Chapitre I : Introduction à la méthode des éléments finis

I.1 Introduction

Dans le domaine de l'ingénierie, l'analyse des problèmes se termine souvent à développer un modèle mathématique (une équation ou un système d'équations différentielles, auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites) pouvant représenter d'une manière aussi réaliste que possible le problème recherché, en appuyant sur des théories de base et des hypothèses simplificatrice.

La résolution analytique d’équations différentielles pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n’est pas toujours facile à trouver, en fait, elle n’est possible que pour des cas très simples. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d’une solution analogue à la solution recherchée peut s’avérer coûteux en temps et en moyens.

La résolution analytique d'équations différentielles n'est possible, dans la majorité des cas, que pour des cas simples. Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l’informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est plus possible qu'auparavant de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles très complexe.

La méthode des éléments finis est l’une des techniques numériques les plus puissantes utilisées dans ce genre de problèmes.

L’un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu’elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d’un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

I.2 Définition de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique qui sert à résoudre un système d’équation différentielle ou à dérivées partiel en discrétisant le domaine physique (*D)* en plusieurs sous domaines (*e*) appelés éléments finis, et en proposant une forme approchée de la solution.

Les logiciels de calcul des structures générale (tel que ABAQUS, NASTRAN, CASTEM, CodeAster, ...etc.) ou spécialisés en génie civil et travaux publics (tel que SAP2000, ETABS, Autodesk Robot Structural Analysi, Graitec Concrete, ...etc.) utilisent la méthode des éléments finis dans leur code de calcul.

I.3 Pourquoi la méthode des éléments finis ?

La complicité (voir l’impossibilité) de trouver une solution analytique d’un problème en mécanique des solides (dans la majorité des cas) revient à deux causes :

1- *Le champ à modéliser est inconnu :* le champ de déplacement à rechercher est inconnu. La stratégie proposée par la MEF consiste à supposer une allure générique du champ inconnu ; cette allure est complètement déterminée à partir d’un certain nombre de paramètre (nœuds). Donc, la résolution est obtenue par la détermination de ces paramètres (discrets) au lieu de connaitre le champ lui-même (continu et donc en nombre infini).

2- *La géométrie est trop complexe :* pour laquelle il est difficile de décrire une seule allure du champ inconnu. Il faut donc découper le système en formes plus simples ou les champs locaux sont à déterminer à travers les caractéristiques locales. C'est le principe de la discrétisation.

En résumant, cette méthode consiste à diviser (discrétiser) le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

I.4 Les grandes lignes de la méthode

Dans ce paragraphe, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires à sa mise en œuvre.

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit grosso modo les étapes suivantes (Fig. 1) :

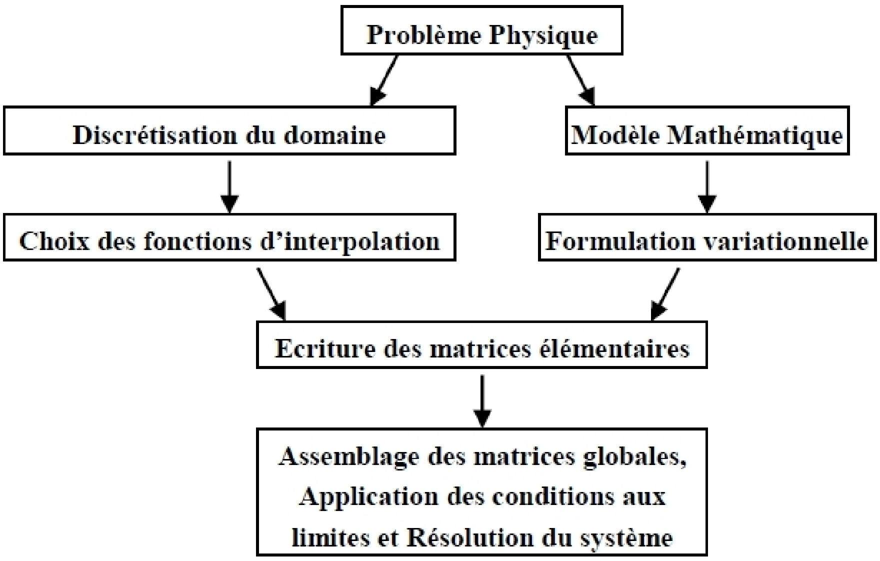

Fig. 1. Etapes générales de la méthode des éléments finis

Etape 1 : *Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.*

La majorité des problèmes d'ingénierie (génie civil, mécanique, électronique, électrotechnique,...) sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites (voir le chapitre 5).

