Chapitre 6 : Approximation, Fonctions d'Interpolation

Interpolation unidimensionnelle de type Lagrange, Interpolation polynômiale : Fonctions de formes, Polynôme de Lagrange, Polynôme d'Hermite, Triangle de Pascal, Conditions de conformité.

Fonctions d'interpolation

Les fonctions de forme ou fonctions d'interpolation sont les fonctions N_i qui relient les déplacements d'un point quelconque intérieur à un élément aux n déplacements nodaux q_i qui sont les degrés de liberté dans le cas de l'approche cinématique : il y a pour un élément autant de fonctions de forme que de degrés de liberté dans l'élément.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x) q_i$$

Elles assurent le passage du problème continu au problème discret, la connaissance du déplacement en quelques nœuds discrets permettant de reconstruire le champ de déplacement dans l'élément. Le déplacement en un point quelconque de l'élément est une combinaison linéaire des déplacements nodaux, dont les coefficients sont les valeurs des fonctions de forme en ce point.

Règles à respecter pour la construction des fonction de forme:

1- Principe de compatibilité (de continuité):

La construction de la solution approchée sur un élément fini doit essentiellement satisfaire les exigences du problème à résoudre et la géométrie de l'élément. Pour illustrer cette affirmation, considérons les problèmes de barre et de poutre représentés respectivement sur les figures 7.4a et b. Sous l'effet de la force appliquée P, chaque section transversale A de la barre est soumise à une contrainte constante $\sigma = P/A$. En conséquence, la barre est soumise à une déformation constante $\varepsilon = \sigma/E$, où E représente le module d'élasticité du matériau.

Dans un contexte unidimensionnel, la déformation normale est en fait donnée comme une dérivée directe du déplacement $u(x)$; c'est-à-dire $\varepsilon = du(x)/dx$. Puisque la déformation est constante sur toute la barre, il s'ensuit que le déplacement $u(x)$ est une fonction linéaire de x. En conséquence, il est possible de construire une fonction approchée $u(x)$ pour le déplacement en utilisant un polynôme linéaire:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Les paramètres α_1 et α_2 sont identifiés à l'aide des deux valeurs nodales d'extrémité U_1 et U_2. Le problème des barres est classé comme un problème C^0. La solution approchée doit être continue et sa dérivée doit exister.

Considérons maintenant le problème du poutre. Sous la charge appliquée uniformément répartie, chaque section transversale de la poutre est soumise à un déplacement vertical $w(x)$ et à une rotation $\theta(x)$. A partir de la théorie des poutres classique, la rotation $\theta(x)$ est obtenue comme la dérivée première de la déviation $w(x)$; c'est-à-dire $\theta(x) = dw(x)/dx$. La pente $\theta(x)$ doit être continue, sinon la poutre développerait des « plis » dans sa forme déviée. Par conséquent, si nous sommes sur le point de construire une fonction approchée $w(x)$ pour la flexion, alors la fonction approchée et sa dérivée première doivent être continues. La dérivée seconde, qui représente la courbure de la poutre, doit exister. Une fonction appropriée qui satisfait à ces exigences serait:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ x^2 + \alpha_4\ x^3$$

Les quatre paramètres α_1, α_2, α_3 et α_4 peuvent être identifiés en utilisant les deux valeurs nodales d'extrémité pour la flèche, w_1, w_2, et les deux valeurs d'extrémité pour la pente, θ_1 et θ_2. Le problème du poutre est classé comme un problème C^1. La solution approchée et sa dérivée première doivent être continues, la dérivée seconde doit exister.

En général, le principe de compatibilité peut être formulé comme suit :

• Pour un problème de classe C^0 (continuité C^0), la solution approchée doit être continue à travers la frontière des éléments mais pas nécessairement ses dérivées.

• Pour un problème de classe C^1 (continuité C^1), la solution approchée et ses dérivées du premier ordre doivent être continues à travers la frontière des éléments mais pas nécessairement ses dérivées du second ordre.

