

Chapitre IV : Elément poutre

IV.1 Définition:

Même si les poutres et les barres ont une morphologie géométrique similaire, en plus des forces axiales, les poutres supportent des moments de flexion et des forces de cisaillement. Les poutres sont généralement utilisées dans les ponts, les fondations, les structures de bâtiments, ... etc.

Étant donné que le moment fléchissant et les forces de cisaillement provoquent une rotation et une flèche dans une direction normale à l'axe de la poutre, les paramètres nodaux dans un élément de poutre 1-2 sont illustrés à la Figure IV.1.

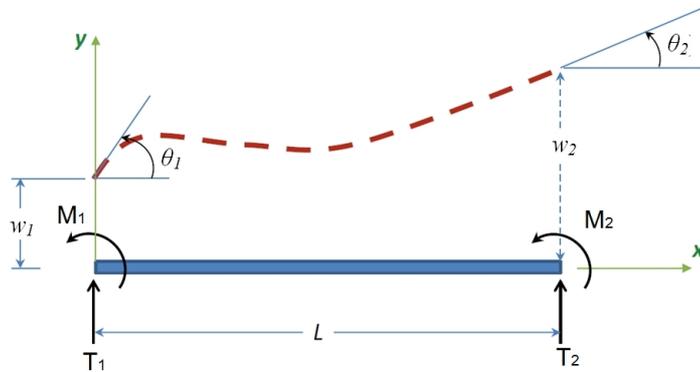


Fig. IV-1 Elément poutre

IV.2 Approximation du champs de déplacement:

Compte tenu du fait qu'un élément de poutre bidimensionnel (2D) a quatre degrés de liberté (w_1 , θ_1 , w_2 , θ_2), un polynôme approprié $u(x)$ pour la distribution des déplacements le long de l'axe de la poutre doit contenir quatre constantes inconnues. Par conséquent, la fonction de déplacement doit avoir la forme fonctionnelle suivante:

$$u(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (4.1)$$

En utilisant la dernière équation, ainsi que la relation entre la flèche $w(x)$ et la rotation $\theta(x)$, les conditions aux limites:

$$w(0) = u_1 \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=0} = q_1 \quad (4.3)$$

$$u(L) = u_2 \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=L} = q_2 \quad (4.5)$$

donnent les équations suivantes:

$$a_0 = u_1 \quad (4.6)$$

$$a_1 = \theta_1 \quad (4.7)$$

$$a_3 L^3 + a_2 L^2 + a_1 L + a_0 = u_2 \quad (4.8)$$

$$3a_3 L^2 + 2a_2 L + a_1 = q_2 \quad (4.9)$$

Les équations ci-dessus peuvent être écrites en format matricielle suivante par rapport aux paramètres a_0, a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

La solution de cette dernière équation donne:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Maintenant, on peut écrire le champs de déplacement $u(x)$ en fonction des déplacement nœuds:

$$\begin{aligned} w(x) = & x^3 \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\ & + x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$w(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Avec N_1, N_2, N_3 et N_4 sont les fonctions de forme:

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2L + L^3) \quad (4.14)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^3} (x^3L - 2x^2L^2 + xL^3) \quad (4.15)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2L) \quad (4.16)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^3} (x^3L - x^2L^2) \quad (4.17)$$

IV.3 Matrice élémentaire de la poutre:

Comme il est connu de la mécanique des solides, les efforts internes, c'est-à-dire les moments fléchissant $M(x)$ et les efforts tranchants $T(x)$ peuvent être écrits en fonction des déplacements $w(x)$:

$$T(x) = EI \frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} \quad (4.18)$$

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \quad (4.19)$$

Tenant en compte l'équation de déplacement $w(x)$, ces efforts internes peuvent être écrits:

$$T(x) = EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$M(x) = EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

En dérivant les fonctions de formes:

$$T(x) = \frac{EI}{L^3} [12 \ 6L \ -12 \ 6L] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$M(x) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12x - 6L & 6Lx - 4L^2 & -12x + 6L & 6Lx - 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ q_1 \\ w_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

A partir de la figure **Fig. IV.1** les conditions aux limites élémentaires peuvent être écrites:

$$T(0) = T_1 \quad (4.24)$$

$$M(0) = M_1 \quad (4.25)$$

$$T(L) = T_2 \quad (4.26)$$

$$M(L) = M_2 \quad (4.27)$$

Combinant les équations

$$T_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ q_1 \\ w_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$M_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ q_1 \\ w_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$-T_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ q_1 \\ w_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$-M_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ q_1 \\ w_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Ces quatre dernière équations peuvent être assemblées dans un système matriciel:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ q_1 \\ w_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Une fois les déplacements nodaux w_1 , θ_1 , u_2 et θ_2 sont connus, le champs de déplacement $w(x)$, des efforts tranchants $T(x)$ et des moments fléchissant $M(x)$ le long de la poutre peuvent être calculée à l'aide des équations (4.13), (4.22) et (4.23), respectivement.