Etape 2 : *Division du domaine en sous domaines (discrétisation).*

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

Etape 3 : *Approximation sur un élément.*

Dans chaque élément la variable, qui est le déplacement, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : *Assemblage et application des conditions aux limites.*

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : *Résolution du système global :*

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il définit soit un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique ou un problème de valeurs critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique.

Un problème de propagation qui concerne le cas transitoire (non stationnaire) dans lequel il faut déterminer les variations dans le temps des variables physiques et la propagation d'une valeur initiale. Les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus fréquentes telles que, méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson.

A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus célèbre est la méthode de Newton Raphson.

I.5 les bases de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une méthode basée sur les trois branches suivantes :

- Les lois de la physiques
- L'analyse numérique
- L'informatique appliquée

I.5.1 Les lois de la physiques

Ce sont les sciences de l'ingénieur telles que la mécanique des milieux continus, l'élasticité, la plasticité, la mécanique générale, la mécanique des fluides, la thermodynamique, la dynamique des structures …etc.

Après avoir établi le modèle physique, l'ingénieur doit chercher le modèle mathématique adéquat qui décrit fidèlement le phénomène physique en question à l'aide d'une fonctionnelle unique.

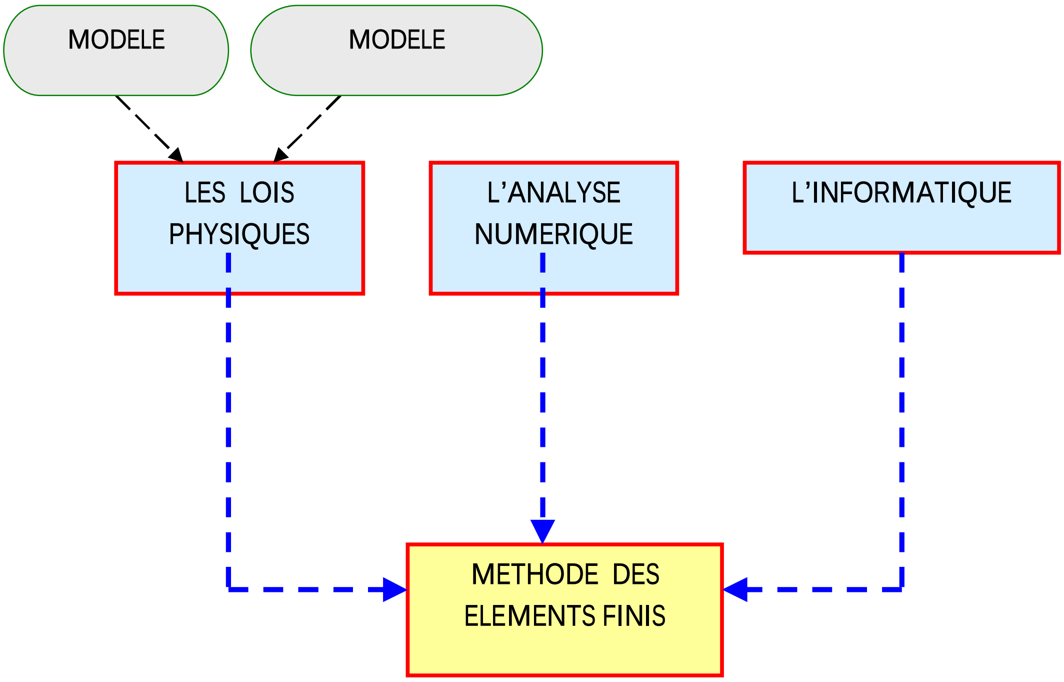

Fig. 2 : Les bases de la MEF

I.4.2 L'analyse numérique

C'est une branche des mathématiques qui utilise les méthodes d'approximations dans la résolution des équations polynomiales, algébriques linéaires et non linéaires par les méthodes matricielles, les équations différentielles …etc.

L'analyse numérique s'avère très efficace pour la méthode des éléments finis.

