

La méthode des volumes finis

1 Introduction :

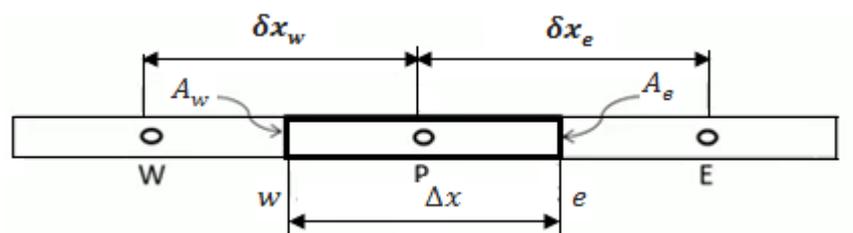
La méthode des volumes finis est une méthode numérique qui permet d'approcher la solution d'une équation différentielle régissant un phénomène donné.

2 Etapes de résolution avec la méthode des volumes finis

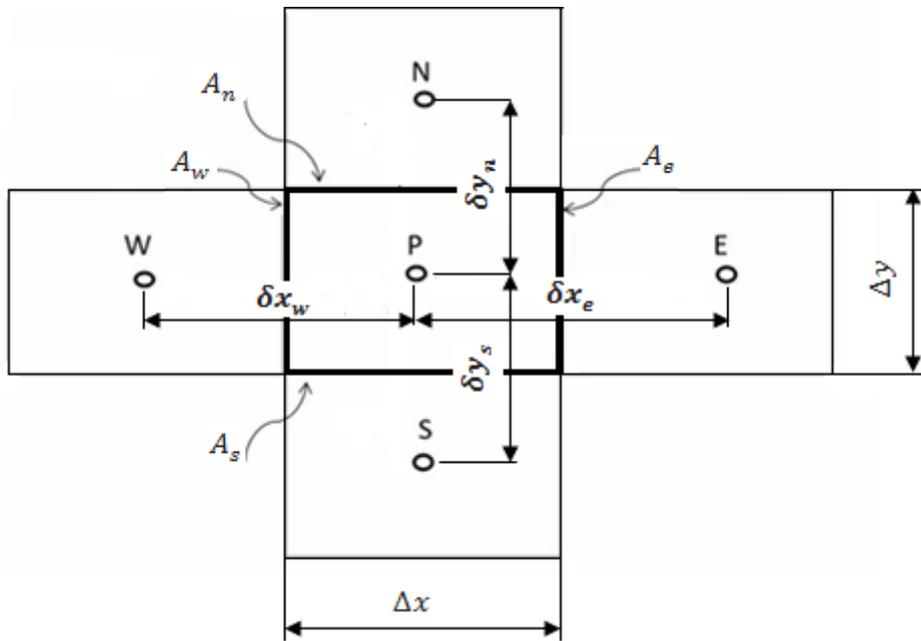
- 1- Définir l'équation du phénomène.
- 2- Discrétisation du domaine (subdivision du domaine en volumes finis).
- 3- Intégration de l'équation sur chaque volume élémentaire (Théorème de Gauss ou théorème d'Ostrogradski).
- 4- Traitement des conditions aux limites.
- 5- Formation du système d'équations algébriques résultants et sa résolution.
- 6- Présentation des résultats (comparaison avec la solution analytique ou à l'expérience).

