I. SYSTEMES DE COORDONNEES

I.1. Eléments de longueur, de surface, de volume dans des systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphérique

On vient d'introduire des densités volumiques, surfaciques et linéiques de charges ; il sera donc nécessaire d'exprimer dans les différents systèmes de coordonnées les déplacements, les surfaces et les volumes élémentaires.

Les déplacements élémentaires s'obtiennent en faisant varier de manière élémentaire chaque paramètre des coordonnées considérées. On se limitera ici à rappeler leurs expressions. En revanche, on explicitera les surfaces et les volumes élémentaires induits par ces déplacements.

Représentation d'un point dans l'espace

- **Coordonnées cartésiennes**

on munit le référentiel par un repère d'espace d'origine O; des axes orthogonaux *Ox, Oy, Oz,* et des vecteurs unitaires $\overline{u_x}, \overline{u_y}, \overline{u_z}$. La base est orthonormée (voir **figure 1**)

$\overline{u_x} \rightarrow$ axe Ox

$\overline{u_y} \rightarrow$ axe Oy

$\overline{u_z} \rightarrow$ axe Oz.

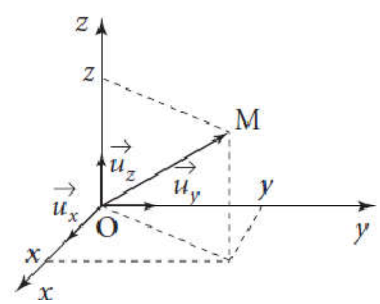


figure 1: Coordonnée cartésienne

soit un point ***M*** repéré par ses coordonnées d'espace ***(O,X,Y,Z)*** correspondant à la mesure algébrique de la projection de ***M*** successivement sur les trois axes du repère. Ces 3 coordonnées sont de même nature et homogènes à une longueur.

C'est une base qui ne change pas au cours du temps : ces vecteurs gardent la même direction, le même sens et la même norme au cours du temps. On dit encore que la base est *fixe* dans le repère. Ces vecteurs peuvent être représentés n'importe où dans l'espace mais en général ils sont représentés au point origine ***O***.

La connaissance du vecteur position $\overline{OM}$ permet aussi de repérer le point ***M***. Les composantes de ce vecteur, dans la base cartésienne $(\overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{u}_z)$.correspondent aux coordonnées du point ***M*** :

$\overline{OM} = r = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$ ....(1)

(x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes du point M.

(x, y, z) sont les composantes du vecteur position $\overline{OM}$dans la base cartésienne $(\overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{u}_z)$.

a) Déplacement élémentaire : Le déplacement élémentaire d'un point *M* de coordonnées (*x, y, z*) correspond à son déplacement jusqu'au point ; M' de coordonnées *(x+dx, y+dy, z+dz).*

Le vecteur de déplacement s'écrit:

$$\overline{MM'} = \overline{dM} = dx\overline{u_x} + dy\overline{u_y} + dz\overline{u_z}$$

Selon l'axe Ox, l'élément de longueur $d\ell$ engendré par le déplacement de M vers M' est : $\overline{dl} = dl\,\overline{u_x}$

Dans le plan (xoy), l'élément de longueur $d\ell$ engendré par le déplacement de M vers M' est : $\overline{dl} = dl\,\overline{u_x}$ + dl$\overline{u_y}$

Dans l'espace (oxyz), l'élément de longueur $d\ell$ engendré par le déplacement de M vers M' est : $\overline{dl} = dl\,\overline{u_x}$ + dl$\overline{u_y}$ + dl $\overline{u_z}$

L'élément de longueur dl s'exprime en m.

b) Surfaces élémentaires : De même, si on ne considère les déplacements que sur deux axes, on obtient trois surfaces élémentaires **figure*2***

- Dans le plan (xOy), l'élément de surface engendré par le déplacement de M vers M' décrit l'aire de l'élément de cette surface : $dS_1 = dx.dy$; dS_1 perpendiculaire au vecteur $\overline{u_z}$.
- Dans le plan (yOz) l'élément de surface : $dS_2 = dy.dz$; dS_2 perpendiculaire au vecteur $\overline{u_x}$.
- Dans le plan (zOx) l'élément de surface : $dS_3 = dz.dx$; dS_3 perpendiculaire au vecteur $\overline{u_y}$.

