Chapitre II: Rappel sur le calcul matriciel

Le calcul par éléments finis nécessitant le maniement de nombreuses valeurs numériques, il est plus aise d ′ exprimer celles-ci sous forme matricielle.

En regroupant des termes de même nature au sein d'une seule et même variable, cette écriture plus synthétique permet en effet une meilleure compréhension des différentes phases de construction de la méthode.

Ceci nécessite néanmoins la maitrise des opérations de base associées a ce type de calcul : l'addition ou le produit de plusieurs matrices, la résolution de systèmes linéaires, etc.

II.1 Notion de matrice

Soit la fonction polynomiale suivante :

$$v(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \text{ avec } x \in [0, L] \tag{2.1}$$

Et sa dérivée :

$$v'(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 \tag{2.2}$$

Supposant que $v(x)$ et $v'(x)$ valent v_1 et β_1 en $x = 0$, v_2 et β_2 en $x = L$, on peut aisément établir le système de 4 équations suivant :

$$\begin{cases} v_1 = v(0) = b_0 \\ \beta_1 = v'(0) = b_1 \\ v_2 = v(L) = b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 \\ \beta_2 = v'(L) = b_1 + 2b_2 L + 3b_3 L^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Cependant, ce système peut être exprimé de manière plus synthétique sous forme matricielle en posant que le vecteur v

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \beta_1 \\ v_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

peut être relié au vecteur b

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Anticipant sur les règles relatives au produit des matrices (cf. paragraphe II.2.2), on a donc :

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \beta_1 \\ v_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = [R] \cdot \{b\}$$

équivalent au système d'équations (2.3).

Dans ce cas $\{v\}$ et $\{b\}$ sont des vecteurs " colonne " a 4 lignes alors que la matrice $[R]$ est une matrice dite carrée a 4 lignes et 4 colonnes. De manière générale, une matrice peut être caractérisée par un ensemble de nombres ordonnes et regroupes en n lignes et m colonnes.

On aura alors une matrice de dimensions $n \times m$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1j} & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2j} & . & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3j} & . & a_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & . & a_{ij} & . & a_{im} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nj} & . & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

a_{ij} caractérisant le terme des i^{eme} ligne et j^{eme} colonne de la matrice $[A]$. Si $n = 1$ ou $m = 1$, la matrice sera associée suivant le cas, soit a un vecteur ligne, soit a un vecteur colonne qui sont généralement notes { } . De plus et spécifiquement pour les matrices dites carrées ($n = m$), les termes a_{ii} seront appelés termes diagonaux et formeront la diagonale de la matrice.

II.2 Opérations de base

II.2.1 Addition

Soit deux matrices $[A]$ et $[B]$ de dimensions $n \times m$ construites a partir de (2.4), la matrice $[C]$ de mêmes dimensions, somme des matrices $[A]$ et $[B]$, sera obtenue en posant que chacun des termes c_{ij} est égale a $a_{ij} + b_{ij}$. On aura alors :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & . & c_{1j} & . & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & . & c_{2j} & . & c_{2m} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & . & c_{3j} & . & c_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & . & c_{ij} & . & c_{im} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & . & c_{nj} & . & c_{nm} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & . & a_{1j}+b_{1j} & . & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & . & a_{2j}+b_{2j} & . & a_{2m}+b_{2m} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & . & a_{3j}+b_{3j} & . & a_{3m}+b_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & a_{i3}+b_{i3} & . & a_{ij}+b_{ij} & . & a_{im}+b_{im} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & . & a_{nj}+b_{nj} & . & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix} = [A]+[B] \quad (2.5)$$

Dans le cas d'une différence des matrices [*A*] et [*B*], on posera de la même façon :

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (2.6)$$

Exemples : Soit les matrices

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et

$$[B] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A]+[B] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad [C] = [A]-[B] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -5 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

II.2.2 Produit

■■ Produit d'une matrice par un scalaire

Soit une matrice [*A*] de dimensions $n \times m$, la matrice [*C*] , produit de la matrice [*A*] par le scalaire l sera obtenue en multipliant chacun des termes de la matrice [*A*] par l. On aura donc :

$$c_{ij} = \lambda \, . \, a_{ij} \quad (2.7)$$

Exemple :

$$[C] = 3 \cdot [A] = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

■■ Produit de 2 matrices

Soit deux matrices [*A*] et [*B*] de dimensions respectives $n \times m$ et $m \times l$, la matrice [*C*], produit des matrices [*A*] et [*B*][1], de dimensions $n \times l$, sera obtenue en posant que les termes c_{ij} sont égaux a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \times b_{kj} \quad (2.8)$$

Par exemple, on trouvera pour le premier terme :

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + ... + a_{1m} \times b_{m1}$$

Cependant et pour que ce produit soit possible, il est important de noter que le nombre de colonnes de la matrice [*A*] doit être égal au nombre de lignes de la matrice [*B*].

