

Chapitre 5 : Formulation variationnelle du problème d'élasticité

V-1 Introduction:

L'utilisation classique du mot "formulation variationnelle" fait référence à la construction de la fonctionnelle ou au principes variationnelle qui sont équivalents aux équations gouvernantes du problème.

Tandis que l'utilisation moderne de ce mot représente la formulation dans laquelle les équations gouvernantes sont transformées à une forme intégrale pondérée équivalente et qui n'est pas forcément équivalente au principe variationnelle.

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons utilisé des méthodes bien connues d'analyse structurelle pour développer les matrices de rigidité des éléments de barre et de poutre. La raison en est que ces éléments sont unidimensionnels et que les solutions exactes des équations différentielles régissant leurs comportements sont bien connues. Pour d'autres problèmes structurels en deux et trois dimensions, de telles approches directes sont inexistantes pour la raison évidente qu'il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques aux équations différentielles régissant leur comportement, sauf dans le cas de géométries très simples. L'alternative est de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques approchées. Ceci est réalisé en utilisant des méthodes résiduelles pondérées.

V-2 Formulation générale:

Soit un problème physique (qu'il soit structurel ou non) dont le comportement est régi par un ensemble d'équations différentielles :

$$B(\{u\}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

où

$B(\)$ représente un opérateur différentiel linéaire

$\{u\}$ est la fonction inconnue

Ω est le domaine géométrique

Puisque la variable $\{u\}$ est inconnue, nous pouvons essayer de lui substituer une fonction d'essai ou approchée de notre choix, disons $\{\bar{u}\}$ donnée comme une fonction polynomiale :

c

où

les coefficients α_i sont des paramètres généraux

$P_i(\{x\})$ est une base polynomiale

La substitution de $\{\bar{u}\}$ à la place de $\{u\}$ ne satisfera en général pas à l'équation différentielle (6.1) et entraînera un résidu sur le domaine ; C'est,

$$\mathbb{B}(\{\bar{u}\}) \neq 0 \text{ dans } \Omega$$

L'essence des méthodes des résidus pondérés est de forcer le résidu à être nul dans une moyenne sur l'ensemble du domaine. Pour ce faire, on multiplie le résidu par une fonction de pondération et on force l'intégrale du résidu pondéré à s'annuler sur tout le domaine ; C'est,

$$\{W\} = \int_{\Omega} \psi \mathbb{B}(\{\bar{u}\}) d\Omega = 0$$

Il existe une variété de méthodes résiduelles telles que la méthode de collocation, la méthode des sous-domaines, la méthode des moindres carrés, la méthode des moments et la méthode de Galerkin. Ils diffèrent tous dans le choix de la fonction de pondération. La plus populaire est cependant la méthode de Galerkin, et c'est la seule décrite dans ce chapitre.

La « méthode des éléments finis » est un cas particulier basé sur la formulation de Galerkin avec une construction systématique de l'approximation par sous domaine « éléments finis ».

V-3 La méthode de Galerkin:

Dans la méthode de Galerkin, la fonction de pondération est simplement la variation de la fonction d'essai elle-même ; C'est,

$$\psi = \delta\{\bar{u}\} = \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i P_i(\{x\})$$

En remplaçant ψ et $\{\bar{u}\}$, l'équation (6.4) devient

$$\begin{aligned} \{W\} &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i P_i(\{x\}) \mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) d\Omega = 0 \\ &= \{\delta\alpha_i\}^T \int_{\Omega} P_i(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Puisque la relation précédente doit être égale à zéro pour tout $\delta\alpha_i$ arbitraire, elle peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_{\Omega} P_1(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0 \\
W_2 &= \int_{\Omega} P_2(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0 \\
&\vdots \\
W_n &= \int_{\Omega} P_n(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0
\end{aligned}$$

Le système d'équations (6.7) peut être résolu pour les coefficients inconnus α_i .