Elément de surface dS s'exprime en m^2

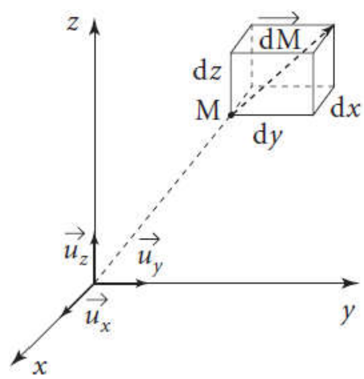


figure*2* *: déplacement surfaces et volume élémentaires en coordonnées cartésiennes*

c) Volume élémentaire : Dans l'espace (O,x,y,z), l'élément de volume engendré par le déplacement de M vers M' décrit le volume infinitésimal: $dV = dxdydz$ **figure*2***.

dV : un volume élémentaire s'exprime en m^3.

- **Coordonnées cylindriques**

Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques il suffit de compléter le système de coordonnées polaires (dans le plan xOy) par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z(appelée la cote) (voir **figure 3**)

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z dans la base associée au repère cylindrique ($\overline{u_r}$, $\overline{u_\theta}$, $\overline{u_z}$) , Avec $r \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

La base cylindrique associée à M est :

$\overline{u_r}$ radial (perpendiculaire à l'axe Oz)

$\overline{u_\theta}$, orthoradial (perpendiculaire. à Oz et $\overline{u_r}$)

$\overline{u_z}$ vecteur axial (suivant Oz)

M définit par sa coordonnée *z* et par les coordonnées polaires *r*, *θ* de son projeté sur le plan *xOy*.

L'Expression du vecteur position : $\overline{OM} = r\,\bar{u}_r + z\bar{u}_z \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\overline{dOM} = \mathrm{dr}\,\overline{u_r} + r\,d\theta\overline{u_\theta} + dz\,\overline{u_z}$