Il est à noter que l'équation (4.32) correspond à un élément de poutre 2D soumis aux seules forces nodales. Dans le cas de poutres chargées par des charges réparties entre les nœuds, des forces nodales équivalentes doivent être dérivées pour simuler les effets des charges réparties. À cette fin, l'élément de poutre doit être supposé reposer sur des supports fixes aux deux extrémités, puis les charges nodales équivalentes simulant les effets de charge réparties doivent être calculées. Ces charges nodales équivalentes doivent être ajoutées aux extrémités de chaque élément en tant que charges externes. Le tableau 6.1 résume les charges nodales équivalentes pour les cas courants de charges réparties. Compte tenu des valeurs T_1, M_1, T_2, M_2 des forces nodales équivalentes ainsi que de la nomenclature de la Figure 4.2, l'élément Equation (4.32) peut maintenant s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} -f_1 \\ m_1 \\ -f_2 \\ -m_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

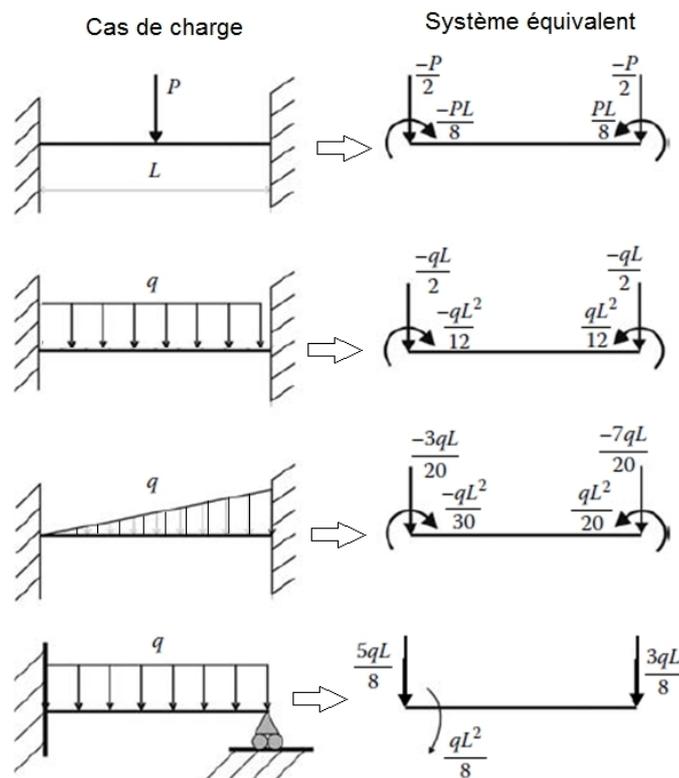


Fig. IV-2 Charges équivalentes pour les charges réparties

IV.4 Exercices:

IV.4.1 Exercice 01:

Déterminer les déplacements nodaux ainsi que les efforts internes T et M dans la poutre indiquées sur la figure **Fig. IV-3**.

Données: $L=8\text{m}$, $q=3\text{KN/m}$, $E=200\text{GPa}$, $I=125\times 10^{-6}\text{m}^4$

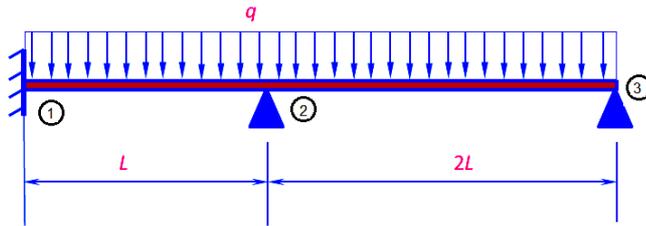


Fig. IV-3

Solution:

a) Vecteurs des forces nodaux:

Puisque on a une poutre soumise uniquement à des forces réparties, la première étape est la transformation de la charge uniforme "q" en forces nodales équivalentes. En tenant compte du tableau 4.2, la simulation suivante de la structure donnée doit être utilisée :

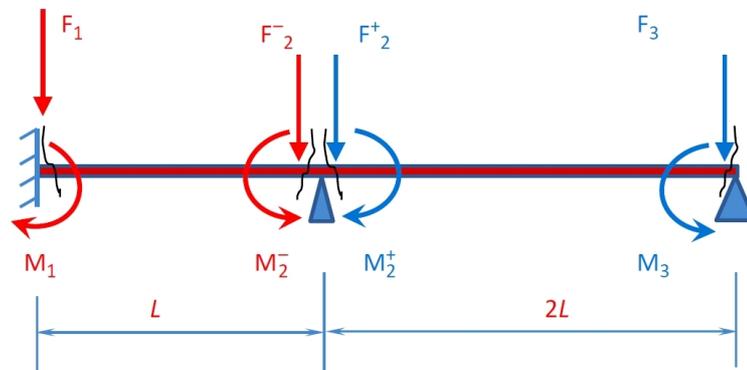


Fig. IV-4 Forces nodaux équivalentes

où les charges équivalentes agissant sur les nœuds de chaque élément sont données par les formules suivantes :

$$F_1=qL/2=12\ 000\ \text{N}, \quad M_1=qL^2/12=16\ 000\ \text{N.m}$$

$$F_2=qL/2=12\ 000\ \text{N}, \quad M_2=qL^2/12=16\ 000\ \text{N.m}$$

$$F^+_2=q(2L)/2=24\ 000\ \text{N}, \quad M^+_2=q(2L)^2/12=64\ 000\ \text{N.m}$$

$$F_3=q(2L)/2=24\,000\text{ N}, \quad M_3=q(2L)^2/12=64\,000\text{ N.m}$$

b) Equations élémentaire

Elément 1, nœud 1-2

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ +qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 2,343,750 & -585,937.5 & 2,343,750 \\ 2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & -2,343,750 & 6,250,000 \\ -585,937.5 & -2,343,750 & 585,937.5 & -2,343,750 \\ 2,343,750 & 6,250,000 & -2,343,750 & 1.25 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -16,000 \\ -12,000 \\ 16,000 \end{Bmatrix}$$

Elément 2: nœuds 2-3

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{(2L)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(2L) & -12 & 6(2L) \\ 6(2L) & 4(2L)^2 & -6(2L) & 2(2L)^2 \\ -12 & -6(2L) & 12 & -6(2L) \\ 6(2L) & 2(2L)^2 & -6(2L) & 4(2L)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -q(2L)/2 \\ -q(2L)^2/12 \\ -q(2L)/2 \\ +q(2L)^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 4,687,500 & -585,937.5 & 4,687,500 \\ 4,687,500 & 5 \times 10^7 & -4,687,500 & 2.5 \times 10^7 \\ -585,937.5 & -4,687,500 & 585,937.5 & -4,687,500 \\ 4,687,200 & 2.5 \times 10^7 & -4,687,500 & 5 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -24,000 \\ -64,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \end{Bmatrix}$$

c) Agrandissement des équations des éléments en coordonnées globales

Les équations des éléments locaux ci-dessus doivent maintenant être étendues aux degrés de liberté de l'ensemble de la structure :

Elément 1, nœud 1-2

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 2,343,750 & -585,937.5 & 2,343,750 & 0 & 0 \\ 2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & -2,343,750 & 6,250,000 & 0 & 0 \\ -585,937.5 & -2,343,750 & 585,937.5 & -2,343,750 & 0 & 0 \\ 2,343,750 & 6,250,000 & -2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -16,000 \\ -12,000 \\ 16,000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elément 2 nœuds 2-3

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 585,937.5 & 4,687,500 & -585,937.5 & 4,687,500 \\ 0 & 0 & 4,687,500 & 5 \times 10^7 & -4,687,500 & 2.5 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -585,937.5 & -4,687,500 & 585,937.5 & -4,687,500 \\ 0 & 0 & 4,687,200 & 2.5 \times 10^7 & -4,687,500 & 5 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -24,000 \\ -64,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \end{Bmatrix}$$

