{2}pY+Y=\frac{-5}{2}\frac{1}{p^2+1}$$

d'où

$$Y=\frac{2p+1}{(p-2)(p^2+1)}.$$

et l'on déduit du (a) que $y(t)=e^{2t}-\cos t$, *qui vérifie bien les conditions initiales.*

Correction 3.9.4. *On a*

$$e^{-t}x(t)-\int_0^t e^{-s}x(s)ds=\sin t,\quad t\geq 0.$$

Multiplie par e^{-t}, on trouve

$$x(t) - \int_0^t e^{t-s}x(s)ds = e^{-t}\sin t, \quad t \geq 0.$$

On pose $X(p) = \mathcal{L}(x(t))$, en utilisant le produit de convolution, on commence par remarquer que

$$\int_0^t e^{t-s}x(s)ds = e^{-t} * x(t)$$

D'autre part on a

$$\mathcal{L}\left(x(t) - \int_0^t e^{t-s}x(s)ds\right) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin t)$$

d'où

$$\mathcal{L}\left(x(t) - e^{t} * x(t)\right) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin t)$$

En utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, il vient

$$\mathcal{L}(x(t)) - \mathcal{L}(e^{t} * x(t)) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin t).$$

Donc

$$X(t) - \frac{1}{p-1}X(t)) = \frac{1}{(p-1)^2+1},$$

d'ou

$$X(t) = \frac{p-1}{(p-2)\left[(p-1)^2+1\right]}.$$

Afin de se ramener aux transformations de Laplace usuelles, on effectue une décomposition en éléments simples

$$\frac{p-1}{(p-2)\left[(p-1)^2+1\right]} = \frac{1}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

On obtient

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{2t} + e^{t}\sin t - e^{t}\cos t\right]U(t).$$

Bibliographie

[1] J-P. Ansel et Y. Ducel, Exercices corriges en théorie de la mesure et de l'intégration, Ellipses

[2] N. Bourbaki, Éléments de mathématiques, livre VI : Intégration, Chapitres 1-9, Hermann, Paris, 1952-1969.

[3] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1983

[4] M. Briane et G. Pagès, Théorie de l'intégration, Vuibert, Paris, 2000.

[5] I. Chalendar et E. Fricain, Compléments En Analyse Cours et Exercices, 2010-2011.

[6] T. Callay, *Théoréme de la mesure et de l'intégrale,* Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.

[7] D. L. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, Boston, 1980.

[8] J. L. Doob, Measure Theory, Graduate Texts in Mathematics 143, Springer, New-York, 1994.

[9] M. El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels,* Makting, Paris, 2008.

[10] T. Gallouët et R. Herbin, Mesure, Integration, Probabilites, July 13, 2009.

[11] G. Gasquet , P. Witomski, Analyse de Fourier et Applications, Masson

[12] P. R. Halmos, Measure Theory, Graduate Texts in Mathematics 18, Springer, 1974.

[13] E. Laamri, *mesure, intégration, convolution et transformée de fourier des fonctions,* Dunod, Paris, 2001.

[14] G. Lacombe et P. Massat. Analyse Fonctionnelle, Exercices corrigés , Dunod, Paris, 1999 .

[15] Y. Leroyer et P. Tesson . Mathématiques pour l'ingénieur, Dunod, Paris, 2009

[16] N. Lerner. A Course on integration theory. Birkhäuser, 2014.

[17] D. W. Stroock, A concise introduction to the theory of integration (3ème éd.), Birkhäuser, Boston, 1999.

[18] J. L. Schiff. The Laplace Transform : Theory and Applications. Springer-Verlag, 1999.

[19] J. Yeh, Real analysis. Theory of measure and integration (2ème éd.), World Scientific, Hackensack, 2006.