• Pour un problème de classe C^n (continuité C^n), la solution approchée et ses dérivées d'ordre (n−1) doivent être continues à travers la frontière des éléments mais pas nécessairement ses dérivées d'ordre n.

2- Principe de la complétude

Encore une fois, considérons le problème des barres de la figure 7.4a. Si la force appliquée P est différente de zéro, alors le déplacement u(x) a une valeur finie différente de zéro en tout point x appartenant à la barre sauf en x = 0, où un déplacement égal à zéro est imposé (condition aux limites) . Si nous choisissons de discrétiser la barre avec un élément linéaire à deux nœuds, alors la fonction approchée adoptée donnée dans l'équation (7.20) fera un choix approprié car si la taille des éléments diminue jusqu'à zéro, c'est-à-dire $lim_{x\to 0}\ u(\ x) = \alpha_1$, qui est une constante représentant la valeur réelle du déplacement en ce point. Cependant, si la fonction d'essai ne contenait pas de terme constant, $lim_{x\to 0}\ u(x)$ sera égal à zéro, ce qui ne représente pas le cas réel. De plus, le terme constant est nécessaire pour que la fonction approchée puisse représenter un mouvement de corps rigide. Dans ce cas, tous les points doivent avoir le même déplacement $u(x) = \alpha$. De plus, on a $du(x)/dx=\alpha_2$, ce qui représente le cas réel de la barre à déformation constante. Cela conduit à la définition du principe de complétude, qui peut être énoncé comme suit. Lorsque la taille de l'élément se réduit à zéro, la fonction approchée doit être capable de représenter :

• Pour un problème de classe C^0 (continuité C^0), une valeur constante de la fonction exacte ainsi que des valeurs constantes de ses dérivées du premier ordre.

• Pour un problème de classe C^1 (continuité C^1), une valeur constante de la fonction exacte ainsi que des valeurs constantes de ses dérivées du premier et du second ordre.

• Pour un problème de classe C^n (continuité C^n), une valeur constante de la fonction exacte ainsi que des valeurs constantes de ses dérivées jusqu'au $n^{ième}$ ordre.

Ces conditions, telles qu'énoncées par les principes de compatibilité et d'exhaustivité, sont suffisantes pour garantir que la solution par éléments finis converge vers la solution exacte. Heureusement, de nos jours, nous n'avons pas besoin d'observer ces principes à chaque fois que nous résolvons un problème avec la méthode des éléments finis. Tous les éléments communs qui sont utilisés dans la pratique ont été développés et vérifiés selon ces principes, et plus encore. . . Leurs formulations géométriques et analytiques sont fournies dans les bibliothèques d'éléments de la plupart des logiciels d'analyse par éléments finis. Cependant, il ne suffit jamais de rappeler que les solutions obtenues avec la méthode des éléments finis ne sont que des approximations de la solution exacte. Par conséquent, il est intéressant de comprendre ces principes afin d'évaluer la précision ou de faire un diagnostic d'un modèle d'éléments finis.

Les fonctions de forme de Lagrange:

La plus simple est l'emploi des polynômes de Lagrange. Le polynôme de Lagrange d'ordre i passe exactement par 1 au point x_i et par 0 sur tous les autres points x_j. On peut donc l'utiliser comme fonction de forme :

$$N_i(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

Pour représenter un champ du premier degré le long d'un bord, ce qui suppose donc deux inconnues, il faut deux connecteurs indépendants donc deux nœuds : un à chaque extrémité de l'arête. Pour une barre du premier degré de longueur L et de caractéristiques constantes, on peut écrire directement : $x_1 = 0$ et $x_2 = L$.

$$\begin{cases} N_1(x) = \dfrac{x-L}{0-L} = 1 - \dfrac{x}{L} \\ N_2(x) = \dfrac{x-0}{L-0} = \dfrac{x}{L} \end{cases}$$

On retrouve les deux fonctions d'interpolation précédemment calculées.