(d) *Équation structurelle en coordonnées globales*

L'équation structurelle en coordonnées globales peut être obtenue par superposition des équations des éléments développés ci-dessus. Par conséquent, en ajoutant les équations des éléments ci-dessus, l'équation globale suivante peut être obtenue :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 2,343,750 & -585,937.5 & 2,343,750 & 0 & 0 \\ 2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & -2,343,750 & 6,250,000 & 0 & 0 \\ -585,937.5 & -2,343,750 & 1,171,875 & 2,343,750 & -585,937.5 & 4,687,500 \\ 2,343,750 & 6,250,000 & -7,031,250 & 6.25 \times 10^7 & -4,687,500 & 2.5 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -585,937.5 & -4,687,500 & 585,937.5 & -4,687,500 \\ 0 & 0 & 4,687,200 & 2.5 \times 10^7 & -4,687,500 & 5 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -160,000 \\ -36,000 \\ -48,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \end{Bmatrix}$$

L'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\{R\} = [K]\{d\} - \{f\}$$

$$\text{Ou} \quad [[K] \quad [-I]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{f\} \quad (01)$$

e) *Les conditions aux limites:*

Pour la dérivation du système algébrique fournissant le champ de déplacement nodal, les conditions aux limites du problème doivent être incorporées à l'équation structurelle ci-dessus. Compte tenu des types d'appuis ainsi que des forces nodales, les six conditions aux limites suivantes peuvent être spécifiées :

(a) *Conditions aux limites pour les déplacements nodaux*

- (1) $u_1 = 0$
- (2) $\vartheta_1 = 0$
- (3) $u_2 = 0$
- (4) $u_3 = 0$

(b) *Conditions aux limites pour les forces nodales*

- (5) $M_2 = 0$
- (6) $M_3 = 0$

Les conditions aux limites ci-dessus peuvent maintenant être exprimées dans un format matriciel :

(a) Conditions aux limites pour les déplacements nodaux

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou dans un format abrégé :

$$[BCd]\{d\} = \{DO\}$$

$$[[BCd] \ [O]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{DO\} \quad (02)$$

(b) Conditions aux limites pour les forces nodales

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou dans un format abrégé :

$$[BCR]\{R\} = \{RO\}$$

Ou

$$[[O] \ [BCR]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{RO\}$$

On somme les deux équations:

$$[[BCd] \ [BCR]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{DO + RO\}$$

(f) Système algébrique pour la dérivation des déplacements nodaux

En combinant l'équation structurelle dérivée (01) avec les conditions aux limites ci-dessus (équation 02), le système algébrique suivant peut être obtenu :

$$\begin{bmatrix} [K] & [-I] \\ [BCd] & [BCR] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{DO+RO\} \end{Bmatrix}$$

Ou en format abrégé: $[A] \{X\} = \{B\}$

Avec:

$$\{X\} = \{u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2, u_3, \vartheta_3, F_1, M_1, F_2, M_2, F_3, M_3\}^T$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 585,937 & 2.34375 \times 10^6 & -585,937 & 2.34375 \times 10^6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.34375 \times 10^6 & 1.25 \times 10^7 & -2.34375 \times 10^6 & 6.25 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -585,937 & -2.34375 \times 10^6 & 585,937 & 2.34375 \times 10^6 & -585,937 & 4.6875 \times 10^6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.34375 \times 10^6 & 6.25 \times 10^6 & 2.34375 \times 10^6 & 6.25 \times 10^7 & -4.6875 \times 10^6 & 2.5 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -585,937 & -4.6875 \times 10^6 & 585,937 & -4.6875 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.6875 \times 10^6 & 2.5 \times 10^7 & -4.6875 \times 10^6 & 5 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -16,000 \\ -36,000 \\ -48,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La solution du système ci-dessus donne les déplacements nodaux et les réactions sur les appuis de la poutre :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \\ F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \\ 8250 \\ 6000 \\ 42,000 \\ 0 \\ 21,750 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(g) *Déplacements, forces de cisaillement et moments de flexion*

Connaissant les déplacements nodaux $\{u1, \vartheta1, u2, \vartheta2, u3, \vartheta3\}T$, les déplacements $u(x)$, les forces de cisaillement $T(x)$ et les moments fléchissant $M(x)$ pour tout point x de la poutre peuvent être obtenus :