Exemple : Soit les matrices A et B:

$$[A]=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\3&1&0&5\end{bmatrix}\ \text{et}\ [B]=\begin{bmatrix}4&9\\3&1\\1&6\\7&5\end{bmatrix}$$

$$[C]=[A]\cdot[B]=\begin{bmatrix}1\cdot4+0\cdot3+2\cdot1+3\cdot7 & 1\cdot9+0\cdot1+2\cdot6+3\cdot5\\3\cdot4+1\cdot3+0\cdot1+5\cdot7 & 3\cdot9+1\cdot1+0\cdot6+5\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27&36\\50&53\end{bmatrix}$$

■■ **Produit de 3 matrices**

Soit trois matrices [*A*] , [*B*] et [*C*] de dimensions respectives $n \times m$, $m \times l$ et $l \times p$, la matrice [*F*] , produit des matrices [*A*] , [*B*] et [*C*] , de dimensions $n \times p$ sera obtenue en effectuant dans un premier temps soit le produit [*A*].[*B*] soit celui de [*B*].[*C*], les deux approches amenant au même résultat.

$$[F]=[A]\cdot[B]\cdot[C]=[A]\cdot\left(\overbrace{[B]\cdot[C]}^{[D]}\right)=[A]\cdot[D]=\left(\overbrace{[A]\cdot[B]}^{[E]}\right)\cdot[C]=[E]\cdot[C]$$

Exemple : Soit les matrices A, B et C

$$[A]=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\3&1&0&5\end{bmatrix},[B]=\begin{bmatrix}4&9\\3&1\\1&6\\7&5\end{bmatrix}\ \text{et}\,[C]=\begin{bmatrix}27&36\\50&53\end{bmatrix}$$

$$([A]\cdot[B])\cdot[C]=\left(\begin{bmatrix}1&0&2&3\\3&1&0&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&9\\3&1\\1&6\\7&5\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}27&36\\50&53\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}27&36\\50&53\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}27&36\\50&53\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2529&2880\\4000&4609\end{bmatrix}$$

$$[A]\cdot([B]\cdot[C])=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\3&1&0&5\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}4&9\\3&1\\1&6\\7&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}27&36\\50&53\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\3&1&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}558&621\\131&161\\327&354\\439&317\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2529&2880\\4000&4609\end{bmatrix}$$

II.2.3 Matrice transposée

Soit la matrice $[A]$ de dimensions $n \times m$, la matrice $[B]$ de dimensions $m \times n$ transposée de $[A]$ (notée $[A]^T$) sera obtenue en posant pour chacun des termes de $[B]$ que $b_{ij} = a_{ji}$. Pratiquement, ce calcul revient à échanger les lignes et les colonnes de la matrice $[A]$.

Exemple : soit la matrice A et B

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = [A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

On notera par ailleurs que :

$$([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T \tag{2.9}$$

II.3 Matrices carrées

II.3.1 Matrice identité

La matrice identité, notée $[I]$, est une matrice carrée dont les termes diagonaux sont égaux a 1, tous les autres étant nuls. De ce fait, le produit de la matrice identité par une matrice $[A]$ quelconque (ou inversement) est égale a la matrice $[A]$ elle-même.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [I] \cdot [A] = [A] \cdot [I] = [A] \tag{2.10}$$

II.3.2 Matrice inverse

La matrice inverse de $[A]$ notée $[A]−1$ est définie telle que $[A]$ _$[A]$ = $[A]$_$[A]$ = $[I]$ et peut être calculée en posant :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot Com[A]^T \tag{2.11}$$

ou $Com[A]$ et $\det[A]$ sont respectivement la comatrice et le déterminant de la matrice $[A]$.

La matrice $[A]$ sera donc inversible a condition que son déterminant soit différent de 0.

■■ Calcul du déterminant

– 2 dimensions :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \tag{2.12}$$

– 3 dimensions :

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

Qui peut être calcule grâce à la règle de Sarraus :

$$\begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{array}$$

----------- + Produit des 3 termes

——— – Produit des 3 termes

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

■■ Calcul de la comatrice et la matrice inverse

La comatrice de $[A]$, notée $Com[A]$, correspond a la matrice des cofacteurs de $[A]$. Le cofacteur du terme i, j de la matrice $[A]$ est obtenu en multipliant par $(-)^{i+j}$ le déterminant de la sous-matrice issue de la suppression des ligne i et colonne j.

