Chapitre1 L'analyse combinatoire

1 Introduction

D'une façon générale, l'analyse combinatoire se réfère aux techniques permettant de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble particulier sans les compter individuellement.

Les éléments pourraient être les résultats d'une expérience scientifique ou les issues différentes d'un événement quelconque.

2 Echantillon et sous-population

De nombreux problèmes faisant intervenir le calcul des probabilités se ramènent aux problèmes de tirer des échantillons de taille r dans un ensemble de taille n , appelé population, quel que soit la nature de ses éléments, suivant la règle du tirage, cet échantillon est :

- Ordonnée ou non
- Avec ou sans répétition (on dit aussi avec ou sans remise)

3 Les formules

A) Nombre de parties d'un ensemble

Le nombre de parties d'un ensemble S de n éléments a pour cardinal 2^n

Exemple soit un ensemble de trois éléments $\{a,b,c\}$:

- Une partie ne contient aucun élément, c'est l'ensemble vide $\emptyset$
- Trois parties ne contiennent qu'un seul élément $\{a\},\{b\},\{c\}$
- Trois parties contiennent deux éléments $\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}$
- Une partie contient trois éléments, c'est l'ensemble entier $\{a,b,c\}$

$$\text{Au total } 1+3+3+1=8=2^3$$

B) Permutation sans répétition de n objets

L'espace des permutations de n objets aura pour cardinal $n!$

Exemple : nombre de permutation de l'ensemble $\{a,b,c\}$

abc,acb,bac,bca,cab,cba soit $6=3!$

C) Échantillon de taille r avec remise

un échantillon de taille r avec remise, est une application de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ dans l'ensemble S . Pour chaque élément de l'échantillon, n choix sont possibles, dans l'espace Ω des échantillons de taille $r \leq n$, avec remise, a pour cardinal n^r

C'est le nombre d'arrangement avec répétition de n éléments pris r à r

Exemple : soit un ensemble de quatre lettres A,B,C et D . écrire tous les mots possibles que l'on peut former, avec ou sans répétition, avec deux lettres prises parmi ces quatre lettres :

$AA,AB,AC,AD,BA,BC,BD,CA,CB,CC,CD,DA,DB,DC,DD$.

On a seize choix $16 = 4^2$ $n=4$, $r=2$.

D) Échantillon de taille r sans remise

un échantillon de taille r sans remise, est une injection de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ dans l'ensemble S. l'espace Ω des échantillon ainsi défini a pour cardinal le nombre d'arrangement sans répétition de r éléments pris parmi n éléments.

$$A_n^r = n(n-1) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

On a en effet, n choix pour le premier élément ; (n-1) pour le deuxième, etc.

Exemple : dans une course dix chevaux prennent le départ.

Le nombre de tiercé possible est $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités.

10 possibilité pour le premier, 9 pour le deuxième, 8 pour le troisième

Ou bien : $n=10$ $r=3$ donc on a :

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720 \text{ tiercé}$$

E) Échantillon de taille r sans remise sans ordre :

(1)

F) Sous population de taille r avec répétition :

Un élément peut apparaitre plusieurs fois dans une telle sous-population, l'espace Ω peut aussi être considérée comme l'espace associé à l'expérience consistant à placer r éléments indiscernables dans n cases données

$$C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Exemple : Soit trois élément a, b et c quelle est le nombre de possibilités de former des mots de deux lettre parmi ces trois avec répétition :

Nous avons aa ;ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc soit 6 possibilité

Avec la formule on n=3 et r=2 Donc :

$$C_{n+r-1}^r = C_4^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6$$

Tableau récapitulatif	Ordre	Répétition	Sous population r	formule
A) Nombre de partie d'un ensemble	Non	Non	Non	2^n
B) permutation sans répétition de n objets	Oui	Non	Non	$n!$
C) échantillon de taille r avec remise	Oui	Oui	Oui ($r \leq n$)	n^r
D) échantillon de taille r sans remise	Oui	Non	Oui ($r \leq n$)	$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$
E) échantillon de taille r sans remise sans ordre :	Non	Non	Oui ($r \leq n$)	$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
F) Sous population de taille r avec répétition :	Non	Oui	Oui ($r \leq n$)	$C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

4 Exercices sur l'analyse combinatoire :

Ex1 :Une glace contient 4 boule avec un parfum différent, nous avons un ensemble de 9 parfum différents, combien de glace différente peut-on constituer :

Ordre : non , répétition : non r : oui

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}; \quad n=9, \quad r=4$$

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = 126$$

EX2 :Un amateur assidu de football souhaite regarder tous les match d'un championnat avec 20 équipe , sachant qu'un match oppose deux équipe , et qu'il y'a un match aller et retour entre deux équipes , combien de match va-t-il regarder ?

(2)

EX3 :Un entraineur a une équipe de 20 joueurs

Combien d'équipe différente de 11 joueurs peut-il former ?

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}; \quad n=20, \quad r=11$$

$$C_{20}^{11} = \frac{20!}{11!(20-11)!} = 167,960$$

Ex4 : Nous avons 12 élèves à aligner pour photo, suivant l'alignement combien de photos différentes peut-on avoir ?

(3)

Ex5 : combien de numéros de téléphones de 8 chiffres peut-on composer :

ordre : oui ; répétition : oui, r : oui

$$N = n^r \quad (n=10, r=8) = 10^8$$

Ex6 : classement dans une filière : les étudiants sont classés suivant deux années, chaque année un étudiant peut avoir son année soit : continu ; synthèse, rattrapage, la moyenne est comparée suivant chaque catégorie, la catégorie prioritaire est : CC, combien de catégories nous allons traiter :

(4)

Ex7 : une recette de cuisine doit comporter un type de sucre, un type de graisse et un type de protéine, nous avons en tous 3 types de sucre, 2 de protéine et 4 de graisse.

Combien de recettes différentes peut-on former ?

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$