Elément 1: nœuds 1-2

Dérivation des déplacements

$$N1 = 0.001953125(512 - 24x^2 + 2x^3)$$

$$N2 = 0.001953125(512x - 128x^2 + 8x^3)$$

$$N3 = 0.001953125(24x^2 - 2x^3)$$

$$N4 = 0.001953125(-64x^2 + 8x^3)$$

$$u(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \end{Bmatrix}$$

$$= -0.000003125000000000000001(-64x^2 + 8x^3)$$

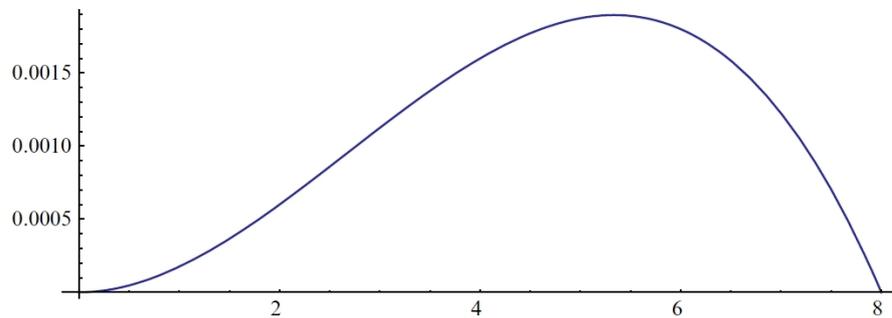


Fig. IV-5 Représentation graphique du déplacement $u(x)$ sur l'élément 1

Dérivation des efforts tranchants

$$f(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot [12 \ 6L \ -12 \ 6L] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \end{Bmatrix} = -3750$$

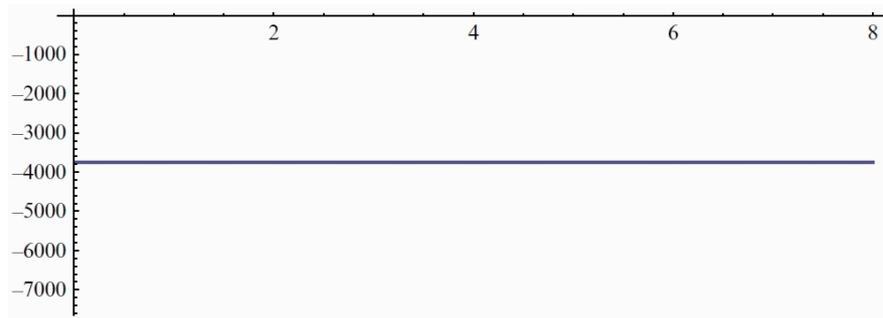


Fig.IV-6 Diagramme de $T(x)$ sur l'élément 1

Dérivation des moments fléchissant

$$m(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot [12x - 6L \quad 6Lx - 4L^2 \quad -12x + 6L \quad 6Lx - 2L^2] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \end{Bmatrix}$$