3 Volumes de contrôles en volumes finis

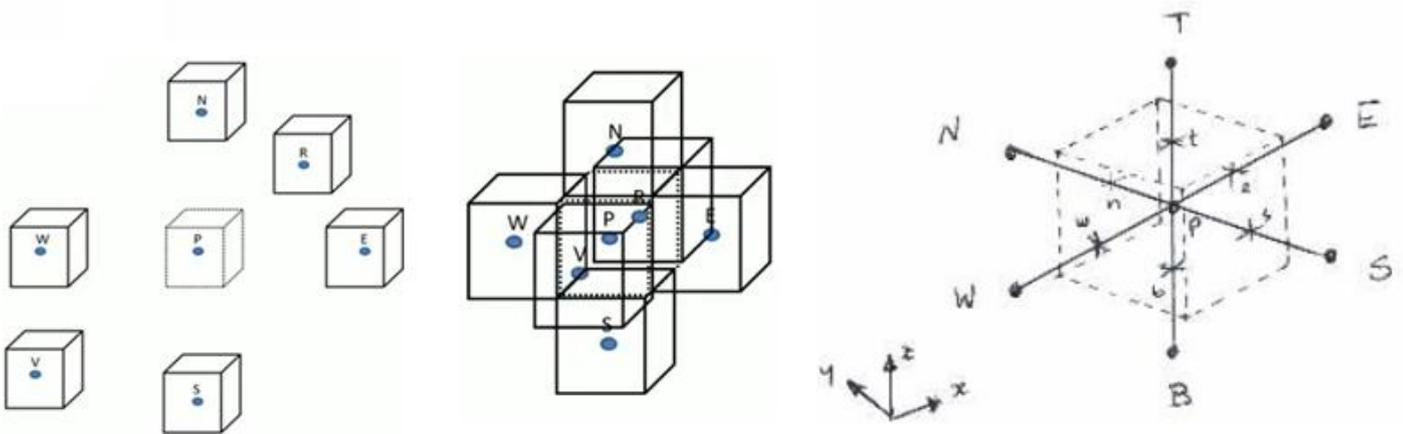
- **Volume de contrôle à une dimension (1D)**



- **Volume de contrôle à deux dimensions (2D)**



- Volume de contrôle à trois dimensions (3D)



3 Exemples du phénomène de transfert de chaleur qui est gouverné par l'équation de la diffusion

Cette équation peut s'écrire d'une manière générale sous la forme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Gamma \text{grad} \Phi) + S_{\Phi} = 0 \quad (1)$$

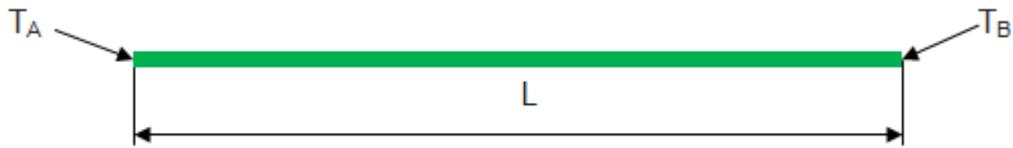
Où Γ est le coefficient de la diffusivité qui dépend du matériau utilisé

L'équation (1) dans un repère cartésien s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_{\Phi} = 0 \quad (2)$$

3.1 Cas de transfert thermique dans un fil électrique d'une longueur L sans terme source

On considère le domaine 1D sans terme source (ni perte et ni de gain de chaleur dans le domaine)

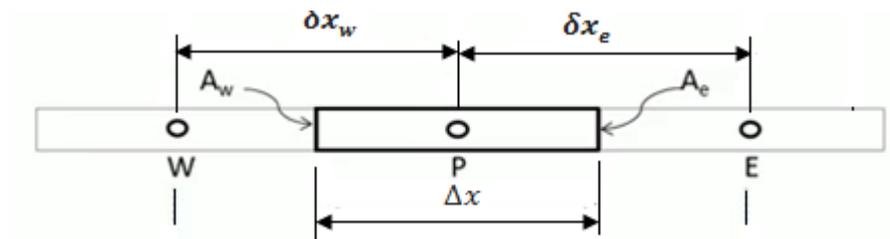
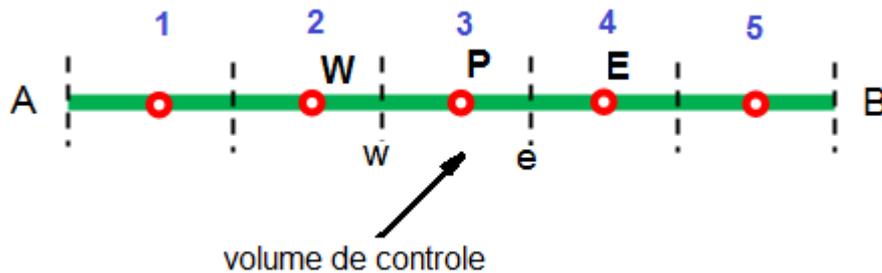


Etape 1 Définir l'équation du phénomène

L'équation de la diffusion suivant la direction x est comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0$$

