Chapitre II

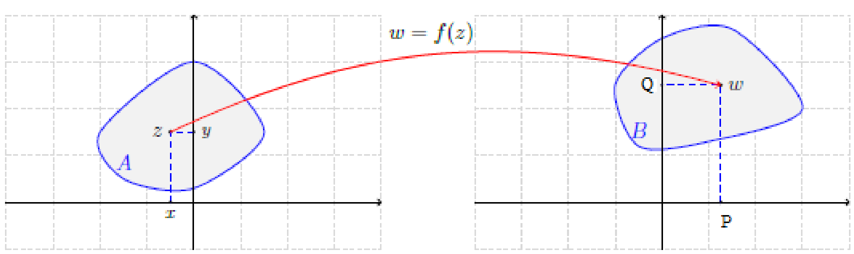
Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy Riemann

1 Fonctions Complexes

Définition 1.1 *Soient A et B deux ensembles non vides dans $\mathbb{C}$. Si à chaque valeur $z \in A$, il correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que w est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ ou*

$$\begin{aligned} f \,:\, A &\longrightarrow B \\ z &\longmapsto w = f(z) \end{aligned}$$

La fonction $z \longmapsto w = f(z)$ définie une correspondance entre deux plans complexes.



Exemple 1.1 $z \longmapsto f(z) = z^2$. *Par exemple, la valeur de f en $z = 3i$ est $f(3i) = -9$*

1.1 Fonctions uniformes et multiformes

Définition 1.2 • *Si une seule valeur de w correspond à chaque valeur de z on dira que w est une fonction uniforme de z ou que $f(z)$ est uniforme.*

• *Si plusieurs valeurs de w correspondent à chaque valeur de z, on dira que w est une fonction multiforme de z.*

Remarque 1.1 • *Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque éélément de cet ensemble étant appelé une branche de la fonction.*
• *On choisit habituellement un élément comme branche principale, ainsi est appelée détermination principale.*

Exemple 1.2 *Si $f(z) = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w. Donc $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z.*
Si l'on considére la fonction $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w. Donc $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est une fonction multiforme de z.
Soit $z = i = e^{i\frac{\Pi}{2}} = e^{i\frac{5\Pi}{2}}$

$$g\left(e^{i\frac{\Pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\Pi}{4}}, \quad g\left(e^{i\frac{\Pi}{2}}\right) = e^{i\frac{5\Pi}{4}}$$

1.2 Fonctions inverses

Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f.

Exemple 1.3 *La fonction $z \longmapsto g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ est la fonction inverse de la fonction $z \longmapsto f(z) = z^2$*

1.3 Transformations

Remarque 1.2 *Posons : $z = x + iy$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, où $Ref(z) = P(x, y)$ et $Imf(z) = Q(x, y)$, on est donc ramené à une application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et ceci en posant $\varphi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$*

Exemple 1.4 *$f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3yx^2 - y^3)\, i$.*
Les parties réelle et imaginaire sont $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$ et $Q(x, y) = 3yx^2 - y^3$

1.4 Limites

Soit f une fonction complexe à une variable complexe z, définie dans un voisinage de $z = z_0$ sauf peut-être en $z = z_0$, c'est-à-dire définie dans un disque ouvert de centre z_0.

Définition 1.3 *Soit f une fonction complexe à une variable complexe ; on dit que f admet une limite l quand z tend vers $z_0 = x_0 + iy_0$, et on note $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On dit également que $f(z)$ tend vers l quand z tend vers z_0 et on écrit $f(z) \longrightarrow l$ quand z tend vers z_0.
La limite est indépendante de la manière dont z tend vers z_0.

Exemple 1.5 *Soit* $f(z) = \begin{cases} z^2 & si\ z \neq i \\ 0 & si\ z = i \end{cases}$.