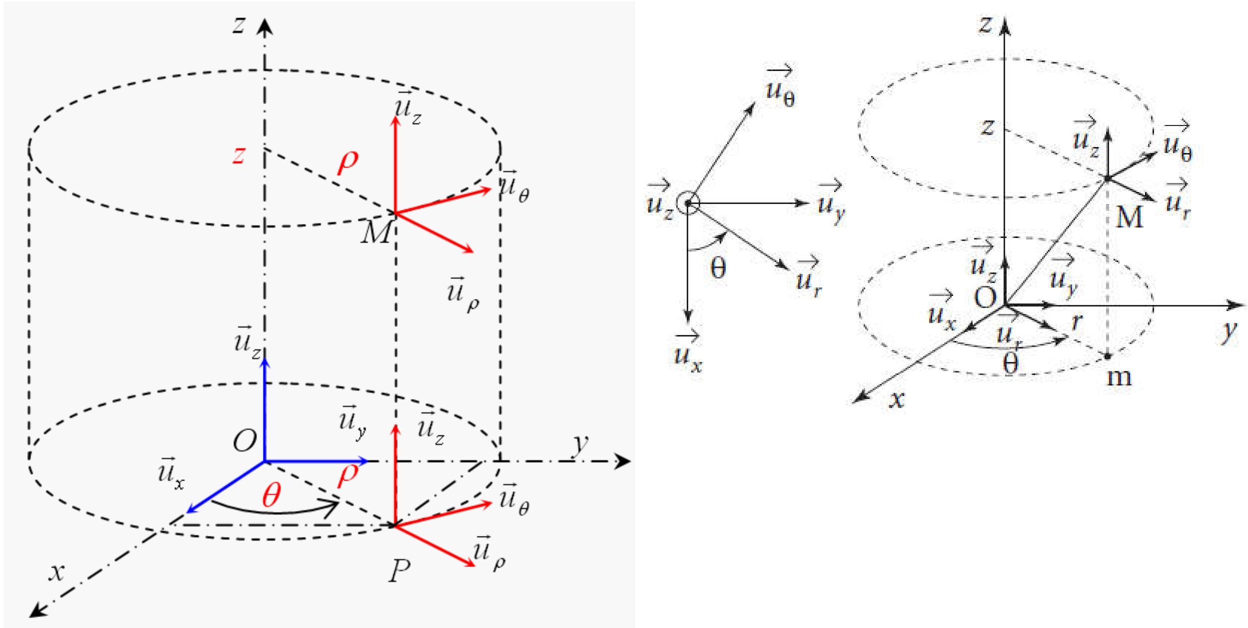


figure 3: Coordonnée cylindrique

a) Déplacement élémentaire : Le déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\overline{OM} = dr\bar{u}_r + rd\boldsymbol{\theta}\bar{u}_{\boldsymbol{\theta}} + dz\bar{u}_z \qquad (d\overline{OM})^2 = dr^2 + (r\,d\theta)^2 + dz^2$$

Si on fait varier r d'une valeur de dr, l'élément de longueur $d\ell$ s'écrit : $d\ell = dr$,

Si on fait varier l'angle θ d'un élément $d\theta$, l'élément de longueur $d\ell$ s'écrit : dl = r dθ

Si on fait varier le déplacement z d'un élément dz, l'élément de longueur $d\ell$ s'écrit : dl = dz

Surfaces élémentaires Dans ce repère cylindrique, élément de surface dS engendré par le déplacement de M en gardant l'une des coordonnées fixe on obtient trois surfaces élémentaires:

- Si on fixe le côté z: $\boldsymbol{dSz = dr.rd\theta}$**,** perpendiculaire au vecteur $\bar{u}_z$;
- Si on fixe le rayon r : $dS_r = \boldsymbol{rd\theta.dz}$, perpendiculaire au vecteur $\bar{u}_\theta$;
- Si l'angle θ est constant: $dS_\theta = dr.\,dz$, perpendiculaire au vecteur $\bar{u}_r$.

Cette représentation est à utiliser pour un système admettant une symétrie cylindrique (invariance par rotation autour de O*z)*.

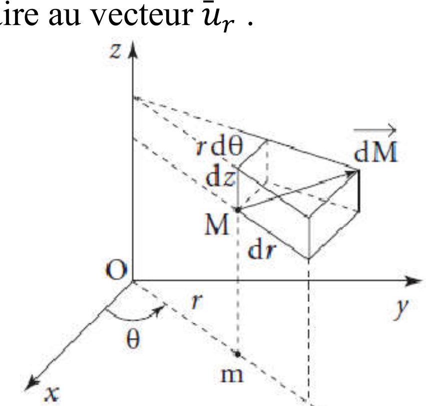


figure 4: volume et surfaces élémentaires en coordonnées cylindriques**.**

Volume élémentaire Nous considérons le volume infinitésimal dV engendré par le déplacement du point M est un cube de hauteur dz.

Voir la **figure 4**, les déplacements élémentaires suivant chaque axe induisent un volume élémentaire : $dV = dr.\, rd\theta.\, dz$