Etape 2 : le maillage du domaine



Etape 3- intégration de l'équation sur chaque volume de contrôle (Théorème d'Ostrogradski)

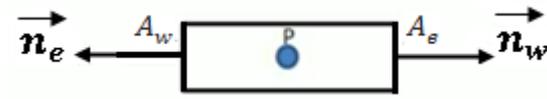
L'application du théorème d'Ostrogradski permet de transformer une intégrale de volume en intégrale de surface :

$$\int_{V_c} \text{div}(\Phi) dV = \int_{S_c} \Phi \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow \int_{V_c} \text{div}(\Gamma \text{grad} \Phi) dV = \int_{S_c} (\Gamma \text{grad} \Phi) \vec{n} dS$$

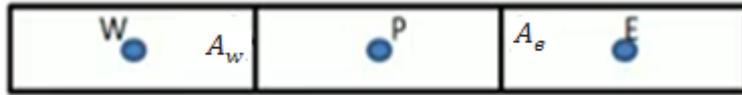
$$\Rightarrow \int_{V_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dV = \int_{S_c} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \vec{n} dS = 0$$

$$\int_{S_c} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \vec{n} dS = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w n_w A_w \right] + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e n_e A_e \right] = 0$$



$$= \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w (-1) A_w \right] + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e (1) A_e \right] = 0$$

$$= \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} A \right)_e \right] - \left[\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} A \right)_w \right] = 0$$



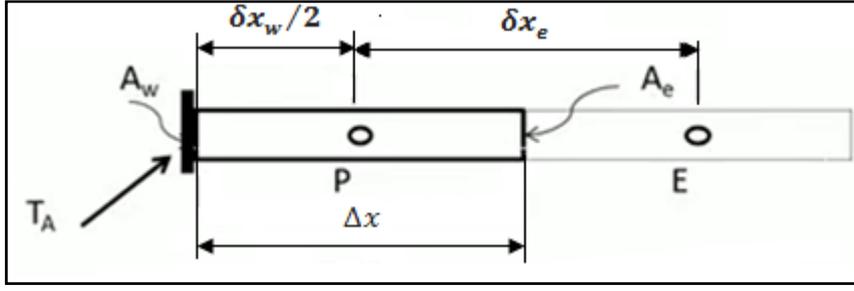
$$= \left(\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_e} A_e \right) - \left(\Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x_w} A_w \right) = 0$$

$$- \left(\frac{\Gamma_e \cdot A_e}{\delta x_e} + \frac{\Gamma_w \cdot A_w}{\delta x_w} \right) \Phi_P + \frac{\Gamma_w \cdot A_w}{\delta x_w} \Phi_W + \frac{\Gamma_e \cdot A_e}{\delta x_e} \Phi_E = 0$$

$$\text{on obtient} \Rightarrow \begin{cases} a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E \\ \text{Avec :} \\ a_W = \frac{\Gamma_w \cdot A_w}{\delta x_w} \quad \text{et} \quad a_E = \frac{\Gamma_e \cdot A_e}{\delta x_e} \\ a_P = a_W + a_E \\ \Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_P}{2} \quad \text{et} \quad \Gamma_w = \frac{\Gamma_P + \Gamma_W}{2} \end{cases}$$

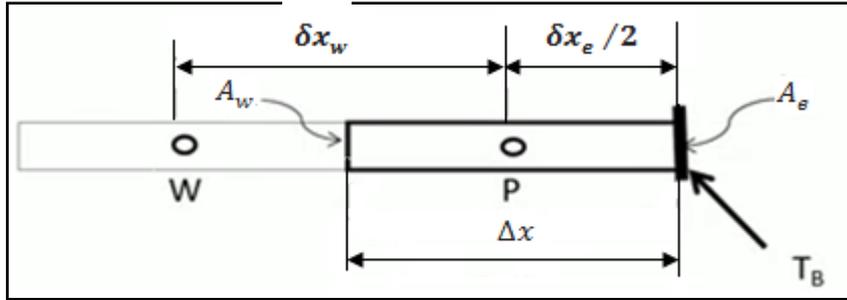
Etape 4 : traitement des conditions aux limites

Nœud 1 :