Alors quand z tend vers $z = i$, $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$ et on écrit $\lim_{z \longrightarrow i} f(z) = -1$.
Pour le prouver, on doit montrer que $\varepsilon > 0$ étant donné on peut trouver η (dépendant en général de ε) tel que $|z^2 - i^2| < \varepsilon$ pourvu que $|z - i| < \eta$.
Si $\eta \leq 1$, alors $|z - i| < \eta$ implique que

$$|z^2 - i^2| = |z - i||z + i| < \eta|z - i + 2i| \leq \eta\left(|z - i| + 2\right) \leq \eta(1 + 2) = 3\eta.$$

Choisissant $\eta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$, nous avons alors $|z^2 - i^2| < \varepsilon$ dès que $|z - i| < \eta$, ce qui établitle résultat demandé.
On notera que la limite de $f(z)$ quand z tend vers z_0 n'a rien à voir avec la valeur de $f(z)$ en i.
Les propriétés concernant les opérations algébriques (somme, produit, quotient) sur les limites des fonctions de la variable complexe, sont analogues à celles des fonctions de la variable réelle

Proposition 1.1 *Posons $l = a + ib$ où a et b sont deux réels, alors*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l \Longleftrightarrow \left\{ \lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} P(x, y) = a \quad et \quad \lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} Q(x, y) = b \right\}.$$

Démonstration 1.1 *La démonstration de cette proposition découle directement de l'inégalité suivante :* $|f(z) - l| = |P(x, y) - a + (Q(x, y) - b)\, i| \leq |P(x, y) - a| + |Q(x, y) - b|$.

Proposition 1.2 *Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique*

Démonstration 1.2 *On doit montrer que si $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l_1$ et $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l_2$ alors $l_1 = l_2$*
Par hypothèse quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$|f(z) - l_1| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ quand } |z - z_0| < \eta$$

$$et\ |f(z) - l_2| < \tfrac{\varepsilon}{2}\ quand\ |z - z_0| < \eta$$

D'où
$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(z) + f(z) - l_2| \leq |l_1 - f(z)| + |f(z) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
i.e. $|l_1 - l_2|$ *est plus petit que tout nombre positif* ε *(arbitrairement petit) et doit donc être nul. Alors* $l_1 = l_2$.

Exemple 1.6 *Montrer que* $\lim\limits_{z \longrightarrow 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ *n'existe pas.*

Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z *tend vers* 0.
Si $z \longrightarrow 0$ *le long de l'axe des* x, *alors* $y = 0$ *et* $z = x + iy = x$, $\overline{z} = x - iy = x$; *la limite cherchée est donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x}{x} = 1$.
Si $z \longrightarrow 0$ *le long de l'axe des* y, *alors* $x = 0$ *et* $z = x + iy = iy$, $\overline{z} = x - iy = -iy$; *la limite cherchée est donc* $\lim\limits_{y \longrightarrow 0} \dfrac{-iy}{iy} = -1$.
Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \longrightarrow 0$, *il n'y a pas donc de limite.*

1.4.1 Point à l'infini

Par la transformation $w = \dfrac{1}{z}$, le point $z = 0$ est transformé en $w = \infty$ appelé point à l'infini du plan de la variable w.
De la même façon nous noterons par $z = \infty$ le point à l'infini du plan de la variable z. Pour étudier le comportement de $f(z)$ à $z = \infty$, il suffira de poser $z = \dfrac{1}{w}$ w et d'étudier le comportement de$f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ à $w = 0$.

1.5 Continuité

Définition 1.4 *Soit* f *une fonction complexe uniforme définie dans un voisinage de* $z = z_0$ *et en* z_0.
La fonction f *est dite continue en* z_0, *si elle admet une limite en* z_0 *et que cette limite vaut* $f(z_0)$ $\left(\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)\right)$.
Une fonction f *est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région*

Proposition 1.3 *si* f *et* g *sont continues en* z_0 *alors,* $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ *et* $\dfrac{f}{g}$ $(g(z_0) \neq 0)$ *le sont aussi.*

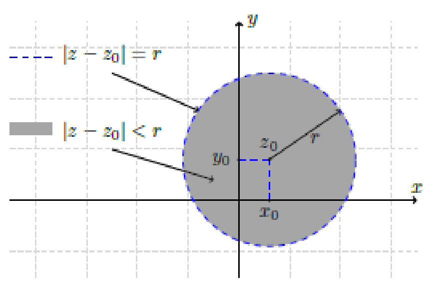
Exemple 1.7 *Soit f la fonction définie par* $f(z) = \begin{cases} z^2 & si\ z \neq i \\ 1 & si\ z = i \end{cases}$.
Quand z tend vers i, $f(z)$ se rapproche de $i^2 = -1$ i.e. $\lim\limits_{z \longrightarrow i} f(z) = i^2 = -1$. Mais $f(i) = 1$. Donc $\lim\limits_{z \longrightarrow i} f(z) \neq f(i)$ et la fonction n'est pas continue en $z = i$.