– 1 dimension :

$$[A] = a_{11} \Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}} \tag{2.14}$$

– 2 dimensions :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow Com[A] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

– 3 dimensions :

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow Com[A]=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow [A]^{-1}=\frac{1}{\det[A]}\begin{bmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

II.3.3 Méthodes de résolution de systèmes linéaires

Considérant n équations a n inconnues (qui sont regroupées dans le vecteur $\{q\}$), la résolution du système linéaire de type $[K].\{q\} = \{F\}$ amène a isoler le vecteur $\{q\}$ de manière a obtenir :

$$[K]\cdot\{q\}=\{F\} \Leftrightarrow \underbrace{[K]^{-1}\cdot[K]}_{[I]}\cdot\{q\}=[K]^{-1}\cdot\{F\} \Rightarrow \{q\}=[K]^{-1}\cdot\{F\} \quad (2.17)$$

Ceci suppose bien sur que le déterminant de la matrice $[K]$ est différent de 0.

Dans le cas contraire, on parlera de système singulier. Nous verrons d'ailleurs par la suite qu'en éléments finis la singularité de la matrice de rigidité $[K]$ est souvent a associer a un problème de conditions d'appui.

De plus, la méthode de calcul par éléments finis amenant dans la plupart des cas a la résolution d'un système de n équations a n inconnues de grandes dimensions, l'inversion conventionnelle vue au chapitre précédent s'avérera peu efficace.

Les outils de calcul par éléments finis font donc très souvent appel a des méthodes plus pertinentes telles que celles par élimination de Gauss, de Cholesky ou frontale.

Il existe deux grandes familles de méthodes de résolution : les méthodes directes (Gauss, Cholesky, frontale, etc.) et les méthodes itératives (gradients conjugues).

Leur efficacité sera directement liée aux performances du ou des processeurs de l'ordinateur utilise, de la vitesse d'accès au disque dur mais surtout de la quantité de mémoire vive (RAM) disponible.

Généralement, les méthodes de gradients conjugues se révèlent moins gourmandes en terme de mémoire. Ceci étant et spécifiquement pour les problèmes linaires élastiques comportant plusieurs cas de charges, leur utilisation apparait moins pertinente dans la mesure ou celles-ci nécessitent une résolution complète a chaque changement d'état de charges.

En effet et dans le cas des méthodes directes appliquées aux problèmes linéaires élastiques, seul le premier cas de charges nécessite une inversion de la matrice de rigidité, les résultats des cas suivants étant obtenus par linéarité âpres stockage de la matrice inversée en mémoire (uniquement si les conditions d'appui ou de température ne varient pas).

■■ Résolution par la méthode par élimination de Gauss

Soit le système à résoudre

$[K]\cdot\{q\}=\{F\}$ (*n* équations à *n* inconnues) :

$$\begin{cases} k_{11}q_1+k_{12}q_2+k_{13}q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{1n}q_n=F_1 \\ k_{21}q_1+k_{22}q_2+k_{23}q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{2n}q_n=F_2 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ k_{n1}q_1+k_{n2}q_2+k_{n3}q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{nn}q_n=F_n \end{cases} \tag{2.18}$$

Pour éliminer la 1re inconnue, la méthode consistera à exprimer q_1 en fonction des autres inconnues et à la remplacer dans les (n –1) équations restantes :

$$q_1=\frac{1}{k_{11}}\left(F_1-k_{12}q_2-k_{13}q_3-\dots\dots\dots\dots-k_{1n}q_n\right) \tag{2.19}$$

Donc et en remplaçant (2.19) dans (2.18), le système devient :

$$\begin{cases} k_{11}q_1+k_{12}q_2+k_{13}q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{1n}q_n=F_1 \\ \qquad k_{22}^1q_2+k_{23}^1q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{2n}^1q_n=F_2^1 \\ \qquad\quad . \qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\quad . \qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\quad . \qquad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad k_{n2}^1q_2+k_{n3}^1q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{nn}^1q_n=F_n^1 \end{cases} \tag{2.20}$$

Avec

$$\begin{cases} k_{ij}^s=k_{ij}^{s-1}-\dfrac{k_{is}^{s-1}k_{sj}^{s-1}}{k_{ss}^{s-1}} \\ F_i^s=F_i^{s-1}-\dfrac{k_{is}^{s-1}F_s^{s-1}}{k_{ss}^{s-1}} \end{cases}$$

