Chapitre III : Elément barre

III-1 Définition:

L'élément barre est utilisé dans les assemblages de barres ou de tiges travaillant en traction ou compression. On les trouve surtout en charpente métallique et dans les systèmes à treillis.

L'élément barre est élément qui a une dimension beaucoup plus grande par rapport aux deux autres. Leur chargement est seulement axiale.

III-2 Formulation de l'élément barre :

Plusieurs éléments finis barres ont existés dans la bibliographie, le cas le plus simple est l'élément barre à deux nœuds, représenté dans la figure ***Fig. I-1***.

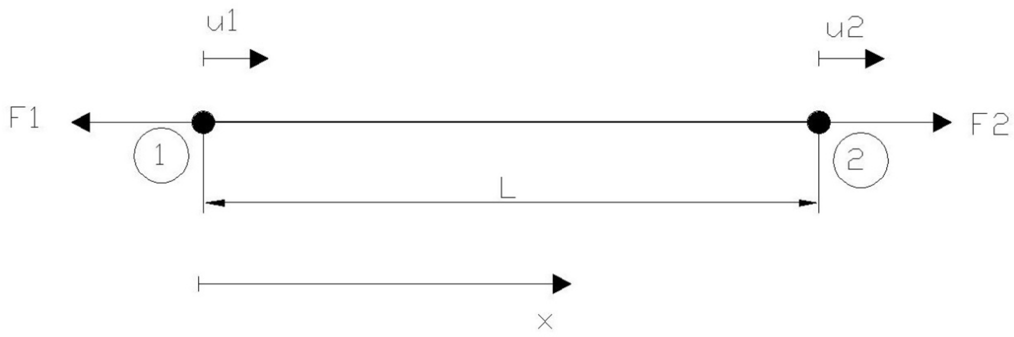


Fig. III-1 : Elément barre à deux nœuds

Pour formuler cet élément, on considère une barre de section A de longueur L et constitué d'un matériau homogène de module de Young E, soumise à des forces de traction aux extrémités 1 et 2.

L'approximation du champs de déplacement u(x) s'écrit sous la forme polynomiale suivante:

$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

Les deux conditions nodales permettent de déterminer les coefficients a_0 et a_1:

$$u(0) = a_0 + a_1 0 = u_1$$
$$u(L) = a_0 + a_1 L = u_2$$

Ou u_1 et u_2 sont respectivement les déplacements aux nœuds 1 et 2. La solution

donne les deux coefficients $a_0 = u_1$, et $a_1 = \dfrac{u_2 - u_1}{L}$. Ainsi, on a :

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x$$

En regroupant les termes en facteur des valeurs nodales u_1 et u_2, on obtient :

$$u(x) = (1 - \frac{x}{L})u_1 + \frac{x}{L} u_2$$

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

D'où : $N_1(x) = (1 - \frac{x}{L})$ et $N_2(x) = (1 - \frac{x}{L})$

N_1 et N_2 sont les fonctions de forme reliées aux nœuds 1 et 2, respectivement.

Le champs de déplacement dans le cas de la barre s'écrit sous cette forme:

$$e_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2$$
$$= \frac{-1}{L} u_1 + \frac{1}{L} u_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

La loi de comportement d'une barre, c'est la loi de Hook dans ce cas, s'écrit comme suit :

$$s_x = Ee_x = \begin{bmatrix} \frac{-E}{L} & \frac{E}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Et on sait que la contrainte dans le cas de compression/traction s'écrit :

$$s_x = \frac{F}{A} \quad \Rightarrow F = s_x A = \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

F: est la force normale appliquée au nœud..

Si on considère l'équilibre de l'élément :

$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = -F_2$ donc :

$$F_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

La convention de signe: les déplacements ainsi que les forces sont positives s'ils suivent le sens du repère, et négative dans la cas contraire.

En réarrangeant ces deux équations (1) et (2) sous forme matricielle, cela va nous donner :

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Ou simplement : $[K_e]\{u_e\} = \{F_e\}$, ou

$\{u_e\}$ est le vecteur des déplacements nodaux;

$\{F_e\}$ est le vecteur des forces nodales ;

$[K_e]$ est la matrice locale de rigidité élémentaire.

III-3 Passage au repère de la structure (global) :

Si les propriétés sont définies dans le repère local de l'élément, il est nécessaire de redéfinir les grandeurs matricielles de tous les éléments dans un repère unique, avant de faire l'assemblage. Ce passage du repère local au repère global se fait par une rotation des axes.