- **Coordonnéessphériques**

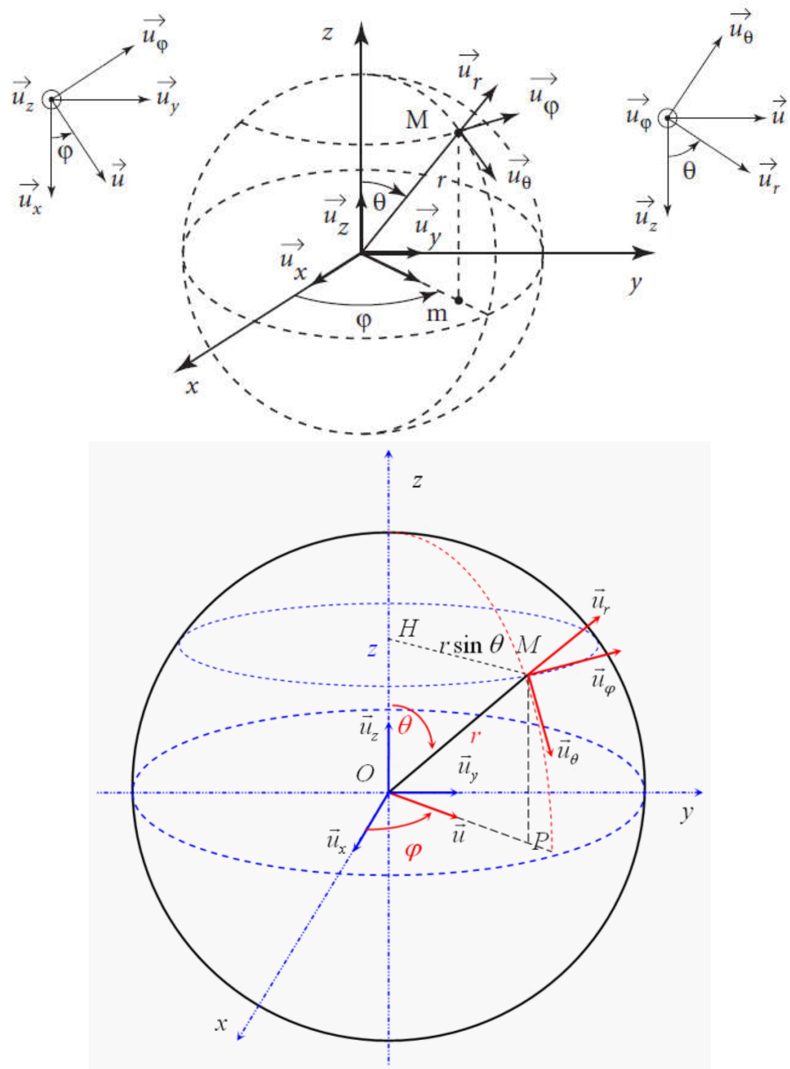


figure 5: Coordonnée sphérique

Dans ce système, la positon du point M est donnée par r, θ et φ dans la base associée au repère sphériques ($\overline{u_r}$, $\overline{u_\theta}$, $\overline{u_\varphi}$) On l'obtient par une rotation d'un angle φ autour de Oz, suivie d'une rotation d'un angle θ autour $\bar{u}_\varphi$

On définit M par la longueur $r = OM$ et les deux angles φ et θ.

r = OM toujours positif

$\theta = (\overline{OZ}, \overline{OM})$

$\varphi = (\overline{OX}, \overline{Om})$

les coordonnées sphériques de M sont r, θ et φ.

$$\overline{OM} = r.\bar{u}_r = \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$\overline{OM}^2 = r^2$

a) Déplacement élémentaire : Le déplacement infinitésimal du point M s'écrit :

$$d\overline{OM} = dr\bar{u}_r + r\, sin\, \boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\varphi}\bar{u}_\varphi + rd\boldsymbol{\theta}\bar{u}_\theta$$

$$d\overline{OM}^2 = dr^2 + r^2 sin^2 \boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\varphi}^2 + r^2 d\boldsymbol{\theta}^2$$

Avec: $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Si on fait varier r d'une valeur de dr, l'élément de longueur $d\ell$ s'écrit :

$d\ell = dr$,

Si on fait varier l'angle θ d'un élément $d\theta$, l'élément de longueur $d\ell$ s'écrit :

dl = r dθ

Si on fait varier l'angle φ d'un élément $d\varphi$, l'élément de longueur $d\ell$ s'écrit :

dl = r sin θ dφ

b) Surfaces élémentaires

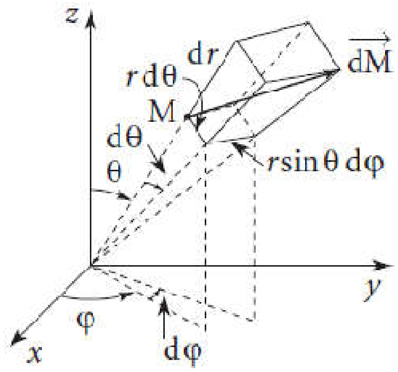
L'élément de surface dS engendré par le déplacement de M en gardant l'une des coordonnées fixe est :

- Si on fixe r : dS = r.dθ. r sin θ dφ = r^2 sin θ dθ.dφ perpendiculaire au vecteur $\bar{u}_r$
- Si on fixe θ : $dS = dr$.r sin θ dφ perpendiculaire au vecteur $\bar{u}_\theta$
- Si on fixe φ : $dS = dr$. r.dθ perpendiculaire au vecteur $\bar{u}_\varphi$.

