

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

EQUATION DE SAINT-VENANT

L'équation de bilan énergétique d'un système ouvert est :

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta H = Q + W_u$$

où :

- ΔE_c : Variation d'énergie cinétique.
- ΔE_p : Variation d'énergie potentielle du fluide.
- ΔH : Variation d'enthalpie.
- Q : chaleur échangée avec le milieu extérieur.
- W_u : travail utile échangé.

Si on suppose :

- qu'il n'y a pas d'échange de travail utile, $W_u = 0$
- que l'énergie potentielle est négligeable, $\Delta E_p = 0$
- que l'écoulement est adiabatique et réversible, $Q = 0$

L'équation de bilan énergétique devient : $\Delta H + \Delta E_c = 0$

$$\text{ou encore } (H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 0$$

$$\text{donc } H + \frac{1}{2}V^2 = \text{Cte}$$

$$\text{or d'après l'équation (*) } H = C_p \cdot T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{P}{\rho}$$

D'où la relation de **Saint-Venant** :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{Cte}$$

Entre deux points d'un écoulement, cette relation s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 0$$

$$\text{ou encore } \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} - 1 \right) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = 0$$

Or pour un gaz parfait $\frac{P_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{P_2}{\rho_2^\gamma} = Cte$ donc $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

Donc

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} \cdot \left(\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = 0$$

ÉTAT GÉNÉRATEUR :

C'est l'état d'un fluide en un point de l'écoulement où la vitesse V est supposée nulle.

On note par un indice i toutes les variables thermodynamiques relatives à ce point.

En appliquant le théorème de Saint-Venant entre ce point et un autre point on a :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{P_i}{\rho_i}$$

Dans le cas d'un écoulement isentropique d'un gaz parfait, les caractéristiques thermodynamiques d'un point d'arrêt sont celles de l'état générateur c'est-à-dire : P_i, T_i, ρ_i .

Or la célérité du son est donnée par : $C = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T}$

Donc le théorème de Saint-Venant peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\gamma-1} \cdot C^2 + \frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{\gamma-1} \cdot C_i^2$$

En multipliant cette équation par $\frac{2}{C^2}$ on obtient : $\frac{2}{\gamma-1} + M^2 = \frac{2}{\gamma-1} \cdot \left(\frac{C_i}{C} \right)^2$

$$\text{Or } \left(\frac{C_i}{C} \right)^2 = \frac{T_i}{T}$$

Donc la relation de Saint- Venant devient :

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 = \left(\frac{T_i}{T} \right)$$

De même, on peut écrire :

$$\left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Pour établir la relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même écoulement :

- en (1) : $\frac{T_i}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2$

- en (2) : $\frac{T_i}{T_2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2$

Donc :
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

De la même façon on peut établir des relations entre les pressions et les masses volumiques.

Remarque :

si $M = 1$ ($v = c$), l'état de l'écoulement est appelé état critique.

Il est déterminé en fonction de l'état générateur :

$$\frac{T_i}{T_c} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$$

CONCLUSION

L'étude approfondie des écoulements des fluides compressibles ne peut se faire sans faire intervenir la thermodynamique. Les notions de mécanique des fluides abordées dans ce manuel ne constituent que des connaissances élémentaires nécessaires pour un technicien supérieur.