$$= -78.12500000000003(-128 + 48x)$$

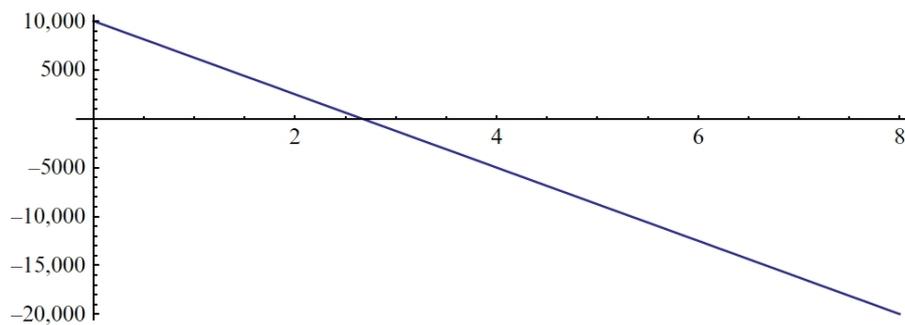


Fig.IV-7 Diagramme du moment fléchissant $M(x)$

Elément 2: nœuds 2-3

Dérivation des déplacements

$$N1 = 0.000244140625(4096 - 48x^2 + 2x^3)$$

$$N2 = 0.000244140625(4096x - 512x^2 + 16x^3)$$

$$N3 = 0.000244140625(48x^2 - 2x^3)$$

$$N4 = 0.000244140625(-256x^2 + 16x^3)$$

$$u(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \end{Bmatrix}$$

$$= -3.906250000000001 \times 10^{-7} (4096x - 512x^2 + 16x^3)$$

$$+ 5.078124999999989 \times 10^{-7} (-256x^2 + 16x^3)$$

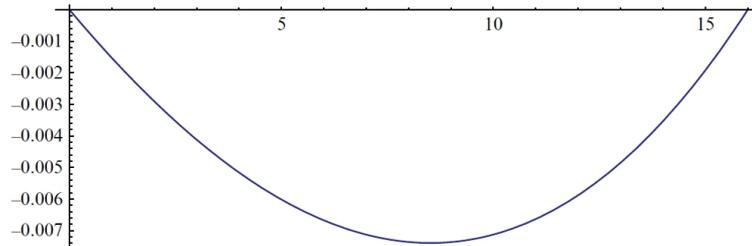


Fig.IV-8 Représentation graphique de déplacement $u(x)$ pour l'élément 2

Dérivation des efforts tranchants

$$f(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot [12 \ 6(2L) \ -12 \ 6(2L)] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \end{Bmatrix} = 2250$$

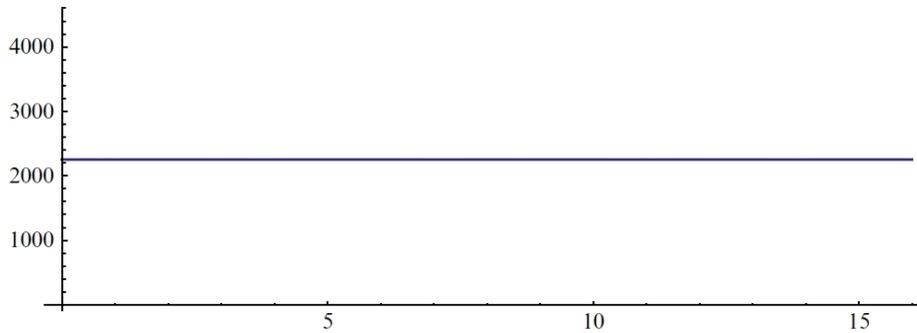


Fig.IV-9 Diagramme de l'effort tranchant $T(x)$ sur l'élément 2

Dérivation des moments fléchissant

$$m(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot [12x - 6(2L) \quad 6(2L)x - 4(2L)^2 \quad -12x + 6(2L) \quad 6(2L)x - 2(2L)^2] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \end{Bmatrix}$$

$$= 48,828.125(-0.00160000000000000005(-1024 + 96x) + 0.0020799999999999955(-512 + 96x))$$

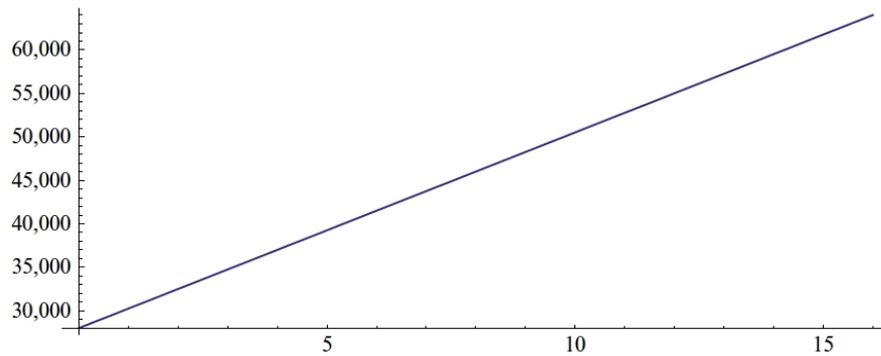


Fig.IV-10 Diagramme du moment fléchissant $M(x)$ sur l'élément 2

IV.4.1 Exercice 02:

Pour la poutre de section circulaire de diamètre d (**Fig. IV-11**), calculez le déplacement transversal du nœud 2 ainsi que les réactions V_1 , M_1 et V_3 . Tracez les diagrammes T et M et déterminez la contrainte maximale supportée par la poutre. Application numérique : $L = 0,8$ m, $E = 21 \cdot 10^4$ MPa, $F = 4$ kN, $d = 60$ mm.