Cette représentation est à utiliser pour un système admettant une symétrie sphérique (forces en $f.\bar{u}_r$ par exemple).

Si θ =constante, on retrouve des coordonnées polaires pour $\rho = rsin\theta \;\; r\; et\; \varphi$

Si φ =constante, on retrouve des coordonnées polaires pour r ; θ .



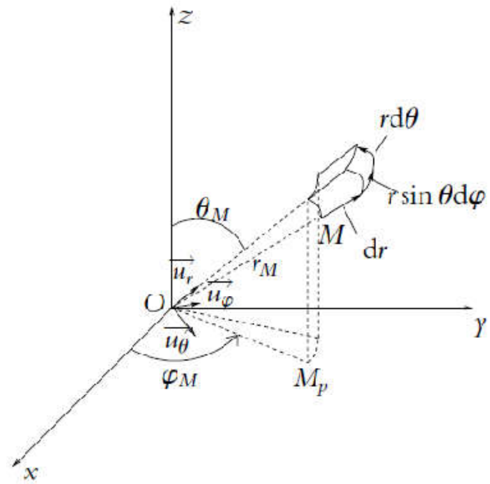


figure 5 : volume et surfaces élémentaires en coordonnées sphériques**.**

Volume élémentaire : Comme le montre la figure ci-contre, le volume infinitésimal dV engendré par le déplacement du point M, ce volume est donné par : $dV = dr.\, rd\theta.\, r \sin\theta\, d\varphi$

$dV = r^2 dr.\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

ÉLEMENTS DE CALCUL VECTORIEL

GENERALITES SUR LES CHAMPS

En thermes mathématique, un champ est une fonction qui décrit une grandeur physique en tout point de l'espace.

I.1. Champ scalaire : cette grandeur est représentée par un nombre unique en chaque point. Un champ scalaire est une fonction à plusieurs variables qui, à chaque point M de l'espace fait correspondre un scalaire *f(x, y, z)* (i.e. un nombre).

Exemple : de grandeurs scalaires qui peuvent varier d'un point à l'autre de l'espace.

- *Champ des températures*
- *Surface de niveau* (est une surface où la fonction scalaire à la même valeur).
- *la densité et le Potentiel électrostatique etc…..*

I.2. Champ vectoriel : Un champ vectoriel la grandeur physique est une fonction vectorielle à plusieurs variables qui à chaque point M de l'espace fait correspondre un vecteur $\bar{V}(M) = x\,\imath + y\,\jmath + z\,\bar{k}$, déterminé à la fois par un nombre et une direction.

Exemple :

- *Le champ des vitesses des points d'un corps animé d'un mouvement de rotation.*
- *La vitesse du vent et la force gravitationnelle*
- *Champ électrostatique* $\bar{E}(M)$ *etc…..*

I.3. Propriété d'un champ : Un champ, scalaire ou vectoriel, traduit une propriété locale de l'espace.

a) Ligne de champ : Une ligne de champ est une courbe tangente en chaque point au champ vectoriel.

b) Tube de champ : C'est un ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée.

c) Champ uniforme : C'est un champ où tout les vecteurs ont le même module, même direction et même sens.

d) Les champs peuvent dépendre également du temps ; s'ils n'en dépendent pas, ils sont dits stationnaires, statiques ou permanents.

Exemple :

✓ *Champ de pesanteur* (ligne de champ des droites parallèles).

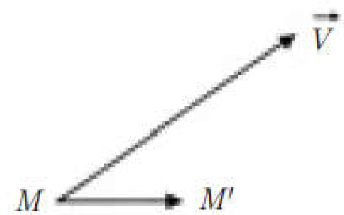
✓ *Champ radial :* C'est un champ dans lequel les vecteurs passent par un point fixe O. Dans ce cas les lignes de champ sont des droites passant par O.