Remarque 1.3 *La fonction $P + iQ$ est continue dans un domaine si et seulement si la partie réelle Q et la partie imaginaire Q sont continues.*

Les propriétés des fonctions continues de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ sont analogues à celles des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. La plupart de ces dernières admettent une extension simple à des fonctions de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$.

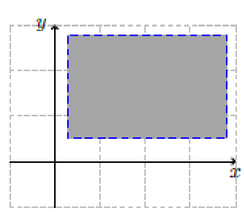
2 Domaines dans le plan complexe

On note $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ telque\ |z - z_0| < r,\ r > 0\}$.
$D(z_0, r)$ est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r.
$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ telque\ |z - z_0| \leq r,\ r > 0\}$.
$\bar{D}(z_0, r)$ est appelé disque fermé de centre z_0 et de rayon r.



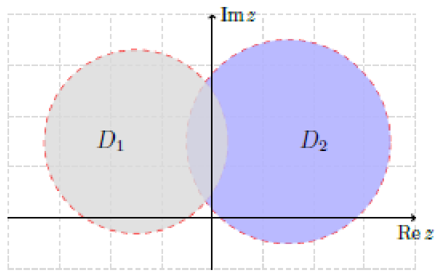
Définition 2.1 *Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si chaque point z_0 de E peut être entouré par un disque ouvert $D(z_0, r)$ tel que tous les points du disque sont contenus dans E.*

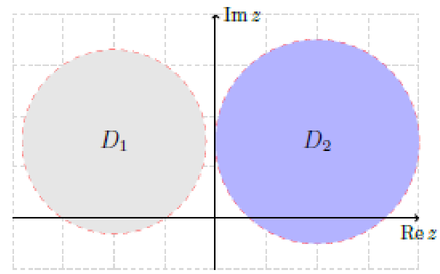
Exemple 2.1 *Un rectangle sans ses arêtes est un ensemble ouvert.*



Définition 2.2 *Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il n'admet aucune partition par deux ouvert non vides (E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints).*

Intuitivement, un ensemble est connexe s'il est fait d'un seul morceau.





L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ est connexe

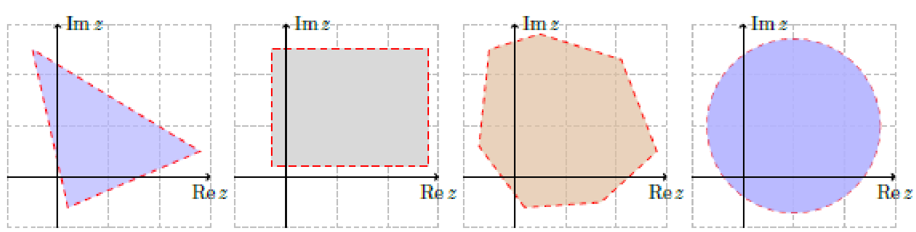
L'ensemble $E = D_1 \cup D_2$ n'est pas connexe

Définition 2.3 *Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par lignes polygonales si deux points quelconques de E peuvent être joints par un chemin formé de segments de droites (i.e. un contour polygonal) dont tous les points appartiennent à E.*

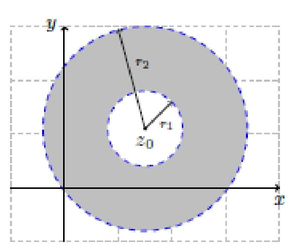
Il peut être démontré qu'un ensemble connexe par lignes polygonales est connexe. L'inverse, cependant, est fausse en général. Par exemple, l'ensemble des points $z = x + iy$ avec $y = x^2$ est clairement connexe mais n'est connexe par lignes polygonales puisque l'ensemble ne contient pas de segments de ligne droite. D'autre part,pour les ensembles ouverts, la connexité et la connexité par lignes polygonales sont équivalentes.