Au terme de la n$^{\text{ième}}$ élimination, le systeme s'écrit sous forme triangulaire ce qui rend aisée sa résolution :

$$\begin{cases} k_{11}q_1+k_{12}q_2+k_{13}q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{1n}q_n=F_1 \\ \qquad k_{22}^1q_2+k_{23}^1q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{2n}^1q_n=F_2^1 \\ \qquad\qquad k_{33}^2q_3+\dots\dots\dots\dots+k_{3n}^2q_n=F_3^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k_{nn}^{n-1}q_n=F_n^{n-1}\Rightarrow q_n \end{cases} \tag{2.21}$$

Ceci étant, l'utilisation de la méthode par élimination n'est envisageable que si les termes diagonaux de la matrice [*K*] sont non nuls. Dans le cas contraire, un ou plusieurs pivots nuls rendront l'inversion de la matrice [*K*] impossible. Bien évidemment, tous ces pivots doivent être différents de zéro et nous verrons même qu'en éléments finis, ceux-ci doivent être positifs.

■■ **Exemple de résolution par la méthode de Gauss**

Soit le système d'équations suivant :

$$\frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

- **1re étape : élimination de U_2**

De la 1re équation de (2.22), on déduit que :

$$U_2 = \frac{V_3 + U_4}{3} \tag{2.23}$$

En remplaçant (2.23) dans (2.22), la nouvelle expression du système fait apparaitre quatre équations indépendantes de U_2 :

$$\frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\frac{1}{3} & 1-\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{3} & 3-\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

- **2^{em} étape : élimination de V_2**

Pour éliminer V_2 , on répète l'opération en considérant cette fois la deuxième équation de (2.24) d'ou :

$$V_2 = \frac{V_3}{2} \tag{2.25}$$

Le système devient alors :

$$\frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}-\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

Et ainsi de suite…

- **3^{em} étape : élimination de V_3**

$$V_3 = \frac{6}{7}\left(-\frac{2PL}{ES} - \frac{2}{3}U_4 + V_4\right) \tag{2.27}$$

$$\frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) & \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) & 2-\frac{6}{7} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}P \\ -\frac{6}{7}P \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{4}{7}P \\ -\frac{6}{7}P \end{Bmatrix}$$

- **4[em] étape : élimination de U_4**

$$U_4 = \frac{PL}{2ES} - \frac{V_4}{4} \tag{2.29}$$

$$\frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7}+\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{4}{7}P \\ -\frac{6}{7}P-\frac{1}{7}\cdot P \end{Bmatrix} \tag{2.30}$$

Soit finalement :

$$\frac{ES}{2L}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7}-\frac{1}{7} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{4}{7}P \\ -\frac{6}{7}P-\frac{1}{7}\cdot P \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

On déduit de la 5e équation :

$$\frac{ES}{2L}\cdot V_4 = -P \Rightarrow V_4 = -\frac{2PL}{ES} \tag{2.32}$$

D'ou a partir de (2.23), (2.25), (2.27) et (2.29), les valeurs des autres inconnues :

$$\begin{aligned} U_4 &= \frac{PL}{2ES} - \frac{V_4}{4} = \frac{PL}{ES} \\ V_3 &= \frac{6}{7}\left(-\frac{2PL}{ES} - \frac{2}{3}U_4 + V_4\right) = -\frac{4PL}{ES} \\ V_2 &= \frac{V_3}{2} = -\frac{2PL}{ES} \\ U_2 &= \frac{V_3 + U_4}{3} = -\frac{PL}{ES} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Bien évidemment, la méthode par élimination de Gauss s'avère dans ce cas bien compliquée comparée a une approche plus classique telle que celle décrite ci-dessous.

Reprenant le système (2.22), les 2e et 5e équations permettent de déduire respectivement que $2V_2 = V_3$ et $2V_4 = V_3$ d'ou $V_2 = V_4$.

De la somme des 1re et 4e équations résulte que $2U_2 + 2U_4 = 0 \Rightarrow U_2 = -U_4$.

D'ou a partir de la 1re : $3U_2 - V_3 - U_4 = 0 \Rightarrow V_3 = 4U_2$.

En remplaçant ces différents résultats dans la 3e équation, on obtient finalement :

$$-U_2 - V_2 + 2V_3 + U_4 - V_4 = -\frac{2PL}{ES} \Rightarrow -2U_2 + V_3 = -\frac{2PL}{ES} \Rightarrow V_3 = -\frac{4PL}{ES}$$

Soit

$$U_2 = -U_4 = -\frac{PL}{ES} \text{ et } V_2 = V_4 = -\frac{2PL}{ES}$$