II) Grandeurs fondamentales associées a un champ de vecteurs

1) CIRCULATION D'UN CHAMP VECTEUR

Soit un champ de vecteurs $\bar{V}(M)$ et un déplacement élémentaire $\overline{M\acute{M}} = \overline{dM}$, noté aussi $\overline{dl_M}$.

On note $d\mathcal{C}$ la Circulation élémentaire, c'est-à-dire :

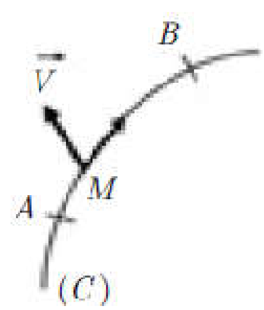


$$d\mathcal{C} = \bar{V}\,\overline{dl_M} \quad \text{(scalaire)} \qquad (1.1)$$

On appelle *circulation* du champ $\bar{V}(M)$ le long d'une courbe   orienté de A à B est l'intégrale curviligne : $\mathcal{C}_{\bar{V}} = \int_{M\epsilon} \bar{V}.\overline{dl_M} = \int_{M\epsilon} V.dl.cos\theta$

Si $\bar{V}(M)$ n'est pas stationnaire, la circulation le long de   est une fonction du temps $\mathcal{C}(t)$, l'intégrale étant calculée à t fixé.

Exemple d'application : Travail d'une force :



$$W_{A\quad B}(F) = \int_A^B F.\overline{dl}$$

1) Circulation sur un chemin

On considère un trajet AB sur une courbe (C). Il convient de fixer le sens de parcours sur la courbe *(C)*.

$$\mathcal{C}_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} d\mathcal{C} = \int_{\widehat{AB}} \bar{V}.\overline{dl_M}$$

Si le chemin est fermé : $\mathcal{C}_{\widehat{AB}} = \oint \bar{V}.\overline{dl_M}$

Par exemple, si le champ de vecteurs est un champ de forces, la circulation n'est autre que le travail.

Propriétés :

• La circulation d'une somme de champs est égale à la somme des circulations des champs : $\int_{M\in} \left(\sum_i \bar{V}_i(M)\right).\overline{dl_M} = \sum_i \left(\int_{M\in} \overline{V(M)}.\overline{dl_M}\right)$. Ce résultat se démontre aisément en utilisant la linéarité de l'intégration et l'inversion de la somme finie et des intégrales.

• La circulation change de signe lorsqu'on change le sens de parcours donc l'orientation de la courbe, lorsqu'on inverse les bornes d'intégration :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

1) FLUX D'UN CHAMP DE VECTEURS

Considérons un élément de surface (surface élémentaire) $\overline{dS}$ traversé par un champ de vecteurs $\bar{V}(M)$. Le Flux élémentaire est donné par :$d\Phi = \bar{V}(M).\overline{dS_M}$

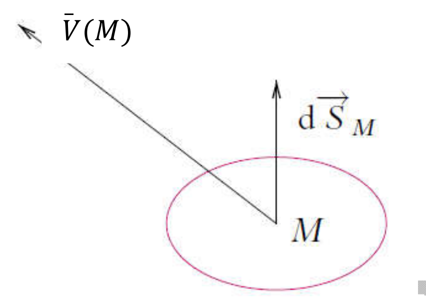


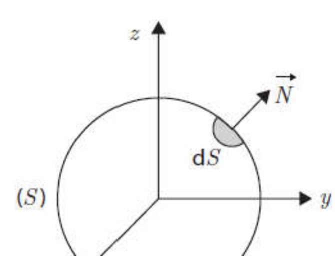
Fig 4: Définition du flux d'un champ de

d'où $d\Phi = \bar{V}.\overline{dS_M} = \bar{V}.\bar{N}.dS_M$

On a alors : $\Phi = \iint_s d\Phi = \iint_s \bar{V}.\bar{N}.dS_M = \iint_s V.dS_M.cos\theta$

Exemple : Champ à symétrie sphérique

Calculer le flux du vecteur $\bar{V}(M) = f(r)\bar{u}_r$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.