Par application de la formule donnant l'expression des polynômes de Lagrange, on détermine les trois fonctions d'interpolation associées aux trois degrés de liberté de cet élément de barre du second degré :

$$\begin{cases} N_1(x) = \dfrac{(x-L/2)(x-L)}{(0-L/2)(0-L)} = \dfrac{(2x-L)(x-L)}{L^2} \\ N_2(x) = \dfrac{(x-0)(x-L)}{(L/2-0)(L/2-L)} = \dfrac{4x(L-x)}{L^2} \\ N_3(x) = \dfrac{(x-0)(x-L/2)}{(L-0)(L-L/2)} = \dfrac{x(2x-L)}{L^2} \end{cases}$$

Toute parabole est une combinaison linéaire des trois monômes 1, x et x^2, mais est également une combinaison linéaire unique des trois fonctions ci-dessus.

Les fonctions de forme d'Hermite:

D'autres solutions peuvent exister pour les fonctions de forme. On cite ici un seul exemple les éléments finis d'Hermite qui ont la particularité d'avoir deux fonctions de base associées à chaque nœud. Dans cette version, la valeur de la solution est ajustée avec la première fonction alors que la deuxième permet d'ajuster la valeur de la dérivée. Ce type de fonctions de base peut avoir un intérêt pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation des poutres ou des plaques), même si elle nécessite d'avoir deux fois plus de fonctions pour un maillage donné.

Si on prend un exemple de la poutre classique, la rotation est la dérivée de la flèche:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \theta(x)$$

Si l'élément pris en compte est l'élément poutre de deux nœuds avec deux degrés de liberté par nœuds, w et θ, on peut écrire l'approximation de w comme suit:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2\ x + \alpha_3\ x^2 + \alpha_4\ x^3$$

la rotation est la dérivée de w(x), donc elle s'écrit comme suit:

$$\theta(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3\, x + 3\alpha_4\ x^2$$

Les conditions aux limites de la poutre sont:

$$w(0)=w_1, \quad w(L)=w_2$$
$$\theta(0) = \theta_1\ , \quad \theta(L) = \theta_2$$

Après résolution de ces équations, les valeurs des coefficients a0, a1, a2 et a3 seront trouvé:

$$a0 = w1$$
$$a1 = t1$$
$$a2 = -\frac{2\, t1\, l + 3\, w1 + l\, t2 - 3\, w2}{l^2}$$
$$a3 = \frac{2\, w1 + t1\, l + l\, t2 - 2\, w2}{l^3}$$

Puis, les fonctions de formes seront trouvées comme suit:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Avec:

$$w = N_1 w_1 + N_2 q_1 + N_3 w_2 + N_4 q_2$$

Références

1- Abdelghani SEGHIR, Cours Méthode des Éléments Finis, (Polycopié présenté à l'université Abderrahmane Mira – Bejaia).

2- Dimitrios G. Pavlou, Essentials of the Finite Element Method (2005, Elsevier Inc).

3- Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, Emmanuel Lefrançois- Finite element method. (2012, ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc).

4- J.N. Reddy - An Introduction to the Finite Element Method, 3rd Edition (2005, McGraw-Hill Education (ISE Editions).

5- Jean-Charles Craveur, Modélisation des éléments finis,(2008, Dunod).

6- LOUHIBI M. Z, la méthode des éléments finis, (université Djillali Liabes - Sidi Bel Abbes).

7- Michel Cazenave, Méthode des éléments finis Approche pratique en mécanique des structures, (2010, Dunod).

8- Ouinas Djamel, Application de la méthode des éléments finis, Cours et exercices corrigés, (2em édition, 2014, OPU).

9- Vincent Manet, Méthode des éléments finis, (2013- Vincent Manet).