Exercice

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\mathbb{B}(u(x)) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + u(x) \text{ on } \Omega = [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$u(x=0)=1; \quad u(x=1)=0$$

Solution:

Cette équation a la solution exacte :

$$u(x) = 1 - \frac{\sin(x)}{\sin(1)}$$

Résolvons l'équation différentielle en utilisant la méthode de Galerkin. On choisit la fonction d'approximation $u(x)$ sous la forme d'un polynôme :

$$\bar{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Pour s'assurer que la fonction d'essai $\bar{u}(x)$ se rapproche le mieux possible de la fonction exacte $u(x)$, nous devons nous assurer qu'elle est dérivable autant de fois que requis par l'opérateur différentiel et satisfait les conditions aux limites ; C'est,

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x=0) = 1 &\Rightarrow \alpha_0 = 1 \\
\bar{u}(x=1) = 0 &\Rightarrow 1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_1 = -(1 + \alpha_2)
\end{aligned}$$

La fonction d'essai devient donc

$$\bar{u}(x) = \alpha_2(x^2 - x) - x + 1$$

Il est deux fois dérivable et satisfait les conditions aux limites. En remplaçant $\bar{u}(x)$ dans l'équation (6.8), le résidu s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(\bar{u}(x)) &= \frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} + \bar{u}(x) \\ &= \alpha_2(x^2 - x + 2) - x\end{aligned}$$

La fonction de pondération correspondante est obtenue comme

$$\psi = \delta\bar{u}(x) = \delta\alpha_2(x^2 - x)$$

Intégrer le produit du résiduel pondéré sur le domaine donne

$$W = \int_0^{+1} \delta\alpha_2(x^2 - x) \times (\alpha_2(x^2 - x + 2) - x) dx = 0$$

Puisque $\delta\alpha_2 \neq 0$, il s'ensuit

$$W = \int_0^{+1} (x^2 - x) \times (\alpha_2(x^2 - x + 2) - x) dx = 0$$

L'évaluation de l'intégrale conduit à une équation algébrique de la forme

$$\frac{1}{12} - \frac{3}{10}\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{5}{18}$$

L'approximation finale s'écrit alors

$$\bar{u}(x) = \frac{5}{18}(x^2 - x) - x + 1$$

La figure 6.1 montre une comparaison graphique entre la solution exacte, l'équation (6.10), et la solution approchée, l'équation (6.19). Avec un seul paramètre α_2 , la solution approchée est très acceptable.

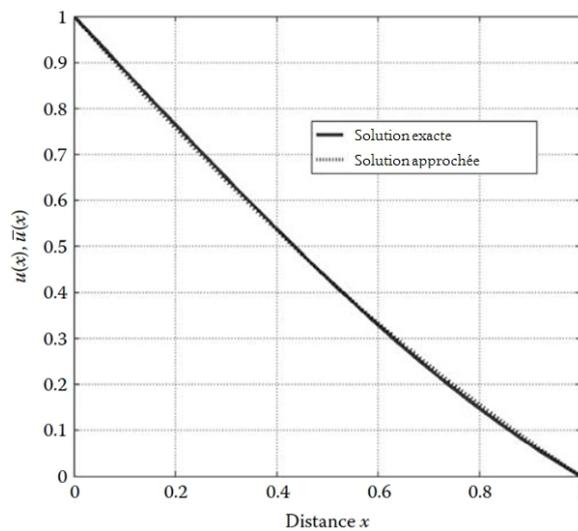


Fig. Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

V-4 Formulation faible:

Étant donné l'équation différentielle suivante

$$\mathbb{B}(u(x)) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + u(x) + x = 0 \text{ on } \Omega = [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= g \\ \frac{du}{dx}(x=1) &= p \end{aligned}$$

avec g et p étant des constantes réelles. La première condition aux limites imposée à $u(x)$ est dite essentielle, tandis que la seconde condition aux limites imposée à sa dérivée est dite naturelle. Si nous appliquons l'équation résiduelle pondérée (6.4) à l'équation différentielle (6.20), nous obtenons

$$\int_0^1 \psi \left(\frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} + \bar{u}(x) + x \right) dx = 0$$

On pourrait aussi faire la même chose avec la condition aux limites naturelle donnée sous la forme d'une équation différentielle ; C'est

$$\left[\left(\frac{d\bar{u}}{dx} - p \right) \psi \right]_{(x=1)} = 0$$

Puisque les deux expressions (6.22) et (6.23) sont égales à zéro, nous pouvons écrire

$$\int_0^1 \psi \left(\frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} + \bar{u}(x) + x \right) dx = \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dx} - p \right) \psi \right]_{(x=1)}$$

L'équation (6.24) est une forme intégrale de l'équation différentielle (6.20) et de sa condition aux limites naturelle.

Dans l'équation (6.24), la fonction d'essai $\bar{u}(x)$ doit non seulement satisfaire la condition aux limites essentielle, mais elle doit également être dérivable deux fois plus que requis par l'opérateur différentiel afin d'approcher la fonction exacte $u(x)$. D'autre part, la fonction n'a pas du tout besoin d'être continue.