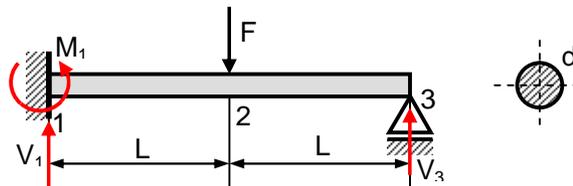


Fig.IV-11

On part de l'expression de la matrice de rigidité pour un élément de poutre dans un système local d'axes de coordonnées :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

On particularise cette expression pour chacune des deux régions 1-2 respectivement 2-3, en négligeant les lignes et les colonnes 1 et 4, à cause de l'absence des forces axiales :

$$[K^I] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_I = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^{II}] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{II} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{II}$$

$$\text{Donc, } \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2^I \\ M_2^I \end{Bmatrix}_I = [K^I] \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ j_1 \\ W_2^I \\ j_2^I \end{Bmatrix}_I \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} V_2^{II} \\ M_2^{II} \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}_{II} = [K^{II}] \cdot \begin{Bmatrix} W_2^{II} \\ j_2^{II} \\ W_3 \\ j_3 \end{Bmatrix}_{II}$$

En assemblant les deux matrices de rigidité, on aura :

$$[K] = [K^I] + [K^{II}] = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

En écrivant l'équation fondamentale de la MEF, on aura :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2' \\ M_2' \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ j_1 \\ W_2 \\ j_2 \\ W_3 \\ j_3 \end{Bmatrix} \text{ et,}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2'' \\ M_2'' \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ j_1 \\ W_2 \\ j_2 \\ W_3 \\ j_3 \end{Bmatrix}$$

Par l'addition des deux relations, il en résulte :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 = -F \\ M_2 = 0 \\ V_3 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 = 0 \\ j_1 = 0 \\ W_2 \\ j_2 \\ W_3 = 0 \\ j_3 \end{Bmatrix}$$

En choisissant les lignes et les colonnes 3, 4 et 6, on obtiendra :

$$\begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_2 \\ j_2 \\ j_3 \end{Bmatrix},$$

$$\text{d'où il en résulte : } W_2 = -\frac{7 FL^3}{96 EI}, \quad \phi_2 = -\frac{3 FL^2}{96 EI} \text{ et } \phi_2 = \frac{12 FL^2}{96 EI}.$$

les coefficients α_i sont des paramètres généraux

$P_i(\{x\})$ est une base polynomiale

La substitution de $\{\bar{u}\}$ à la place de $\{u\}$ ne satisfera en général pas à l'équation différentielle (6.1) et entraînera un résidu sur le domaine ; C'est,

$$\mathbb{B}(\{\bar{u}\}) \neq 0 \text{ dans } \Omega$$

L'essence des méthodes des résidus pondérés est de forcer le résidu à être nul dans une moyenne sur l'ensemble du domaine. Pour ce faire, on multiplie le résidu par une fonction de pondération et on force l'intégrale du résidu pondéré à s'annuler sur tout le domaine ; C'est,

$$\{W\} = \int_{\Omega} \psi \mathbb{B}(\{\bar{u}\}) d\Omega = 0$$

Il existe une variété de méthodes résiduelles telles que la méthode de collocation, la méthode des sous-domaines, la méthode des moindres carrés, la méthode des moments et la méthode de Galerkin. Ils diffèrent tous dans le choix de la fonction de pondération. La plus populaire est cependant la méthode de Galerkin, et c'est la seule décrite dans ce chapitre.

La « méthode des éléments finis » est un cas particulier basé sur la formulation de Galerkin avec une construction systématique de l'approximation par sous domaine « éléments finis ».

V-3 La méthode de Galerkin:

Dans la méthode de Galerkin, la fonction de pondération est simplement la variation de la fonction d'essai elle-même ; C'est,

$$\psi = \delta\{\bar{u}\} = \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i P_i(\{x\})$$

En remplaçant ψ et $\{\bar{u}\}$, l'équation (6.4) devient

$$\begin{aligned} \{W\} &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i P_i(\{x\}) \mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) d\Omega = 0 \\ &= \{\delta\alpha_i\}^T \int_{\Omega} P_i(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Puisque la relation précédente doit être égale à zéro pour tout $\delta\alpha_i$ arbitraire, elle peut s'écrire sous la forme