Si nous voulons calculer un déterminant d'ordre 50, or la méthode des éléments finis peut générer des déterminants d'ordre 10^4. Pour calculer le déterminant d'ordre 50 par la méthode exacte, il faudra effectuer à peu prés 10^{64} opérations. Supposons que l'on possède un micro-ordinateur de vitesse de processeur de 1.2 GHZ, c'est-à-dire qu'il peut effectuer 1.2 x 10^9 opérations élémentaires par seconde. Le temps qu'il va falloir pour achever le calcul est 8.33 x 10^{54} secondes, soit 9.64 x 10^{49} jours, ou 9.64 x 10^{47} années. Il faut donc souligner qu'en pratique, la résolution par les méthodes directes est presque inutilisable.

Par contre, par le biais des méthodes itératives de l'analyse numérique, on peut arriver à la solution en quelques minutes.

I.5.3 L'informatique appliquée

C'est un moyen puisant pour pouvoir résoudre les systèmes d'équations en un temps très réduit. On utilise parfois des mini-ordinateurs ou même des stations de calcul pour résoudre les problèmes de grande taille.

Le modèle de solution est écrit sous forme de programme selon le langage utilisé : Fortran, C++, Turbo-Pascal..etc. Ensuite ce programme est généralement compilé en langage machine, et enfin exécuté.

I.6 Discrétisation du domaine

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets. (Fig. 3)

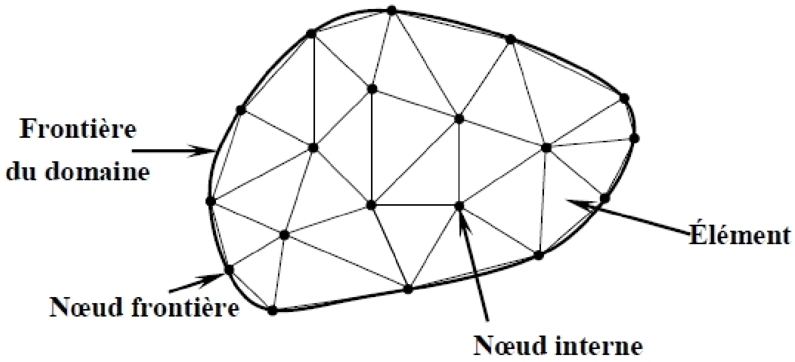

Fig. 3 : Discrétisation du domaine – éléments triangulaires

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

1. Un nœud d'un élément ne doit pas être intérieur à un côté d'un autre du même type. (Fig. 4 a)
2. Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat, éviter les angles proches de 180° ou de 0°. (Fig. 4 b)
3. Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes ; le recouvrement est exclu. (Fig. 4 c)
4. L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les trous entre éléments sont exclus. (Fig. 4 d)
5. Les points nodaux doivent coïncider avec les points où il y a changement du chargement.(Fig. 5)

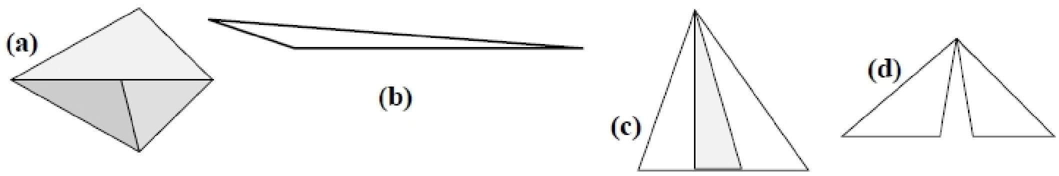

Fig. 4 : Règles de discrétisation

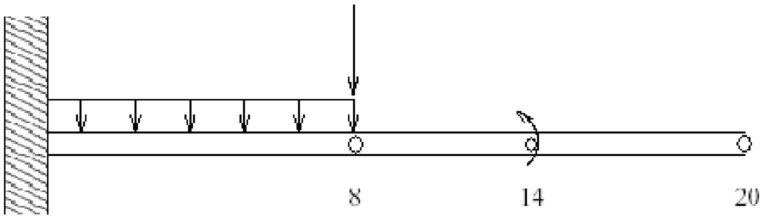

Fig. 5 : Console sous différentes charges

Remarque : Pour une structure donnée, on peut utiliser des éléments de types différents tels que barres, plaques et coques (Fig.6).

