Université Ahmed Zabana Relizane

Faculté des Science et de la Technologie

Département : Génie Mécanique, Génie civil et Travaux Publics.

Module : **Mathématiques4**

Fiche TD N°02 - Fonctions Holomorphes-

Exercice N°01 :

1) À l'aide de la définition calculer la dérivée de $f(z) = z^2 - z$

2) Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$.

Exercice N°02 :

1. (a) Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. définie par $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ est une fonction harmonique.

   (b) Trouver la fonction $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f = u + iv$ soit holomorphe.

2. Ci-dessous sont les parties réelles de fonctions holomorphes. Trouver ces fonctions

   a) $u(x, y) = 3x + 1$, **b)** $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$, **c)** $u(x, y) = -2xy$.

Exercice N°03 :

1) Démontrer que la fonction : $Q(x,y) = \arctan(x.y)$ n'est pas harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2) Sous quelles conditions sur les constants réelles a, b, c et d la fonction

   $p(x,y) = 2ax^3 + 3bxy^2 + cx^2y + 4dy^3$ Est-elle Harmonique sur $\mathbb{R}$?

3) Déterminer les conditions sur les constants a, b, c et d qui rendent la fonction g Holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que : $g(z) = (ax^2 + bx^2y^2) + i\,(cx^3y^2 + dy^2)$
4) Déterminer la fonction Holomorphe f = $u + iv$ dont la partie réelle est

$$u(x,y) = e^x cosy$$

5) Déterminer la fonction Holomorphe f = $u + iv$ dont la partie imaginaire est

$$v(x,y) = x^2 - y^2 + y$$