Définition 2.4 *Un domaine dans le plan complexe est un ensemble connexe ouvert.*

Exemple 2.2 *Les triangles, les rectangles, les polygones et les disques ouverts sont des domaines*



Exemple 2.3 *La couronne de centre z_0 et de rayons r_1 et r_2 est un domaine.*



3 Fonctions Holomorphes

Malgré la possibilité de considérer un nombre complexe z comme un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mais il y avait une différence essentielle entre la fonction considérée comme une fonction de la variable complexe z ou des variables réelles x et y. Cette différence est particulièrement apparaît dans la dérivation.

3.1 Dérivées

Par analogie avec le cas des fonctions réelles, on définit la dérivée d'une fonction complexe f de la variable complexe z.

Définition 3.1 *Soit D un domaine dans le plan complexe. Soit f une fonction uniforme de D dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$.*
La dérivée de f en z_0 est définie par $f'(z_0) = \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ pourvu que cette limite existe. Dans ce cas on dit que f est dérivable en z_0.
On utilise souvent l'écriture analogue $f'(z_0) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.

Définition 3.2 *Si la dérivée de f existe en tout point z d'un domaine D, alors f est dite holomorphe dans D.*
Une fonction f est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.

$$f \text{ holomorphe en } z_0 \Longleftrightarrow f \text{ dérivable en } z_0 .$$

Exemple 3.1 • *La fonction $z \longrightarrow f(z) = \dfrac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*
• *La fonction $z \longrightarrow f(z) = Re(z)$ n'est pas dérivable en aucun point*

Propriétés :
• $(f + g)' = f' + g'$ • $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$ • $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

Proposition 3.1 *Si la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au point $z_0 \in D$ alors elle est continue au point z_0.*

Preuve 3.1 *Remarquer que pour tout nombre complexe $z \in D \setminus \{z_0\}$ on peut écrire*

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0).$$

$f'(z_0) = \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} \dfrac{f(z) - f(z_{0})}{z - z_0}$ *existe par hypothèse, on aura*

$\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} \dfrac{f(z) - f(z_{0})}{z - z_0} \lim\limits_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$

Donc $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ *ce qui montre que* f *est continue en* z_0.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, en effet, par exemple $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par* $f(z) = \overline{z}$ *est continue en tout* $z_0 \in \mathbb{C}$ *, mais elle n'est pas dérivable en aucun point.*

Définition 3.3 *Une fonction* f *est dite entière si elle est dérivable dans tout le plan complexe* $\mathbb{C}$

Exemple 3.2 *Les polynômes* $f(z) = a_n z^n + ... a_1 z + a_0, \ \ a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, *les fonctions* $z \longmapsto \exp z$, $z \longmapsto \cos z$, $z \longmapsto \sin z$ *sont des fonctions entières.*

3.2 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction de D dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2 *Si* f *est holomorphe dans* D, *alors les dérivées partielles* $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *existent en tout point de* D, *et vérifient les équations de Cauchy-Riemann*

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.}$$

Preuve 3.2 *Donnons une condition nécessaire de dérivabilité d'une fonction* f *dérivable en* z_0.

f *dérivable en* z_0 *donc* $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} \dfrac{f(z) - f(z_{0})}{z - z_0}$ *existe.*

Posons $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *et* $z_0 = (x_0, y_0)$, *on a alors :*

$$f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} \left[\frac{P(x, y) - P(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i\frac{Q(x, y) - Q(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \right].$$

fixons $y = y_0$ *on a :*

$$f'(z_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \left[\frac{P(x, y_0) - P(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{Q(x, y_0) - Q(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] = P'_x (x_0, y_0) + iQ'_x (x_0, y_0).$$

fixons $x = x_0$ *on a :*

$$f'(z_0) = \lim_{y \longrightarrow y_0} \left[\frac{P(x_0, y) - P(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i\frac{Q(x_0, y) - Q(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \right] = -iP'_y (x_0, y_0) + Q'_y (x_0, y_0).$$

Comme la dérivée est unique, on a nécessairement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Ces deux conditions, sont appelées ≪ conditions de Cauchy-Riemann ≫.

