Université Ahmed Zabana-Relizane   Sciences et Technologies   2021/2022

Première année ST -Maths 2

Fiche de TD 2

Exercice 1 : Résoudre le système linéaire suivante :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode de cramer
2. En utilisant la méthode de la matrice inverse.
3. En utilisant la méthode de Gauss .

Exercice 2 : Résoudre le système linéaire suivante :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 11y + 10z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Résoudre suivant les valeurs de α le système suivant :

$$(S_\alpha) \quad \begin{cases} \alpha x + \alpha y + \frac{1}{2}\alpha z = 1 \\ x - \alpha y + \frac{1}{2} z = -1 \\ y - \alpha z = 4 \end{cases}$$

Exercice 4 (*à la maison*) : On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

-Résoudre le système (S) de deux façons différentes : par la méthode de la matrice inverse puis par la méthode de cramer .

Corrigée

Solution de l'exercice 1 :

a) Méthode de cramer

On a $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\det A = -8 \neq 0$ donc (S) est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = 0\,, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{1}{2} \quad et \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{1}{2}$$

b) Méthode de la matrice inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = -8 \neq 0$ alors A est inversible (A^{-1} existe).

$$com\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(com\ A)^t = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ (com\ A)^t = \frac{-1}{8} \times \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

On a $AX = B \implies X = A^{-1}B$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Méthode de gauss

$$\begin{cases}2x+y+z=1\\ x-y+z=0\\ x+y+3z=2\end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_1-2L_3}{\overset{L_2\leftarrow L_1-2L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases}2x+y+z=1\\ 3y-z=1\\ -y-5z=-3\end{cases} \overset{L_3\leftarrow L_2+3L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases}2x+y+z=1\\ 3y-z=1\\ -16z=-8\end{cases}$$

$$x=0, \qquad y=\frac{1}{2} \text{ et } z=\frac{1}{2}$$

<u>Solution de l'exercice 2 :</u>

$\begin{cases} x+\ y+\ z=0\\ 2x-3y+\ 4z=\ 0\\ 4x-11y+10z=\ 0\end{cases}$ Système homogène la matrice associée $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 4 & -11 & 10\end{pmatrix}$

$\det A=0$ (n'est pas inversible) le système n'est pas de Cramer car $\det A=0$.

On extrait de (S) le système (S') suivant :

(S') : $\begin{cases} x+y=-z\\ 2x-3y=-4z\end{cases}$ la matrice associée $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-z\\ -4z\end{pmatrix}$

$\det M=-5\neq 0$ par la méthode de Cramer :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-z & 1\\ -4z & -3\end{vmatrix}}{-5}=-\frac{7}{5}z \text{ et } y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -z\\ 2 & -4z\end{vmatrix}}{-5}=\frac{2}{5}z$$

On remplace dans l'équation (3) : $4x-11y+10z=4\left(-\frac{7}{5}z\right)-11\left(\frac{2}{5}z\right)+10z=0 \quad \forall z\in\mathbb{R}$.

Donc finalement l'ensemble de solutions $E=\left\{\left(-\frac{7}{5}z,\frac{2}{5}z,z\right) \ / \ z\in\mathbb{R}\right\}$

Soit $z=k\in\mathbb{R}$, $E=\left\{\left(-\frac{7}{5}k,\frac{2}{5}k,k\right) \ / \ k\in\mathbb{R}\right\}$ une infinité de solutions.

<u>Solution de l'exercice 3 :</u>

Posons

$$A_\alpha=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha & \frac{1}{2}\alpha\\ 1 & -\alpha & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\alpha\end{pmatrix}$$

$$\det A_\alpha = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -\alpha & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} -\alpha & \frac{1}{2} \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\right) - \left(-\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha\right)$$

$$= \alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha + \alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha$$

$$= \alpha^2(\alpha + 1).$$

Si $\det A_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$. (S_α) admet une seule solution.

Si $\det A_\alpha = 0 \Longrightarrow (S_\alpha)$ admet une infinité de solutions ou il n'admet aucune solution.

- Si $\det A_\alpha \neq 0$. La solution est :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \frac{1}{2}\alpha \\ -1 & -\alpha & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -\alpha \end{vmatrix}}{det\, A_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}(\alpha+1)(4\alpha-1)}{\alpha^2(\alpha+1)} = \frac{(4\alpha-1)}{2\alpha^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \frac{1}{2}\alpha \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\alpha \end{vmatrix}}{det\, A_\alpha} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{det\, A_\alpha} = \frac{(\alpha+1)(-4\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)} = \frac{-4\alpha+1}{\alpha^2}.$$

- Si $\det A_\alpha = 0$

<u>1^{er} situation :</u> $(\alpha = 0)$.

$$(S_0)\ \begin{cases} 0 = 1 \ldots\ldots \text{impossible} \\ x + \frac{1}{2}z = 1 \\ y = 4. \end{cases}$$

Donc (S_0) n'admet pas de solution .

<u>$2^{ème}$ situation :</u> $(\alpha = -1)$.

$$(S_{-1})\ \begin{cases} -x - y - \frac{1}{2}z = 1 \ldots\ldots (1) \\ x + y + \frac{1}{2}z = -1 \ldots\ldots (2) \\ y + z = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

De (3) : $y = 4 - z \dots\dots (4)$.

En remplace (4) dans (2) : $x + 4 - z + \frac{1}{2}z = -1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}z - 5 \dots\dots (5)$.

Si (4) et (5) vérifient (1) alors (S_{-1}) admet une infinité de solutions, sinon (S_{-1}) n'a aucune solution :

(4) et (5) dans (1) : $-\frac{1}{2}z + 5 - 4 + z - \frac{1}{2}z = 1$

donc (S_{-1}) admet une infinité de solutions E, avec

$$E = \left\{\left(\frac{1}{2}z - 5, 4 - z, z\right) \ / \quad z \in \mathbb{R} \quad \right\}.$$