Maintenant, intégrons une fois l'équation (6.24) par partie :

$$\int_0^1 \left((\bar{u}(x) + x) \psi - \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right) dx + [p\psi]_0^1 = 0$$

Notez que les deux fonctions $\bar{u}(x)$ et ψ ne doivent être dérivables qu'une seule fois. En d'autres termes, nous avons allégé la condition de continuité imposée à $\bar{u}(x)$ de un et augmenté celle imposée à ψ de un également.

Si on continue à intégrer par partie, on obtient

$$\int_0^1 \left((\bar{u}(x) + x)\psi + \bar{u}(x) \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) dx + \left[p\psi - \bar{u}(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_0^1 = 0$$

Nous nous retrouvons avec un problème identique à l'équation (6.24) ; cette fois, la fonction ψ doit être dérivable deux fois, tandis que la fonction $\bar{u}(x)$ n'a pas du tout besoin d'être continue. Il s'ensuit donc que l'équation (6.25) est la plus appropriée. C'est ce qu'on appelle la forme faible. De plus, lorsque la méthode de Galerkin est utilisée, les fonctions $\bar{u}(x)$ et ψ ont le même degré de continuité puisque $\psi = \delta u(x)$.

La forme intégrale faible permet de diminuer d'un degré l'ordre de dérivation et fait apparaître les conditions aux limites.

V-5 Dérivation de la matrice de rigidité par le principe de l'énergie potentielle minimale

Présentons maintenant les techniques numériques élémentaires (utilisées sur chaque élément) permettant de calculer les formes matricielles déduites de la formulation variationnelle (forme intégrale) d'un problème de physique. Dans un premier temps nous rappelons l'écriture matricielle de la forme variationnelle d'un problème de mécanique des structures, cette formulation est une des plus complexes car elle fait intervenir quatre champs « contraintes, déformations, forces et déplacements »

La forme intégrale du principe des travaux virtuels est:

$$\forall \delta \bar{u} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho \ddot{\bar{u}} \cdot \delta \bar{u} \, dV = - \int_{\mathcal{D}} \sigma : \delta \varepsilon \, dV + \int_{\mathcal{D}} \bar{f} \cdot \delta \bar{u} \, dV + \int_{\mathcal{D}} \bar{T} \cdot \delta \bar{u} \, dS$$

Pour chaque élément $\forall M \in D_e$

L'approximation nodale des déplacements :

$$\{\bar{u}(M)\} = [N(M)] \{U_e\}$$

Le champ des déformations

$$\{\varepsilon(M)\} = [B(M)] \{U_e\} \quad \text{avec} \quad [B(M)] = [L][N(M)]$$

[B] : matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

Le champ des contraintes

$$\{\sigma (M)\} = [D(M)]\{\varepsilon(M)\} = [D(M)][B(M)]\{U_e\}$$

D'où le premier terme :

$$\int_{De} \rho \ddot{u} \cdot \delta \bar{u} \, dV = \{\delta U_e\}^T [M_e] \{\ddot{U}_e\}$$

avec $[M_e] = \int_{De} [N(M)]^T \rho [N(M)] \, dV$ matrice masse élémentaire.

Le second terme :

$$\int_{De} \bar{\sigma} : \bar{\delta \varepsilon} \, dV = \{\delta U_e\}^T [K_e] \{U_e\}$$

avec $[K_e] = \int_{De} [B(M)]^T [D(M)] [B(M)] \, dV$ matrice raideur élémentaire.

Le travail virtuel des champs de force donnés sur l'élément

$$\delta T_{de} = \int_{De} \bar{f}_d \cdot \delta \bar{u} \, dV + \int_{\partial De} \bar{T}_d \cdot \delta \bar{u} \, dS$$

$$\delta T_{de} = \{\delta U_e\}^T \{F_{de}\}$$

avec $\{F_{de}\} = \int_{De} \langle N(M) \rangle^T \{\bar{f}_d\} \, dV + \int_{\partial De} \langle N(M) \rangle^T \{\bar{T}_d\} \, dS$

Le principe des travaux virtuels:

$$\forall D_e \quad [M_e] \{\ddot{u}_n\} + [K_e] \{u_n\} = \{F_{de}\} + \{F_{ie}\}$$

Les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré, on y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure.

Lors de l'assemblage des éléments d'une structure, la somme des actions mécaniques « inter-élémentaire » est nulle. Il ne reste donc aux nœuds internes que les efforts donnés. Et aux nœuds de frontière les efforts de liaisons inconnus.