Pour faire cela, on va considérer l'élément de barre dans ses deux repères local et global, illustrée dans la figure suivante *Fig.III-2* :

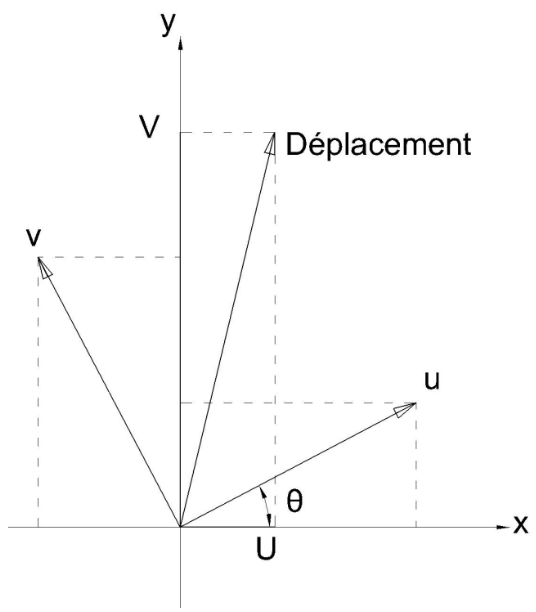


Fig.III-2 : Principe de changement de repère

L'angle θ est l'angle entre le repère local de la barre et le repère global de la structure.

Le vecteur de déplacement local va être de la forme : $\{u_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$

Si on écrit les déplacements nodaux dans le repère global en fonction de ceux dans le repère local, on trouve :

$$\text{Déplacement}_{x1} = U_1 = u_1 \cos\theta - v_1 \sin\theta$$

$$\text{Déplacement}_{y1} = V_1 = u_1 \sin\theta + v_1 \cos\theta$$

De même pour le deuxième nœud :

$$\text{Déplacement}_{x2} = U_2 = u_2 \cos\theta - v_2 \sin\theta$$

$$\text{Déplacement}_{y2} = V_2 = u_2 \sin\theta + v_2 \cos\theta$$

On reformule ces quatre équations sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Ou simplement : $\{U_e\} = [T_e]\{u_e\}$

$\{U_e\}$: est le vecteur de déplacements nodaux dans le repère global.

$[T_e]$: est la matrice de passage ou de rotation.

C’est une matrice orthogonal et son déterminant égale à 1, donc sa matrice inverse est la transposé de cette dernière.

La matrice de rigidité élémentaire dans le repère global sera de la forme:

$$[K_e^g] = [T_e]^T [K_e][T_e]$$

$$[K_e^g] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{l} & 0 & \frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[K_e^g] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

(c : cos θ, s : sin θ)

De même pour le vecteur des forces dans le repère global :

$$\left\{F_e^{global}\right\} = \left[T_e\right]^T \left\{F_e^{local}\right\}$$

III-4 Assemblage :

Une matrice de rigidité globale doit être établie et qui a une dimension de *(n x n)* tel que *n* est le nombre de degré de liberté de la structure entière.

Exemple :

$$\left[K\right]_1 = \begin{bmatrix} k_{11}^{\ 1} & k_{12}^{\ 1} \\ k_{21}^{\ 1} & k_{22}^{\ 1} \end{bmatrix} \quad et \quad \left[Q\right]_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[K\right]_2 = \begin{bmatrix} k_{11}^{\ 2} & k_{12}^{\ 2} \\ k_{21}^{\ 2} & k_{22}^{\ 2} \end{bmatrix} \quad et \quad \left[Q\right]_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de rigidité globale, il suffit d'assembler ces deux matrices de la façon suivante :

$$\left[K\right]_G = \begin{bmatrix} k_{11}^{\ 1} & k_{12}^{\ 1} & 0 \\ k_{21}^{\ 1} & k_{22}^{\ 1} + k_{11}^{\ 2} & k_{12}^{\ 2} \\ 0 & k_{21}^{\ 2} & k_{22}^{\ 2} \end{bmatrix} \quad et \quad \left[Q\right] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

III-5 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont indispensables pour rendre la matrice de rigidité inversible.

Dans le cas ou on a un déplacement nul dans un nœud (encastrement ou un appui dans le sens bloqué), on doit éliminer la ligne et la colonne du déplacement concerné (dans la matrice de rigidité) ainsi que la force correspondante qui sera une force de réaction.

III-6 Réactions d’appuis

Pour calculer les réactions d’appui, il suffit d’utiliser le système matriciel global et après avoir calculé les déplacements, pour trouver les valeurs des réactions.