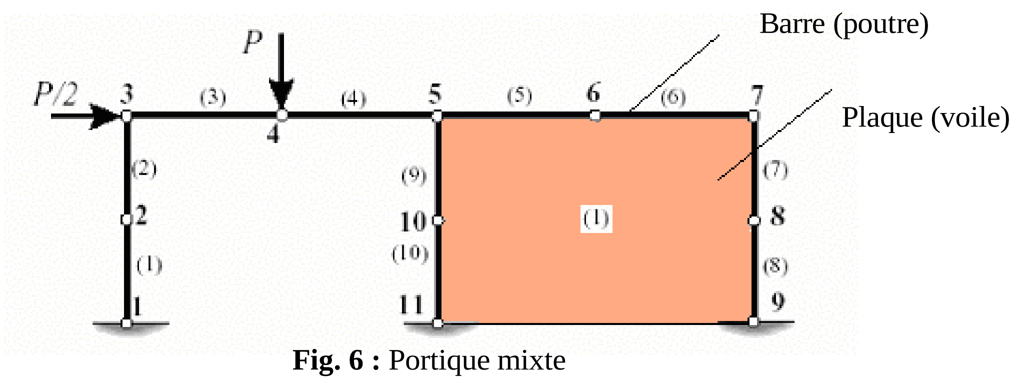

Fig. 6 : Portique mixte

Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande, pour cela, la numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine.

I.7 Type d'éléments utilisé en MEF :

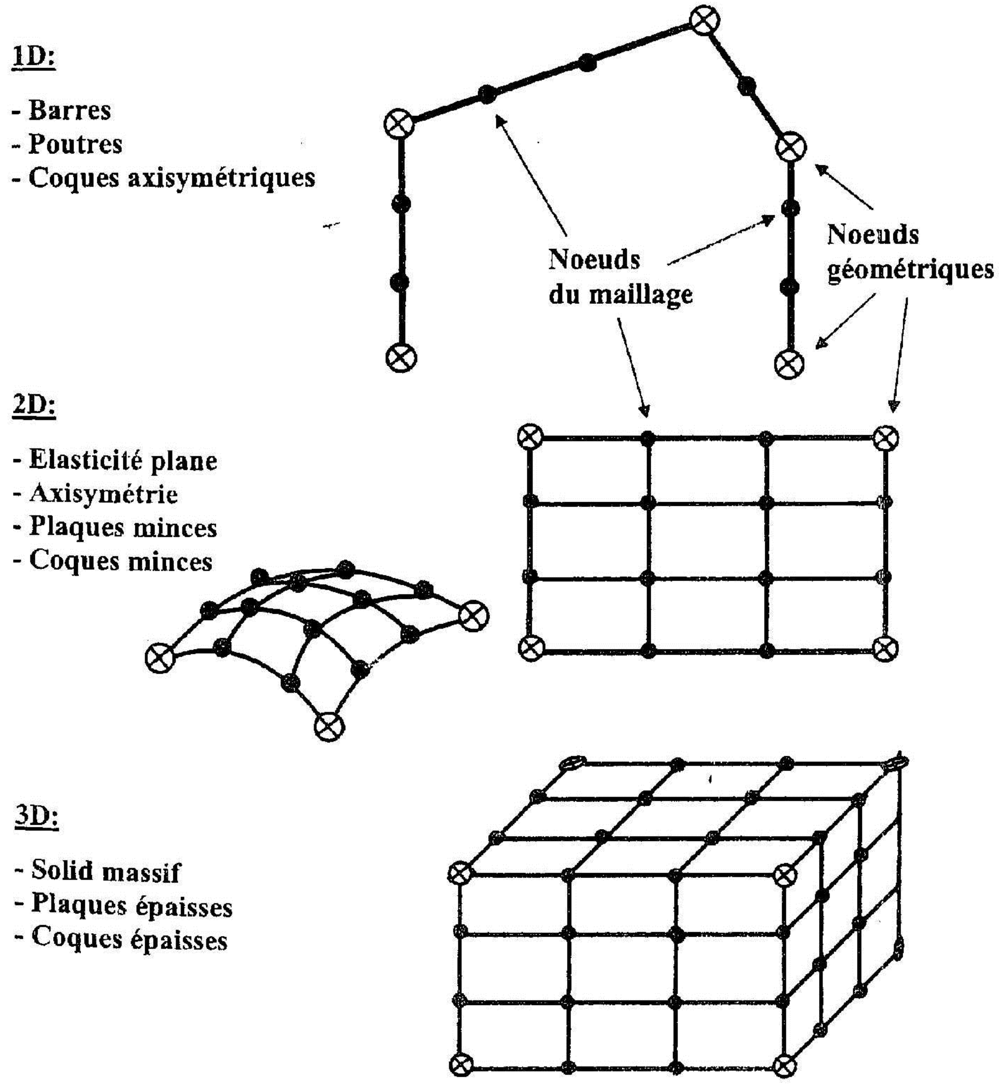

Fig. 7 : Discrétisation des systèmes (nœud physique et nœud de maillage)