Il est légitime de se demander si la réciproque de cette proposition est vraie ou fausse.
La réponse est dans la proposition suivante

Proposition 3.3 *Si les dérivées partielles* $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *continues dans* D, *et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, alors la fonction* $z \longmapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *est holomorphe dans* D.

Preuve 3.3 *Soit* $z = x + iy \in D$ *et soit* $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ *tel que* $z + h \in D$.

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *étant supposées continues, alors en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1, on obtient*

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= P(x + h_1, y + h_2) - P(x, y) + i\left[Q(x + h_1, y + h_2) - Q(x, y)\right] \\ &= h_1 \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + ih_1 \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) ih_2 \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(h_1 + ih_2) \end{aligned}$$

D'où en divisant par $h = h_1 + ih_2$ *et faisant tendre* h *vers* 0, *on voit que*

$$f'(z) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Corollaire 3.1 *Soit* D *un domaine dans* $\mathbb{C}$. *Si La fonction* $z \longmapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *est holomorphe dans* D, *alors la dérivée de* f *est donnée par*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

Exemple 3.3 *On considère la fonction définie par* $f(z) = z^2$.
On a $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, *d'où* $P(x, y) = x^2 - y^2$ *et* $Q(x, y) = 2xy$. *Alors* $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$ *et aussi* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
f *est donc dérivable, et* $f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$*;*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f'(z) = 2z$$

Remarque 3.1

1· *Remarquons qu'on a,*
$\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial(P+iQ)}{\partial x} + i\dfrac{\partial(P+iQ)}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$
Une forme condensée des conditions de Cauchy-Riemann est :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.}$$

2· *En notant que* $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$, *les conditions de Cauchy-Riemann aussi peuvent être écrites sous la forme*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.}$$

Les coordonnées $(z, \overline{z})$ *qui déterminent un point sont appelées coordonnées complexes conjuguées, ou plus brièvement coordonnées conjuguées.*

Exemple 3.4 *Soit la fonction définie par* $f(z) = z^2 + zRez$. *On a* $Rez = x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, *alors* $f(z) = z^2 + z\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{1}{2}z\overline{z}$ *et donc* $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}z \neq 0$. *D'où la fonction* f *ne peut pas être holomorphe en aucun domaine.*

3· *Si* $f(z)$ *ne contient pas le terme* $\overline{z}$, *il en est de même de sa dérivée. Donc* $f'(z)$ *est aussi dérivable. D'où le résultat très important; soit* D *un sous ensemble de* $\mathbb{C}$.

$$f \text{ dérivable dans } D \Longleftrightarrow f \text{ est indéfiniment dérivable dans } D.$$

On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles.

3.3 Dérivées d'ordre supérieur

Si f est holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$, sa dérivée est notée f'.
Si f' est holomorphe également dans le même domaine, sa dérivée est notée f''.
De la même façon la déivée $n^{iéme}$ de f sera notée $f^{(n)}$.
Si f ne contient pas le terme $\overline{z}$, il en est de même pour sa dérivée. Donc d'après la condition de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, la fonction f' est aussi dérivable. D'où le résultat très important.

Proposition 3.4 *Si f est holomorphe dans un domaine D, alors $f', f'', ...$ sont également holomorphes dans D, i.e. les dérivées de tous ordres existent dans D.*
On n'a pas un résultat analogue pour les fonctions réelles.

4 Fonctions harmoniques

Une fonction $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^2 sur Ω, (on note $\varphi \in C^2(\Omega)$) si

$\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\ et \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ existent et continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 4.1 *Soit φ une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω On dit que φ est harmonique si*

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \ pour\ tout\ (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.}$$

Notation. La fonction $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ est notée $\triangle \varphi$ et est appelée laplacien de φ.

Exemple 4.1 *Soit la fonction φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = e^y cosx$. On a*
$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -e^y sinx,\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -e^y cosx,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = e^y cosx,\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = e^y cosx.$
La fonction φ est de classe C^2 sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ et on a $\triangle \varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -e^y cosx + e^y cosx = 0$, d'où la fonction φ est harmonique.