III-7 Forces internes :

Les force internes (compression ou traction) de l’élément barre peuvent être obtenues directement à partir de l’équation suivante :

$$\left\{F_e^{local}\right\} = \left[T_e\right]\left\{F_e^{global}\right\}$$

Pour un élément de nœud (*i,j*), tel que "*i*" est le premier nœud et "*j*" est le deuxième nœud, l’effort normal (compression ou traction) correspond à la force nodale à l'extrémité (*j*) de la barre(c.-à-d. le troisième composant du vecteur des force élémentaire dans le repère local $\{F_e^{local}\}$), il devient :

$$\begin{cases} F_{jx}=\frac{EA}{L}[\cos^2\theta(u_j-u_i)+\cos\theta\sin\theta(v_j-v_i)] \\ F_{jy}=\frac{EA}{L}[\cos\theta\sin\theta(u_j-u_i)+\sin^2\theta(v_j-v_i)] \end{cases}$$

A partir de ces trois dernières équations, l'effort normal peut être écrit :

$$N=\cos\theta\, F_{jx}+\sin\theta\, F_{jy}$$

En développant cette dernière équation on trouve :

$$N=\frac{EA}{L}[\cos\theta\,(u_j-u_i)+\sin\theta(v_j-v_i)]$$

Ou sous forme matricielle :

$$N=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\cos q & \sin q\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_j-u_i \\ v_j-v_i\end{Bmatrix}$$

III-7 Exercices :

III-7-1 Exercices 1:

-1. Calculer les déplacements des nœuds pour la structures indiquée sur la figure.

-2. Calculer les réactions des appuis.

-3. Calculer les contraintes dans chaque barre.

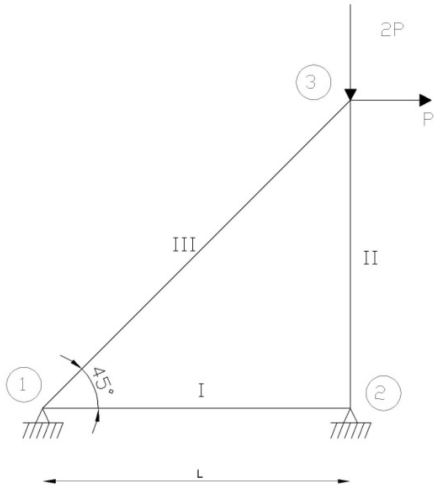


Fig.III-3

Solution:

-1.

Elément	Nœuds	Longueur	angle	c	s	c^2	s^2	cs
I	1-2	L	0	1	0	1	0	0
II	2-3	L	90°	0	1	0	1	0
III	1-3	$\sqrt{2}$L	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Les matrices élémentaires de chaque barre dans le repère global:

Elément I: $K_1=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Elément I: $K_2=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Elément I: $K_3=\frac{EA}{2\sqrt{2}L}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Assemblage des matrices éléménetaires:

$$K=K_1+K_2+K_3$$

Cet assemblage se faite en respectant les degrés de liberté de chaque matrice.

$$K=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1.35 & 0.3536 & -1 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & -1 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix}$$

Le système matriciel global s'écrit:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1.35 & 0.3536 & -1 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & -1 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U1 \\ V1 \\ U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ Rx2 \\ Ry2 \\ P \\ -2P \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites: $U_1=V_1=U_2=V_2=0$.

Après avoir entré les contions aux limite:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1.35 & 0.3536 & -1 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & -1 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U1 \\ V1 \\ U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ Rx2 \\ Ry2 \\ P \\ -2P \end{bmatrix}$$

le système réduit peut s'écrire comme suit:

$$\begin{bmatrix} 0.3536 & 0.3536 \\ 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ -2P \end{bmatrix}$$

Déterminant(K)=0.3536$(\frac{EA}{L})^2$

$$\begin{bmatrix} U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA}\begin{bmatrix} 0.3536 & -0.3536 \\ -0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ -2P \end{bmatrix} = \frac{PL}{EA}\begin{Bmatrix} 5.828 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

-2. Calcule des réactions des appuis:

$$\begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ Rx2 \\ Ry2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3536 & 0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ -P \\ 0 \\ 3P \end{bmatrix}$$

-3. Calcul des contrainte:

$\sigma = \frac{N}{A}$: N est l'effort normal

<u>Elément I</u>

$$N_1 = \frac{EA}{L}\left[\cos q \quad \sin q\right]\begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{L}\left[1 \quad 0\right]\begin{Bmatrix} 0-0 \\ 0-0_1 \end{Bmatrix}$$

$$= 0 \Rightarrow s = 0$$

<u>Elément II:</u>

$$N_2 = \frac{EA}{L}\left[\cos q \quad \sin q\right]\begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\left[0 \quad 1\right]\begin{Bmatrix} 5.828-0 \\ -3-0 \end{Bmatrix}\frac{PL}{EA} = -3P \Rightarrow s = \frac{-3P}{A}$$

Elément III:

$$N_3 = \frac{EA}{L}\left[\cos q \quad \sin q\right]\begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 5.828 \\ -3-0 \end{Bmatrix}\frac{PL}{EA} = -3P \Rightarrow s = \frac{-1.414P}{A}$$

III-7-2 Exercices 2:

On se propose de définir la relation Force Déplacement pour la structure en treillis représentée ci-dessous (Fig. I-3).

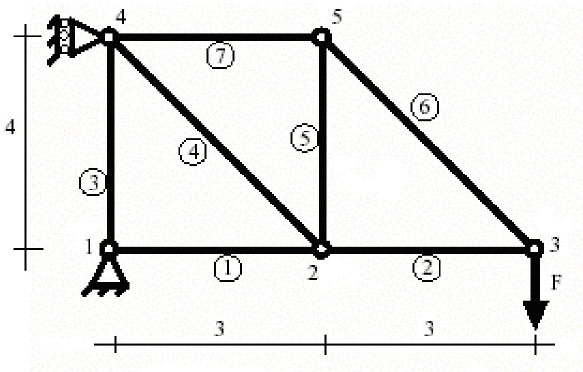


Fig. III-4 : Charpente plane à 7 barres et 5 nœuds

Le tableau suivant résume les caractéristiques géométriques de la structure:

Elément	Nœuds	Longueur	angle	c	s	c^2	s^2	cs
I	1-2	3	0	1	0	1	0	0
II	2-3	3	0	1	0	1	0	0
III	1-4	4	90°	0	1	0	1	0
IV	2-4	5	126.87°	-0.6	0.8	0.36	0.64	-0.48
V	2-5	4	90°	0	1	0	1	0
VI	3-5	5	126.87°	-0.6	0.8	0.36	0.64	-0.48
VII	4-5	3	0	1	0	1	0	0

On établit la matrice de rigidité de chaque barre :

Barre (1) : Barre (1,2) : $L_{1,2} = 3m \quad q = 0 \quad c = 1 \quad s = 0$

$$\begin{Bmatrix} X_1^1 \\ Y_1^1 \\ X_2^1 \\ Y_2^1 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

<u>Barre (2) :</u> <u>Barre (2,3)</u> : $L_{2,3} = 3m \quad q = 0 \quad c = 1 \quad s = 0$

$$\begin{Bmatrix} X_2^2 \\ Y_2^2 \\ X_3^2 \\ Y_3^2 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

<u>Barre (3) :</u> <u>Barre (1,4)</u> : $L_{1,4} = 4m \quad q = 90° \quad c = 0 \quad s = 1$

$$\begin{Bmatrix} X_1^3 \\ Y_1^3 \\ X_4^3 \\ Y_4^3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

<u>Barre (4) :</u> <u>Barre (2,4)</u> : $L_{2,4} = 5m \quad q = 126.87° \quad c = -0.6 \quad s = 0.8$

$$\begin{Bmatrix} X_2^4 \\ Y_2^4 \\ X_4^4 \\ Y_4^4 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.072 & -0.096 & -0.072 & 0.096 \\ -0.096 & 0.128 & 0.096 & -0.128 \\ -0.072 & 0.096 & 0.072 & -0.096 \\ 0.096 & -0.128 & -0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

<u>Barre (5) :</u> <u>Barre (2,5)</u> : $L_{2,5} = 4m \quad q = 90° \quad c = 0 \quad s = 1$

$$\begin{Bmatrix} X_2^5 \\ Y_2^5 \\ X_5^5 \\ Y_5^5 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

<u>Barre (6) :</u> <u>Barre (3,5)</u> : $L_{3,5} = 5m \quad q = 126.87° \quad c = -0.6 \quad s = 0.8$

$$\begin{Bmatrix} X_3^6 \\ Y_3^6 \\ X_5^6 \\ Y_5^6 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.072 & -0.096 & -0.072 & 0.096 \\ -0.096 & 0.128 & 0.096 & -0.128 \\ -0.072 & 0.096 & 0.072 & -0.096 \\ 0.096 & -0.128 & -0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