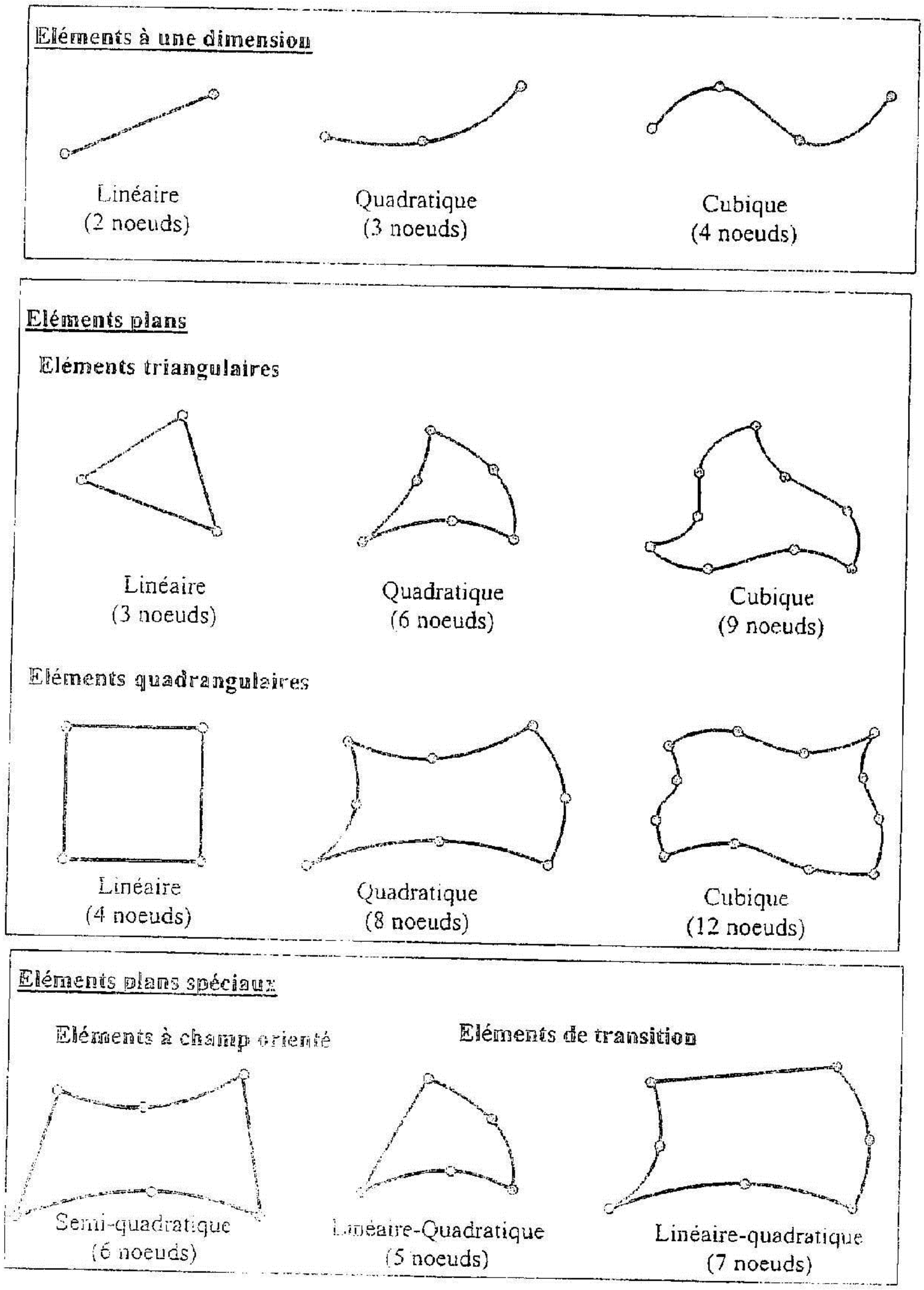

Fig. 8 : Type d'éléments linéique et plans

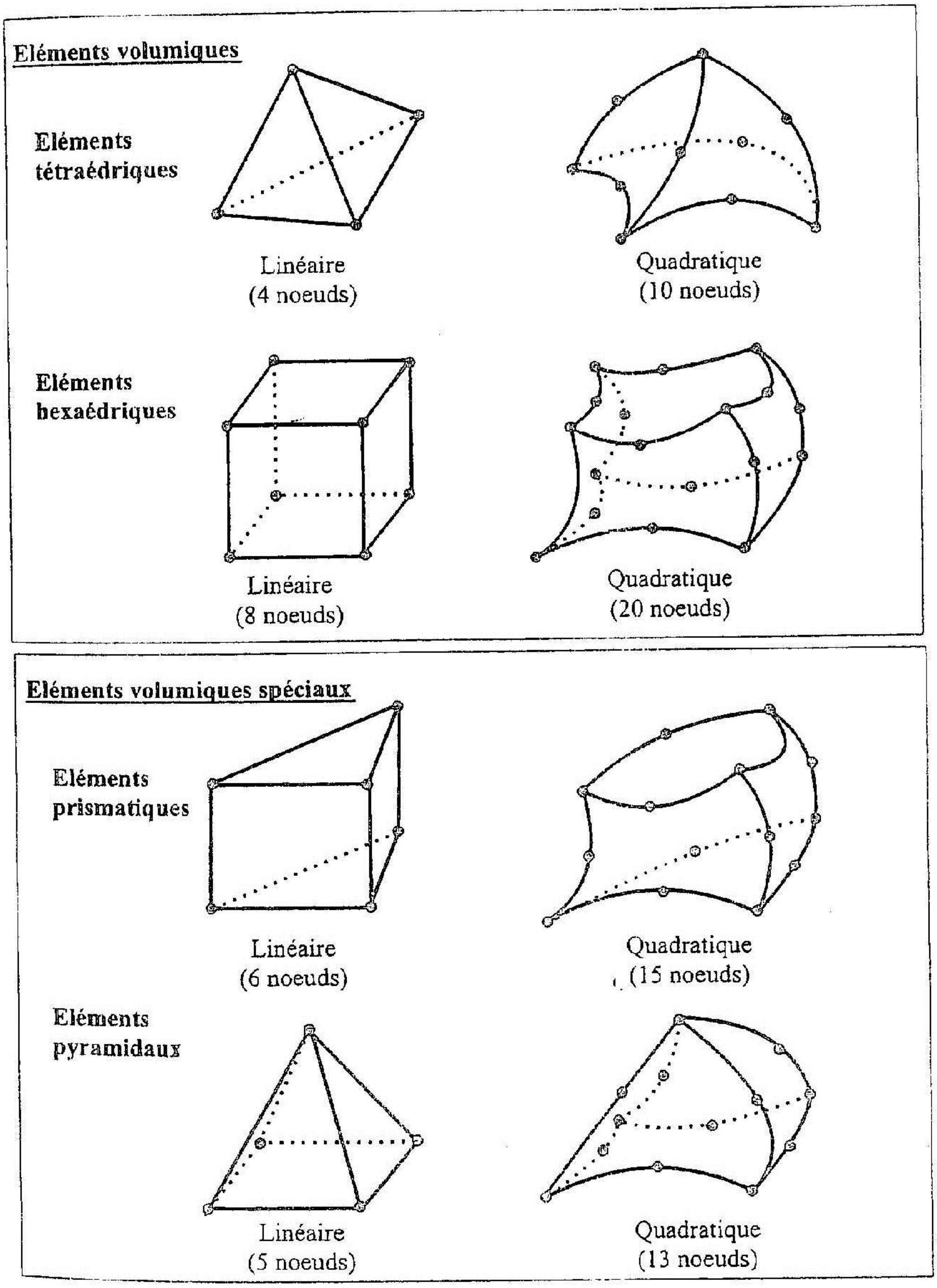

Fig. 9 : Type d'éléments volumiques

Pourquoi on étudie la MEF ?

Ce cours d'élément finis est programmé pour les étudiants de master (Structures, et travaux publics) pour deux raisons :

1- Pour comprendre le fonctionnement des logiciels de calcul des structures (qui utilisent cette méthode), et par la suite éviter les erreurs de conception liée à la modélisation par MEF et qui peuvent êtres graves.

2- On utilise la MEF dans le domaine de la recherche scientifique pour trouver des solutions numériques à des problèmes d'ingénierie, ou bien pour avoir une référence de comparaison avec des solution analytique.