Proposition 4.1 *Soit $z \longrightarrow f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction holomorphe dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$. Si les deux fonctions réelles P et Q sont de classe C^2 sur D, alors elles sont harmoniques dans D.*

Preuve 4.1 *Notons que puisque $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ est holomorphe sur D les fonctions P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann dans D. i.e.*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y), \ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \text{ pour tous } x+iy \in D.$$

Ainsi, comme les fonctions P et Q sont de classe C^2 sur D, on pourra écrire

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}.$$

D'où $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$. Donc, la partie réelle P et la partie imaginaire Q de f sont harmoniques dans D.

Exemple 4.2 *On reprend l'exemple $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, d'où $P(x,y) = x^2 - y^2$ et $Q(x,y) = 2xy$. On a*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial P}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = -2x, \ \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

Alors $\triangle P = -2 + 2 = 0$ et $\triangle Q = 0 + 0 = 0$. D'où les fonctions P et Q sont harmoniques. Noter que si f est holomorphe dans un domaine D, toutes ses dérivées existent et sont continues dans D. Les restrictions apportées ci-dessus sur P et Q qu'elles soient de classe C^2 sur D, ne sont donc pas nécessaires.

Définition 4.2 *Soit P une fonction harmonique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors une fonction Q est dite harmonique conjuguée de P si les fonctions P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.*

Définition 4.3 *Soit P une fonction harmonique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors il existe une fonction f holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f) = P$ (ou $Im(f) = P$).*

Remarque 4.1 *Ça peut être $\mathbb{C}$ ou une partie de $\mathbb{C}$; tout dépend du domaine de définition de P.*

Exemple 4.3 *Trouver une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $Re(f(z)) = P(x,y) = \cos x \cosh y$.*

Solution :
Le domaine de définition de P est $\mathbb{R}^2$. Vérifions que $P(x,y) = \cos x \cosh y$ est une fonction harmonique. On a :

$$\begin{cases} P'_x(x,y) = -\sin x \cosh y & P''_{x^2} = -\cos x \cosh y \\ P'_y(x,y) = \cos x \sinh y & P''_{y^2} = \cos x \cosh y \end{cases} \Longrightarrow \triangle P = P''_{x^2} + P''_{y^2} = 0$$

Posons $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, f holomorphe entraîne que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -\sin x \cosh y & (1) \\ \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \cos x \sinh y & (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) on tire : $Q(x,y) = -\displaystyle\int \sin x \cosh y \; dy = -\sin x \sinh y + \psi(x)$. ψ dépend seulement de x.

De (2) on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\cos x \sinh y \, (\sin x \sinh y + \psi(x))'_x = -\cos x \sinh y + \psi'(x)$ d'où l'on tire : $\psi'(x) = 0$ et donc $\psi(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
D'où : $Q(x,y) = -\sin x \sinh y + c$.
Finalement on trouve :
$f(z) = \cos x \cosh y + i\,(-\sin x \sinh y + c) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y + k$, k est un imaginaire pur.

Remarque 4.2 *Si k est une constante quelconque, par exemple $k = a + ib$, alors la partie réelle de f serait* $\cos x \cosh y + a$, *ce qui n'est pas le cas.*

4.1 Règles de dérivation

Les règles de dérivation concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions réelles. Les dérivées des fonctions élémentaires dans le cas complexe sont identiques à celles dans le cas réel.

Exemple 4.4 $\dfrac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$, $\dfrac{d \sin z}{dz} = \cos z$, $\dfrac{\exp(z)}{dz} = \exp(z)$

4.2 Règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le point z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$.
Alors la règle de L'Hôpital permet d'affirmer que

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Exemple 4.5 $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = \lim_{z \longrightarrow i} \frac{6z^5}{2z} = 3i^4 = 3$

5 Points singuliers

Définition 5.1 *Un point en lequel la fonction f cesse d'être holomorphe est appelé un point singulier ou une singularité de f.*

Définition 5.2 *Le point $z = z_0$ est appelé singularité isolée, ou point singulier isolé de f, si l'on peut déterminer $\delta > 0$ tel que le disque $|Z - Z_0| \leq \delta$ ne contienne pas d'autre point singulier que z_0. Si l'on ne peut trouver une telle valeur δ, on dit que z_0 est une singularité non isolée.*

Exemple 5.1 *La fonction $z \longmapsto f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ a des singularités en $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ et en $z_0 = 0$.*
Comme nous pouvons entourer chacune des singularités $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ par un cercle de rayon δ_k n'en contenant pas d'autre singularités, on en déduit qu'elles sont isolées.
De plus comme tout cercle de rayon δ centré en $z_0 = 0$ contient d'autres singularités que $z_0 = 0$, on en déduit que $z_0 = 0$ est une singularité non isolée.
Il existe des types variés de singularités.