<u>Barre (7) :</u> <u>Barre (4,5)</u> : $L_{4,5} = 3m \quad q = 0 \quad c = 1 \quad s = 0$

$$\begin{Bmatrix} X_4^7 \\ Y_4^7 \\ X_5^7 \\ Y_5^7 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de rigidité globale de la structure, on doit faire un assemblage des matrices de rigidité élémentaires. Cet assemblage se fait de la manière qu'en chaque nœud i, les forces X_i et Y_i sont calculées comme suit :

On peut ainsi écrire la relation globale de la structure : $\{P\}=[K].\{u\}$

$$\begin{Bmatrix} Rx_1 \\ Ry_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ Rx_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.732 & 0 & -0.96 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.096 & 0.378 & 0 & 0 & 0.096 & -0.128 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.33 & 0 & 0.405 & -0.096 & 0 & 0 & -0.072 & 0.096 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.096 & 0.128 & 0 & 0 & 0.096 & -0.128 \\ 0 & 0 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0 & 0.405 & -0.096 & -0.33 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.096 & -0.128 & 0 & 0 & -0.096 & 0.378 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.072 & 0.096 & -0.33 & 0 & 0.405 & -0.096 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.154 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

<u>Les conditions aux limites</u> :

On a $u_1 = v_1 = u_4 = 0$

On peut donc éliminer les lignes n° 1, 2 et 7 appartenant au vecteur $\{u\}$. On peut de même éliminer les colonnes et les lignes n° 1, 2 et 7 appartenant à la matrice de rigidité globale $\{K\}$.

Au nœud 1, les forces sont R_{x1} et R_{y1}.

Au nœud 4, les forces R_{x4} suivant x.

Au nœud 3, les forces F_y= -F.

Le système réduit s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.096 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.096 & 0.378 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & -0.25 \\ -0.33 & 0 & 0.405 & -0.096 & 0 & -0.072 & 0.096 \\ 0 & 0 & -0.096 & 0.128 & 0 & 0.096 & -0.128 \\ 0.096 & -0.128 & 0 & 0 & -0.378 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0.405 & -0.096 \\ 0 & -0.25 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0.072 & 0.154 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \\ V4 \\ U5 \\ V5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après résolution su système, le vecteur de déplacement est obtenu:

$$\begin{bmatrix} U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \\ V4 \\ U4 \\ V4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8033 \\ 5.0057 \\ -1.4562 \\ -2.5881 \\ -1.4911 \\ 2.2523 \\ 8.0057 \end{bmatrix}$$

III-7-3 Exercice 3 :

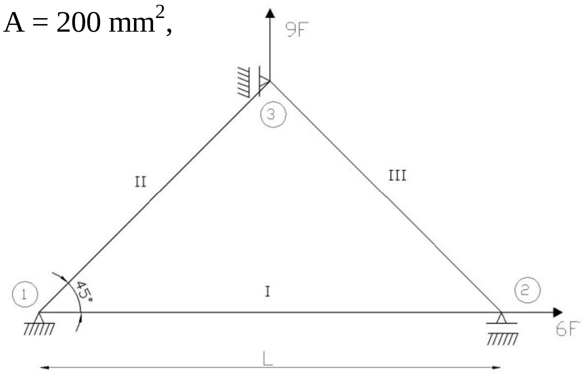
Pour le système de barres articulées de la figure ci-dessous déterminer :

1. les déplacements nodaux;
2. les efforts et les contraintes dans chaque barre.

On considère connues E, F, *l* et A.

Application numérique : $E = 2{\cdot}10^5$ MPa, $A = 200$ mm^2,

l = 1 m et F = 10 kN.



FigIII. 5

Solution:

1*- Calcul des déplacements:*

- <u>Premier pas</u> : numérotation des nœuds et des éléments
- <u>Deuxième pas</u> : application des forces nodales et des déplacements nodaux.
- <u>Troisième pas</u> : complètement du tableau

Barre	**Nœuds**	q_e **[°]**	**cos** q_e	**sin** q_e	c^2	s^2	**cs**	l_e	**EA**$_e$
I	1-2	0	1	0	1	0	0	l	EA
II	1-3	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$l\frac{\sqrt{2}}{2}$	EA
III	2-3	135	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$l\frac{\sqrt{2}}{2}$	EA