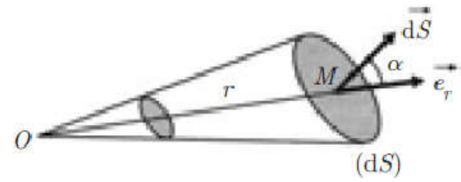
On a tout simplement :

$$\Phi = \quad {}_s\bar{V}.\overline{N}.ds \quad = \quad {}_s\, f(r)ds = 4\pi r^2 f(r)$$

Car *f (r)* est constant quand on se déplace sur la sphère.

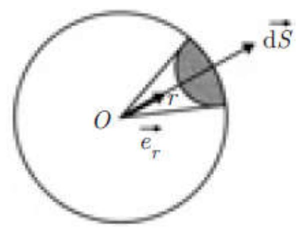
3) ANGLE SOLIDE

Par définition l'Angle solide élémentaires $d\Omega$ sous lequel on voit une surface élémentaire $\overline{dS}$ à partir d'un point donné *O* est :



$$d\Omega = \frac{\overline{\mathrm{dS}}.\overline{\mathrm{er}}}{\mathrm{r}^2} = \frac{\mathrm{dS}.\cos\alpha}{\mathrm{r}^2}$$

Dans le cas où l'élément d*S* est pris sur la sphère de centre ***O*** et de rayon ***r***, on a tout simplement : $d\Omega = \frac{dS}{r^2}\bar{N}.\overline{er} = \frac{dS}{r^2}$

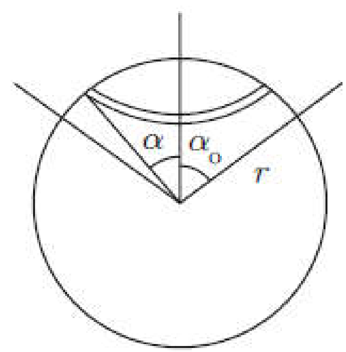


Exemple :

• Espace entier : $\Omega = \frac{1}{r^2} \quad {}_s ds = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi\ sterad$

• Demi-espace entier : $\Omega = 2\pi\ \ stérad.$

• Cône de demi-angle au sommet α_0



$$dS \;=\; 2\pi r \sin\alpha\ r\ d\alpha \;=\; 2\pi r^2 \sin\alpha\ d\alpha$$

$$\Omega = \iint_s \frac{ds}{r^2} = \int_0^{\alpha_0} 2\pi.\sin\alpha.d\alpha$$

$$\Omega \;=\; 2\pi(1 \qquad \cos\alpha_0)$$

III) OPERATEURS FONDAMENTAUX SUR LES CHAMPS SCALAIRES ET VECTORIELS

1) NOTATION DEL OU OPERATEUR NABLA $\bar{\nabla}$: L'opérateur del ou nabla est un opérateur de dérivation. Son expression en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\bar{\nabla} = \overline{u_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{u_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Application : On peut appliquer l'opérateur $\bar{\nabla}$ soit à un scalaire soit à un vecteur.

- *Appliqué à la fonction scalaire : f (x, y, z)*

$$\bar{\nabla} f\ (x, y, z) = \overline{u_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{u_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \overline{u_z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Appelé gradient de f c'est un vecteur : $\bar{\nabla} f\ (x, y, z) = \overline{\mathrm{grad}}\, f\ (x, y, z)$

Le gradient (ou encore $\bar{\nabla}$, opérateur vectoriel polaire nabla) du champ scalaire *f (x, y, z)* on note Le vecteur $\overline{grad} f$ est défini par : $df = \overline{grad} f\ .\overline{dl_M}$.

- *Appliqué à un Vecteur :*

\- On obtient soit un scalaire soit un vecteur $\bar{\nabla}.\bar{V} = div\bar{V}$, appelé divergence de $\bar{V}$, c'est un scalaire.

\- $\bar{\nabla}\ \ \bar{V} = \overline{rot}\,\bar{V}$, appelé rotationnel de $\bar{V}$, c'est un vecteur

Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre. Cela signifie qu'ils ne font intervenir que des dérivées partielles (ou différentielles) premières des champs, à la différence, par exemple, du laplacien qui fait intervenir des dérivées partielles du second ordre.