5.1 Singularités apparentes

Définition 5.3 *Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de f si $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z)$ existe*

Exemple 5.2 *Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $z \longmapsto f(z) = \frac{\sin z}{z}$ puisque $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$*

5.2 Pôles

Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z \longrightarrow 0}(z-z_0)^n f(z) = a \neq 0$, alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n. Si $n=1$, z_0 est appelé un pôle simple.

Exemple 5.3 *La fonction* $z \longmapsto f(z) = \dfrac{z}{(z-3)(z+1)^2}$ *a un pôlee double en* $z=-1$ *et un pôle simple en* $z=3$.

Si $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$, où $f(z_0) \neq 0$ et n est un entier positif, $z=z_0$ est appelé un zéro d'ordre n de $z \longmapsto g(z)$. Si $n=1$ on dit que z_0 est un zéro simple. Dans un tel cas z_0 est un pôle d'ordre n de la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{g(z)}$.

5.3 Points de branchement

Soit z_0 un point singulier isolé de f. Le point z_0 est un point de branchement lorsque l'image par f d'au moins d'une courbe fermée entourant z_0 est une courbe non fermée.
Le point est dit d'ordre n s'il faut au plus n tours autour de z_0 pour refermer la courbe image. Si la courbe ne se referme jamais quel que soit le nombre de tours effectués autour de z_0, on dit que le point de branchement est transcendant ou logarithmique.

Exemple 5.4 • *La fonction* $z \longmapsto f(z) = \sqrt{z-5}$ *a un point de branchement en* $z=5$.
• *La fonction* $z \longmapsto f(z) = \log(z^2-z-6)$ *a un point de branchement pour les valeurs de* z *telles* $z^2-z-6=0$, *i.e. en* $z=-2$ *et* $z=3$

5.4 Singularités essentielles

Une singularité qui n'est ni un pôle, ni un point de branchement, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle .

Exemple 5.5 *La fonction* $z \longmapsto f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$ *une singularité essentielle en* $z=2$.

5.5 Singularités à l'infini

En posant $z = \frac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $f(\frac{1}{w}) = F(w)$.
Alors la nature de la singularité à $z=\infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w=0$.

Exemple 5.6 *La fonction* $z \longmapsto f(z) = z^3$ *un pôle triple en* $z=\infty$ *car* $F(w) = f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ *possède un pôle triple en* $z=0$.

On verra plus tard comment classer les singularités à l'aide des séries.

Exercice 1.1
À l'aide de la définition calculer la dérivée de $f(z) = z^2 - z$

Exercice 1.2
Montrer que les fonctions complexes suivantes ne sont pas dérivables aux points indiqués.
a) $f(z) = \overline{z}$, pour $z \in \mathbb{C}$, *b)* $f(z) = Re(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$, *c)* $f(z) = Im(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.3
Examiner si les fonctions suivantes sont holomorphes sur le domaine indiqué.
a) $f(z) = \exp(-y)(\cos x + i \sin y)$, sur $\mathbb{C}$ *b)* $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, sur $\mathbb{C}^*$,
c) $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, sur $\mathbb{C}$ *d)* $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$, sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1.4
Montrer que la fonction P définie ci-dessous est harmonique.

$$P(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Trouver une fonction Q pour que la fonction $f = P + iQ$ soit holomorphe.
Mêmes questions pour la fonction

$$P(x, y) = y \cos y \cosh x + x \sin y \sinh x, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.5
Quelle est la nature des singularités de chacune des fonctions suivantes ?
a) $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2-1}$, *b)* $g(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z^2})}$