Corrigé TD N° Maths4 -2022-

Exercice N°01

a) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{2-i}{1+3i} = \dfrac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{2-6i-i+3i^2}{1^2-(3i)^2} = \dfrac{2-7i-3}{1+9} = \dfrac{-1}{10} - \dfrac{7}{10}i.$

b) $\dfrac{zw}{z+w} = \dfrac{(2-i)(1+3i)}{2-i+1+3i} = \dfrac{5+5i}{3+2i} = \dfrac{(5+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{25}{13} + \dfrac{5}{13}i.$

Exercice N°02

1. (a) **Forme trigonométrique du nombre complexe $\alpha = -64$.**
On a $|\alpha| = 64$, comme α est un nombre réel négatif alors $arg(\alpha) = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\alpha = 64\, e^{i(\pi+2k\pi)}.$$

(b) **Racine cubique de α.**
α admet trois racines cubiques $\alpha_k = \left(\sqrt[3]{64}\right) e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}$, avec $k = 0, 1, 2$. C'est à dire ;

$$\alpha_1 = 4\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + i2\sqrt{3},$$

$$\alpha_2 = 4\, e^{i\pi} = 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = -4,$$

$$\alpha_3 = 4\, e^{i\frac{5\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - i2\sqrt{3}.$$

2. (a) **Forme trigonométrique du nombre complexe $\beta = -1 - i$.**
On a $|\beta| = \sqrt{2}$, par suite

$$\beta = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right).$$

Donc $arg(\beta) = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\beta = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)}$.

(b) **Racine cubique de β.**
β admet trois racines cubiques $\beta_k = \left(\sqrt{2}\right)^{1/3} e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{+2k\pi}{3}\right)}$, avec $k = 0, 1, 2$. C'est à dire ;

$$\beta_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = \cdots,$$

$$\beta_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \cdots,$$

$$\beta_3 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{13\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right) = \cdots.$$

Exercice N°03

a) Sous forme polaire $1+i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}$. En élevant à la puissance 1000 les deux membres de cette égalité et à l'aide de la formule de De Moivre

$$\begin{aligned}(1+i)^{1000} &= \sqrt{2}^{1000}\left\{\cos\left(1000\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)+i\sin\left(1000\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)\right\}\\ &= \sqrt{2}^{1000}\left\{\cos\left(250\pi+2000k\pi\right)+i\sin\left(250\pi+2000k\pi\right)\right\}\\ &= 2^{500}\left(1+i0\right)=2^{500}.\end{aligned}$$

b) Sous forme polaire

$$\begin{aligned}\sqrt{3}-i &= 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right\},\\ -1+i\sqrt{3} &= 2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right\}.\end{aligned}$$

D'après la formule de De Moivre,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^{3} &= 2^{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)\right\},\\ \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5} &= 2^{-5}\left\{\cos\left(-\frac{10\pi}{3}-10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}-10k\pi\right)\right\}.\end{aligned}$$

Si on a deux nombres complexes s'écrivant sous forme polaire $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_2\right)$ et $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$, alors le produit $z_1z_2=r_1r_2\left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}-i\right)^{3}\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-5} &= 2^{3}2^{-5}\left\{\cos\left(-\frac{23\pi}{6}-4k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{23\pi}{6}-4k\pi\right)\right\}\\ &= 2^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i.\end{aligned}$$

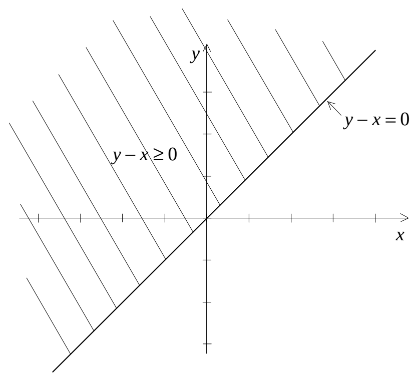
Exercice N°04

a)

Si $z = x + iy$, l'inégalité $|z - 3i| \leq |z - 3|$ devient alors, en prenant le carré de deux membres

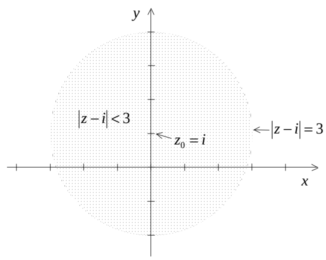
$$x^2 + (y-3)^2 \leq (x-3)^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad -6y \leq -6x.$$

D'où $y - x \geq 0$. L'ensemble $|z - 3i| \leq |z - 3|$ est donc la partie dessus de la droite $y - x = 0$, la droite y comprise. Dans la figure ci-contre, c'est la partie hachurée.



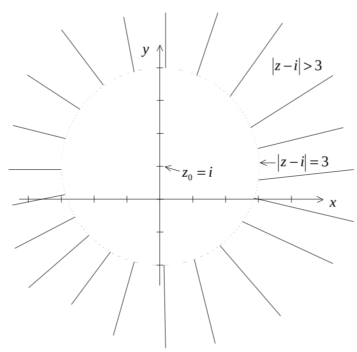
b)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| < 3\}$ est un disque de centre $z_0 = i \equiv (0, 1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle $|z - i| = 3$ non compris. Voir la figure ci-contre.



c)

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - i| > 3\}$ est l'extérieur du cercle de centre $z_0 = i \equiv (0, 1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle non compris. C'est la partie hachurée dans la figure ci-contre.



d)

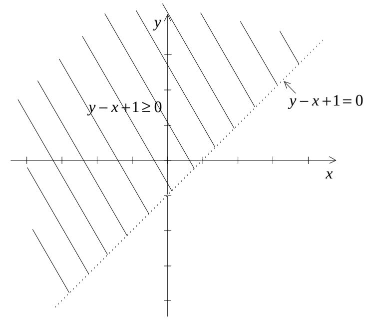
L'ensemble $\mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{Im}\, z < 1$ s'écrit sous forme

$$x - y < 1 \text{ ou } y - x + 1 > 0.$$

C'est la partie dessus de la droite $y - x + 1 = 0$,

la droite non comprise.

Voir la partie hachurée dans la figure ci-contre.



1. on a

$$\begin{aligned}
|(1-i)z - 3i| = 3 &\Longleftrightarrow \left|z - \frac{3i}{1-i}\right| = \frac{3}{|1-i|} \\
&\Longleftrightarrow \left|z - \frac{3i(1+i)}{2}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \left|z + \frac{3}{2} - i\frac{3}{2}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

   (1) est l'équation du cercle de centre $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. **Détermination de l'ensemble de points vérifiant** $\frac{z-3}{z-5} = 1$, posons $z = x + iy$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{z-3}{z-5} &= \frac{x+iy-3}{x+iy-5} \\
&= \frac{[(x-3)+iy]\,[(x-5)-iy]}{(x-5)^2+y^2} \\
&= \frac{(x-3)(x-5)+y^2+i\,[y(x-5)-y(x-3)]}{(x-5)^2+y^2} \\
&= \frac{x^2-8x+15+y^2-i2y}{(x-5)^2+y^2}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

   Par suite d'après (2) on a

$$\frac{x^2-8x+15+y^2-i2y}{(x-5)^2+y^2} = 1.$$

   En d'autres termes

$$\begin{aligned}
x^2-8x+15+y^2-i2y &= (x-5)^2+y^2 \\
&= x^2-10x+25+y^2,
\end{aligned}$$

   ce qui est équivalent à

$$x = 5 \quad \text{et} \quad y = 0.$$

   D'où l'ensemble de points recherché est le point du plan complexe d'affixe $z = 5$.