FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Département de mathématiques
Année universitaire : 2021-2022
Enseignant : Dr. Medjahed DJILALI
TD : Méthodes numériques pour EDO - EDP (L3)

Exercice...01.

Soit l'équation différentielle à condition initiale $y'(t) = y(t) + t$ et $y(0) = 1$.

1/ Approcher la solution de cette équation en à l'aide de la méthode d'Euler

2/ En subdivisant l'intervalle de travail en 10 parties égales. Comparer à la solution exacte.

Exercice...02.

Approcher la solution de l'équation différentielle ci-dessous en $t_1 = 0.2$ en utilisant RK2, avec un pas

$h = 0.2$

$$y'(t) = y(t) - \frac{2t}{y(t)} \text{ et } y(0) = 1.$$

Exercice...03.

En donnant les solutions de l'équation différentielle ci-dessous avec la condition initiale $y(0) = 1$ puis

$y(0) = 1 + \varepsilon$, réel non nul, vérifier qu'elle conduit à des schémas instables.

$$y'(t) = 36y(t) - 37\exp(-t)$$

Exercice...04.

Utiliser la méthode d'Euler pour trouver les premières quatre valeurs de la solution $y = f(x)$ de l'équation

différentielle

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 1$, en prenant le pas $h = 0,1$. Effectuer les calculs avec trois

décimales exactes.

Exercice...05.

Soit l'équation différentielle du second ordre à conditions initiales :

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = 2y(t), t \in [a, b] \\ y(a) = 1, y'(a) = 2 \end{cases}$$

1/ Ecrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel de deux équations différentielles d'ordre un.

2/ Appliquer la méthode de RK2 à ce système .

Exercice...06.

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases} \tag{9.5}$$

On divise $[a, b]$ en m intervalles de longueur h, dans $\boxed{9.5}$ on remplace $y'(x_n)$ par $\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$ et $y''(x_n)$ par $\dfrac{y_{n+1} - y_n + y_{n-1}}{h^2}$

1/ Montrer que le problème $\boxed{9.5}$ se transforme en

$$\begin{cases} y_{n+1} = \phi(y_n, y_{n-1}) + h^2 f_n \\ y_0 = \alpha, y_m = \beta \end{cases} \tag{9.6}$$

avec $n = 1, ..., (m-1)$ et $f_n = f(t_n, y_n, \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h})$. Donner$\phi$.

2/ Ecrire $\boxed{9.6}$ sous forme matricielle.

3/ On suppose maintenant que $f(t, y, y') = -\lambda y$; quel système linéaire obtient-on pour $y_0, ..., y_m$.

Exercice...07.

Pour résoudre l'équation différentielle : $y' = f(t, y)$, où f est continue de $[a, b] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on propose la méthode à un pas suivante :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \\ \phi(t, y, h) = \alpha f(t, y) + \beta f(t + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hf(t, y)) + \gamma f(t + h, y + hf(t, y)) \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$.

1. Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve t-on la méthode d'Euler ?.

Même question pour la méthode RK2 ?.

2. On suppose dans la suite de l'exercice que $f(t, u) \in C^2([a, b] \times \mathbb{R})$ et L-lipschitzienne en y :

(a) Pour quelles valeurs α, β, γ la méthode proposée est stable ?

(b) Quelle relation doit satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit consistante ?

(c) Qu'on conclure pour la convergence ?

Exercice...08.

Soit f une application de $I \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, et soit $\tau \in \mathbb{R}$.

1. Donner le théorème assurant l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in I \\ y(a) = \tau \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur f pour qu'elle soit lipschitzienne en y uniformément par rapport à t

3. Quels sont parmi les problèmes ci dessous, ceux qui admettent une solution unique :

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{-y}{t \ln t} + \frac{1}{\ln t}, \forall t \in [e, 5] \\ y(e) = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y}, \forall t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice...09.

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + y, \forall t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Trouver la solution exacte de ce problème.

2. Appliquer la méthode d'Euler à ce problème, avec $h = 0.1$, puis evaluer la solution en $t = 0.3$. Comparer à la solution exacte.

Exercice...10.

Soit le problèlme de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2t - y, \forall t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Donner la solution générale de ce problème.

2. Appliquer la méthode d'Euler à ce problème avec $h = 0.2$, puis donner la solution numérique en $t = 0.4$, à 10^{-3} près.

3. Donner l'erreur théorique de la méhode d'Euler dans ce cas et la comparer à l'erreur effectivement commise. Commentaires ?

Exercice...11.

Soit l'équation différentielle du second ordre à conditions initiales :

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = 2y(t), t \in [a, b] \\ y(a) = 1, y'(a) = 2 \end{cases}$$

1/ Ecrire cette équation différentielle sous la forme d'un système différentiel de deux équations différentielles d'ordre un.

2/ Appliquer la méthode de RK2 à ce système.

Exercice...12.

1/ Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telle que

$$u_{n+1} \leq a u_n + b$$

a et b sont des constantes positives, montrer que

$$u_n \leq a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}, n \in \mathbb{N}.$$

2/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \leq e^{nx}$.

3/ Utiliser les deux questions précédentes pour démontrer le théorème de l'erreur d'Euler.

4/ De même pour le théorème l'erreur de Taylor..

Exercice 13 :

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = t + x + x^2$$

en utilisant la méthode de Taylor d'ordre 5 avec $h = 1/500$.

Exercice 14 (TP):

La vitesse d'une goutte de pluie est régie par l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = 32 - \frac{c}{m}v^2$$

où c est la résistance de l'air et m est la masse de la goutte. On démontre que la vitesse $v(t)$ atteint une valeur limite. Vérifier ce fait en résolvant l'équation différentielle précédente.

Exercice 15 :

Soit le problème de Cauchy

$$y''(t) + ty'(t) + (1+t)y(t) = t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

a) Transformer cette EDO en un système différentiel du premier ordre équivalent.

b) Effectuer deux étapes du schéma d'Euler explicite avec un pas $h = 1/2$. Déterminer les approximations de y, y' et y'' aux points $t_1 = 1/2$ et $t_2 = 1$.

Exercice 16 (TP) :

On considère le problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

sur l'intervalle $[0;10]$.

1. Calculer la solution exacte du problème de CAUCHY.
2. Soit h le pas temporel. Écrire la méthode d'EULER explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO).
3. En déduire une forme du type

$$u_{n+1} = g(h,n)$$

   avec $g(h,n)$ à préciser (autrement dit, l'itérée en t_n ne dépend que de h et n et ne dépend pas de u_n).
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour tracer les solutions
   - ⋆ exacte,
   - ⋆ obtenue avec la méthode d'EULER avec $h = 2.5$,
   - ⋆ obtenue avec la méthode d'EULER avec $h = 1.5$,
   - ⋆ obtenue avec la méthode d'EULER avec $h = 0.5$.
5. Que peut-on en déduire sur la A-stabilité de la méthode ?

Exercice 17(TP) :

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle

$$y'(t) = -\frac{1}{1+t^2}y(t).$$

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $y(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'**EULER implicite** avec un pas $h = 0.5$.