- <u>Quatrième pas</u> : écriture de la matrice de rigidité pour chaque élément de barre séparément

$$\left[K^1\right]=\frac{EA}{l}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\;;\qquad \left[K^2\right]=\frac{\sqrt{2}\,EA}{l}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\;;$$

$$\left[K^3\right]=\frac{\sqrt{2}\,EA}{l}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

- <u>Cinquième pas</u> : Emplacement des trois matrices dans une matrice globale [K] (6 lignes x 6 colonnes).

$$[K^1] = \begin{bmatrix}\frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & -\frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & \mathbf{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & \frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \begin{bmatrix}\frac{EA}{\mathbf{l}} & \frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\mathbf{l}} & -\frac{EA}{\mathbf{l}}\\ \frac{EA}{\mathbf{l}} & \frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\mathbf{l}} & -\frac{EA}{\mathbf{l}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{EA}{\mathbf{l}} & -\frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & 0 & \frac{EA}{\mathbf{l}} & \frac{EA}{\mathbf{l}}\\ -\frac{EA}{\mathbf{l}} & -\frac{EA}{\mathbf{l}} & 0 & 0 & \frac{EA}{\mathbf{l}} & \frac{EA}{\mathbf{l}}\end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

- <u>Sixième pas</u> : Assemblage des matrices de rigidité [K^g] dans la matrice globale de rigidité

$$[K^g] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{EA\sqrt{2}}{l} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}+1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- <u>Septième pas</u> : écriture de la relation fondamentale de la MEF, $\{F\} = [K]\cdot\{u\}$ et détermination des déplacements nodaux et des forces nodales :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 6F \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ 9F \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{EA\sqrt{2}}{l} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}+1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites sont: $U_1=V_1=V_2=U_3=0$

L'application de ces conditions aux limites se fait par suppressions des lignes et des colonnes correspondantes à ces déplacements nuls.

Le système réduit:

$$\frac{\sqrt{2}EA}{2l}\begin{bmatrix}\sqrt{2}+1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_2\\ V_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}6F\\ 9F\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_2 = 1.1082\frac{Fl}{EA}; \quad V_3 = 5.8099\frac{Fl}{EA}$$

$$\Rightarrow U_2 = 0.277mm; \quad V_3 = 1.4525mm$$

En ce qui concerne les réactions des appuis, on prend comme équations les lignes 1, 2, 4 et 5. On aura dans ce cas :

$$\begin{Bmatrix}R_{x1}\\ R_{y1}\\ R_{y2}\\ R_{x3}\end{Bmatrix}=\frac{EA}{\mathbf{l}}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\\ -1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_2\\ W_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-5F\\ -4F\\ -5F\\ -F\end{Bmatrix}.$$

L'allongement $\Delta\ell$ pour un élément quelconque ***i - j*** se calcule avec la formule :

$$D\ell_{ij} = (U_j - U_i)\cos q - (W_j - W_i)\sin q$$

- <u>Huitième pas</u> : calcul des efforts dans chaque élément de barre.

Les efforts dans un élément de barre articulée ***i - j*** se calculent avec la formule :

$$N_{ij}^e = \frac{EA^e}{\mathbf{l}^e}\begin{bmatrix}c & s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_j - U_i\\ V_j - V_i\end{Bmatrix}_e$$

En appliquant l'expression mentionnée ci-dessus, on aura donc les efforts dans les barres 1-2, 1-3 et 2-3

$$N_{12}^1 = \frac{EA^e}{\mathbf{l}^e}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.277-0\\ 0-0_i\end{Bmatrix}_e = 11080N$$

$$N_{13}^2 = \frac{2EA^e}{\sqrt{2}\mathbf{l}^e}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0\\ 1.4525-0_i\end{Bmatrix}_e = 58100N$$

$$N_{23}^3 = \frac{2EA^e}{\sqrt{2}\mathbf{l}^e}\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0.277\\ 1.4525-0_i\end{Bmatrix}_e = 69180N$$

2- *Calcul des contraintes:*

Les contraintes dans chaque élément de barre se calculent avec la formule : $s_{ij}^e = \frac{N_{ij}^e}{A_e}$, donc :

$$s_{12}^{1} = \frac{N_{12}^{1}}{A_1} = \frac{11080}{200} = 55.4[MPa]$$

$$s_{13}^{2} = \frac{N_{13}^{2}}{A_2} = \frac{58100}{200} = 255[MPa]$$

$$s_{23}^{3} = \frac{N_{23}^{3}}{A_3} = \frac{69180}{200} = 345.9[MPa]$$