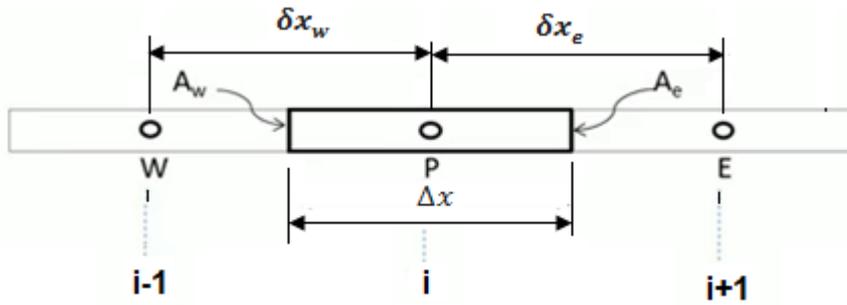
$$\begin{aligned}
 \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} A \right)_w &= \left(\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_e} A_e \right) - \left(\Gamma_w \frac{\Phi_P - T_A}{\frac{\delta x_w}{2}} A_w \right) = 0 \\
 &= - \left(\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_e} A_e \right) - \left(\Gamma_w \frac{\Phi_P - T_A}{\frac{\delta x_w}{2}} A_w \right) = 0 \\
 - \left(\frac{\Gamma_e \cdot A_e}{\delta x_e} + \frac{2 \Gamma_w \cdot A_w}{\delta x_w} \right) \Phi_P + 2 \frac{\Gamma_w \cdot A_w}{\delta x_w} T_A + \frac{\Gamma_e \cdot A_e}{\delta x_e} \Phi_E &= 0 \\
 (a_E + 2a_W) \Phi_P &= 2a_W T_A + a_E \Phi_E
 \end{aligned}$$

Nœud 5



$$\begin{aligned}
 \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} A \right)_w &= \left(\Gamma_e \frac{T_B - \Phi_P}{\frac{\delta x_e}{2}} A_e \right) - \left(\Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x_w} A_w \right) = 0 \\
 &= - \left(\Gamma_e \frac{T_B - \Phi_P}{\frac{\delta x_e}{2}} A_e \right) - \left(\Gamma_w \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x_w} A_w \right) = 0 \\
 - \left(2 \frac{\Gamma_e \cdot A_e}{\delta x_e} + \frac{\Gamma_w \cdot A_w}{\delta x_w} \right) \Phi_P + \frac{\Gamma_w \cdot A_w}{\delta x_w} \Phi_W + 2 \frac{\Gamma_e \cdot A_e}{\delta x_e} T_B &= 0 \\
 (2a_E + a_W) \Phi_P &= 2a_E T_B + a_W \Phi_W
 \end{aligned}$$

Etape 5 : formation du système d'équation algébrique résultant et sa résolution :



$$a_W \Phi_W - a_P \Phi_P + a_E \Phi_E = 0$$

$$a_{i-1} \Phi_{i-1} - a_i \Phi_i + a_{i+1} \Phi_{i+1} = 0$$

$$\text{Nœuds 2,3 et 4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 \Phi_1 - a_2 \Phi_2 + a_3 \Phi_3 = 0 \\ a_2 \Phi_2 - a_3 \Phi_3 + a_4 \Phi_4 = 0 \\ a_3 \Phi_3 - a_4 \Phi_4 + a_5 \Phi_5 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Nœud 1} \Rightarrow -a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 = -2a_W T_W$$

$$\text{Nœud 5} \Rightarrow a_4 \Phi_4 - a_5 \Phi_5 = -2a_E T_B$$

Mise sous forme matricielle

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -a_5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2a_W T_W \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2a_E T_B \end{Bmatrix}$$

Références :

- H. K. Versteeg & W. Malalasekera, "An introduction to computational fluid dynamics". The finite volume methode, 1ère édition, Longman Group Ltd, England, 1995.
- A. Azzi, "Méthodes numériques, la méthode des volumes finis" Faculté de Génie Mécanique, USTO, Oran, Algérie.
- J. H. Ferziger and M. Peric, "Finite Volume Methods", Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, NY, 3rd edition, 2002"
- H. Lomax, T. H. Pulliam, D.W. Zingg, "Finite Volume Methods", Fundamentals of Computational Fluid Dynamics (Scientific Computation). Springer, 2003"